4.2 $f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x \le 1 \\ 2x+1, & x > 1 \end{cases}$

$x=1: \; 1^2+2=3$ ← samat tulokset → f on jatkuva 1:ssä
$x=1: \; 2\cdot 1+1=3$ ←

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{(x^2+2)-(1^2+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{x^2-1^2}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1-} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to 1-} (x+1) = 1+1 = 2$$ (vasemmanpuoleinen derivaatta)

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{(2x+1)-(1^2+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{2x-2}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1+} \frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to 1+} 2 = 2$$ (oikeanpuoleinen derivaatta)

Koska $f'_-(1) = f'_+(1)$, on f derivoituva kohdassa 1 (ja $f'(1)=2$)

4.4 $f(x) = x^2\,|x-1|$

0-kohdat: $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cdot(-(x-1)) = x^2(-x+1) = -x^3+x^2, & x<1 \\ x^2\cdot(x-1) = x^3-x^2, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{(-x^3+x^2)-(1^3-1^2)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{-x^3+x^2}{x-1}$$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1-} \frac{-x^2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1-} (-x^2) = -1^2 = -1$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{(x^3-x^2)-(1^3-1^2)}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1+} \frac{x^2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to 1+} x^2 = 1^2 = 1$$

Koska $f'_-(1) \ne f'_+(1)$, ei f ole derivoituva kohdassa 1

4.6 $f(x) = \begin{cases} ax^2+b, & x \le 2 \\ 6x-4, & x > 2 \end{cases}$ 2 tuntematonta → tarvitaan 2 yhtälöä

1° f oltava jatkuva kohdassa 2

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (ax^2+b) = a\cdot 2^2+b = 4a+b$$