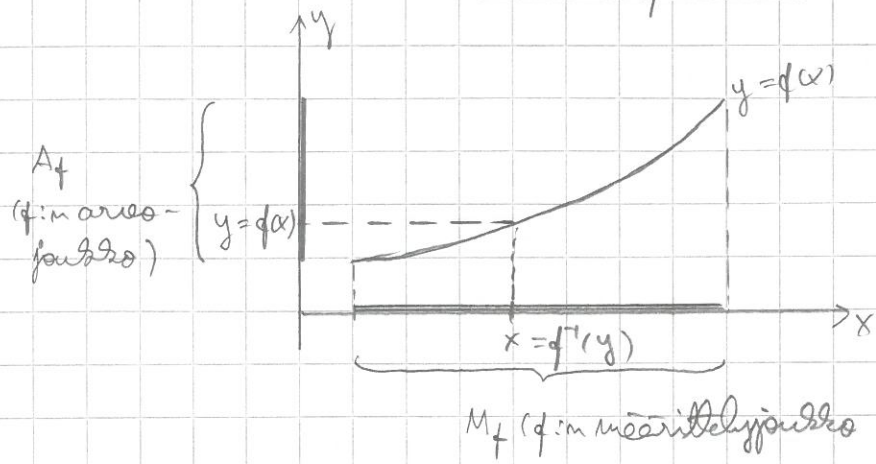
6. Käänteisfunktio



$f : M_f \to \mathbb{R}$

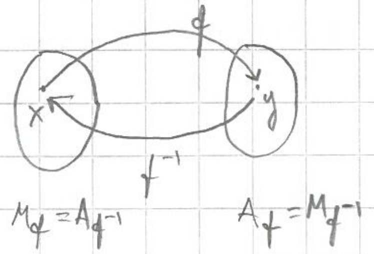
f saa jokaisen arvonsa vain yhdessä kohdassa (esim. f on aidosti monotoninen)

$\Rightarrow$ on olemassa käänteisfunktio

$f^{-1} : A_f \to \mathbb{R}$

$$\boxed{y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)}$$

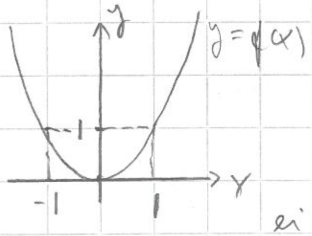
Nuolikaavio:



$$\begin{cases} f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \\ f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \end{cases}$$

$\Rightarrow$ funktio ja käänteisfunktio peräkkäin kumoavat toisensa

Esim. a) $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$

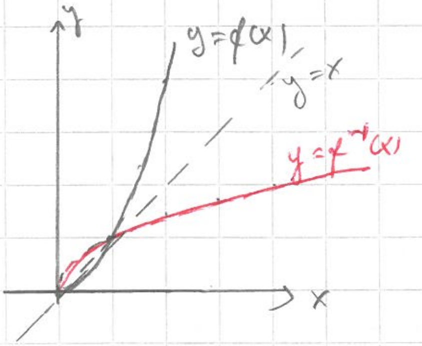


$f(1) = f(-1) = 1$

$f^{-1}(1) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$ kumpi?

ei saada 1-käsitteistä $f^{-1}(1)$:n arvoa $\Rightarrow$ käänteisfunktiota ei ole olemassa

b) $f(x) = x^2,\ x \geq 0$



$f'(x) = 2x > 0$ kun $x > 0$

$\Rightarrow$ f on aidosti kasvava kun $x \geq 0$

$\Rightarrow f^{-1}$ on olemassa

$f(x) = y = x^2 \quad |\sqrt{\ }$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y} = f^{-1}(y)$

$x \geq 0$

$A_f = M_{f^{-1}} = [0, \infty[$

$\Rightarrow \underline{f^{-1}(x) = \sqrt{x}\ ,\ x \geq 0}$

[pienin arvo: $f(0) = 0$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$

f jatkuva

$\Big\}\ A_f = M_{f^{-1}} = [0, \infty[$]

Yleisesti f:n ja f^{-1}:n kuvaajat ovat toistensa peilikuvia suoran $y = x$ suhteen