

SARJA A

1. Olkoon n kokonaisluku. Osoita, että kokonaisluku $n^2 + 3n$ on parillinen.

2. Kaardemumman kaupungissa on taas tehty töös. Silminnäkiä kertoo mestarisalapoliisi Marvotalle, että "Kasper on syylinen, tai jos Jesper on syytön, niin Joonatan on syytön". Marvotal tuntee silminnäkiän ja tietää, että hän valehtelee aina. Kenet Marvotal pitää?

3. Lyly lyö kassahinnalle 21 markan hintaisia paitoja ja 6 markan hintaisia sukkapareja. Kassaneiti ilmoittaa hinnaksi 151 markkaa.

a) Lyly ei tiennyt oikeata loppusummaa, mutta osasi laskea, että kassaneidin ilmoittama summa ei ainakaan voinut olla oikein. Kuinka se oli mahdollista?

b) Oikea loppusumma oli 150 markkaa. Kuinka monta paitaa ja sukkaparia Lyly osti. Selvitä kaikki eri mahdollisuudet.

4. Osoita, että yhtälöllä $x^3 + 2x = 5$ on täsmälleen yksi ratkaisu. Määritä ratkaisun likiarvo kuuden desimaalin tarkkuudella käyttäen Newtonin menetelmää.

5. Olkoon n sellainen kokonaisluku, että $n + 1$ on parittoman kokonaisluvun neliö. Osoita, että luku n on jaollinen luvulla 8.

6. a) Osoita, että kymmenjärjestelmän luku $a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-2} 10^{n-2} + \dots + a_1 10 + a_0$ on jaollinen kolmella, jos ja vain jos

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \text{ on jaollinen kolmella.}$$

b) Näytä, että luku $7^{2502} + 2^{1573}$ on jaollinen kolmella. (Ylioppilaskoe, k. 1999)

SARJA B

1. Sääennustuksen mukaan huomenna sataa lunta tai tuulee, tai sitten, jos pakkakanen kiristyy, niin on poutaa ja tyyntä. Onko ennustus tautologia?

2. Todista, että kahden peräkkäisen parittoman kokonaisluvun summa on aina jaollinen neljällä.

3. Osoita, että luku $2^{2n} - 1$ on jaollinen luvulla 3 aina kun n on luonnollinen luku.

4. Positiivisten kokonaislukujen a ja b , missä $a < b$, suurin yhteinen tekijä on 504 ja pienin yhteinen monikerta 16 632. Jaa luvut 504 ja 16 632 alkutekijöihin ja määritä luvut a ja b .

5. a) Tee ohjelma, joka kysyy käyttäjältä kaksi kokonaislukuja (a ja b , missä $b > 0$).

Ohjelma tutkii, onko a jaollinen luvulla b ja tulostaa johtopäätöksen sekä osamäärän ja mahdollisen jakojäännöksen.

b) Tee ohjelma, joka kysyy käyttäjältä positiivisen kokonaisluvun ja laskee luvun numeroiden summan. Laadi ohjelma niin, että se tarkistaa, onko käyttäjän antama kokonaisluku positiivinen.

6. Osoita, että $1\,000 \equiv -1 \pmod{13}$. Määritä edelleen 15-numeroisen kokonaisluvun 423 317 000 046 01a viimeinen numero a niin, että luku on jaollinen luvulla 13.

SARJA C

1. Olkoon A lause "otat" ja B lause "ajat". Formalisoi lause "jos otat, et aja, ja jos ajat, et ota" ja osoita, että lause on loogisesti yhtäpitävä lauseen "jos otat, et aja" kanssa.

2. Määritä kaikki välillä $1\,500 < n < 2\,000$ olevat kokonaisluvut, jotka täyttävät seuraavan ehdon: luku n voidaan ilmaista kahden sellaisen kokonaisluvun summana, joista toinen on 12 kertaa niin suuri kuin toinen, ja kahden sellaisen kokonaisluvun summana, joista toinen on 15 kertaa niin suuri kuin toinen.

3. Onko mahdollista toteuttaa jokaisen lapsen toive? Jos on, niin millä tavalla?
Paavo: "En halua, että Elina saa jäätelöä ja Markus saa mehua."

Elina: "Markus ei saa mehua, mutta jos minä saan jäätelöä, niin sitten Paavo saa karkkia."
Markus: "Minä haluan, että Elina ei saa jäätelöä, mutta Paavo saa karkkia."

4. Osoita, että jokaisella kokonaisluvulla n luku $n^4 - n^2$ on jaollinen luvulla 12.

5. Olkoon n sellainen positiivinen kokonaisluku, että $2n + 1$ on kokonaisluvun neliö. Osoita, että $n + 1$ on kahden peräkkäisen kokonaisluvun neliöiden summa.

6. Olkoon n positiivinen kokonaisluku.

a) Osoita, että jos n on parillinen, niin luku $2^n - 1$ on jaollinen luvulla 3.

b) Osoita yleisesti, että jos luvulla n on tekijä $p \geq 2$, niin luku $2^n - 1$ on jaollinen luvulla $2^p - 1$.

A2. Joonatanin; A3.b) paitoja ja sukkapareja: 2, 18 tai 4, 11 tai 6, 4;

A4. 1, 328 269

B1. On; B4. $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ ja $16\,632 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11$, $a = 504$ ja $b = 16\,632$ tai $a = 1512$ ja $b = 5\,544$; B6. $a = 8$;

C1. $(A \Rightarrow \neg B) \wedge (B \Rightarrow \neg A)$; C2. 1 664 ja 1 872; C3. On mahdollista kun Paavo saa karkkia ja muille pennuille ei anneta kun keppiä