12.4

```
import random
a = random.randint(0,100)
b = random.randint(0,100)
print "Laske: ", a, "+", b
c = int(input("Tulos: "))
while c != a+b :
    print("Yritä uudelleen.")
    print "Laske: ", a, "+", b
    c = int(input("Tulos: "))
print("Aivan oikein!")
```

12.9

```
a = "k"
while a == "k"
    b = str(input("Anna nimesi: "))
    print "Hei, ", b, "!"
    a = str(input("Haluatko jatkaa (k/e)?"))
```

13.1

```
print("Ohjelma laskee tulon n(n-1)...·2·1")
n = int(input("Anna positiivinen kokonaisluku: "))
while n<1 :
    print("Ei ole positiivinen kokonaisluku.")
    n = int(input("Anna posit. kokonaisluku."))
tulo = 1
for i in range(1, n+1) :
    tulo = tulo * i
print "Luvun", n, "kertoma", n, "! = ", tulo
```

13.3

```
    :
for i in range(2, luku+1):
    if luku% i == 0 :
        alkuluku = False
        break
if alkuluku == True:
    print "Luku", luku, "on alkuluku."
else :
    print "Luku", luku, "ei ole alkuluku, koska
            se on jaollinen ainakin luvulla", i
```

13.5

```
lista = [1,4,82,18,3,1]
print "Lajiteltava lista: ", lista
pituus = len(lista)
for i in range(pituus-1):
    for j in range(i+1, pituus):
        if lista[i] < lista[j]:
            apu = lista[i]
            lista[i] = lista[j]
            lista[j] = apu
print "Lajiteltu lista: ", lista
```

13.7

```
print("Lasketaan n:n ekan parittoman luonn. luvun summa.")
n = int(input("Anna positiivinen kokonaisluku: "))
while n<1 :
    print("Ei ole positiivinen kokonaisluku.")
    n = int(input("Anna positiivinen kokonaisluku."))
summa = 0
for i in range(1, n+1):
    summa = summa + 2 * i - 1
print "1+3+...+", 2*n-1, " = ", summa
```

14.1

a) $11001010_2 = 1\cdot2^7+1\cdot2^6+0\cdot2^5+0\cdot2^4+1\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2+0$
$= 128+64+8+2 = \underline{202}$

b) $233_{10} = 128+64+32+8+1$
$= 1\cdot2^7+1\cdot2^6+1\cdot2^5+1\cdot2^3+1 = \underline{11101001_2}$

14.7

$1a8_{10} = 1000b10_2$
$\Leftrightarrow 1\cdot10^2+a\cdot10+8 = 1\cdot2^7+1\cdot2^3+b\cdot2^2+1\cdot2$
$\Leftrightarrow 108+10a = 128+8+4b+2$
$\Leftrightarrow 10a-4b = 30 \quad |:2 \quad \Leftrightarrow 5a-2b=15$

Kokeilemalla: $\left.\begin{array}{l} b=0 \Rightarrow a=3 ✓ \\ b=1 \Rightarrow a=\frac{17}{5} ✗ \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a=3,\ b=0}$

14.12

$22771_8 = 2\cdot8^4+2\cdot8^3+7\cdot8^2+7\cdot8+1 = \underline{9721}$

14.16

a) $23AB4_{16} = 2\cdot16^4+3\cdot16^3\cdot10\cdot16^2+11\cdot16+4 = \underline{146\,100_{10}}$

b) $23AB4_{16} = 146\,100$
$= 131\,072+8192+4096+2048+512+128+32+16+4$
$= 2^{17}+2^{13}+2^{12}+2^{11}+2^9+2^7+2^5+2^4+2^2$
$= \underline{10\,001\,110\,101\,011\,0100_2}$

15.2

$f(x)=\sqrt{x}-x+1$, f jatkuva R:ssä
$f(2)\approx0{,}41>0$, $f(3)\approx-0{,}27<0 \Rightarrow$ väli $]2,3[$
$f(2{,}5)\approx0{,}081>0 \Rightarrow\ ]2{,}5;3[$
$f(2{,}75)\approx-0{,}092<0 \Rightarrow\ ]2{,}5;2{,}75[$
$f(2{,}625)\approx-0{,}0048<0 \Rightarrow\ ]2{,}5;2{,}625[$
$f(2{,}5625)\approx0{,}038>0 \Rightarrow\ ]2{,}5625;2{,}625[$
$\Rightarrow$ 0-kohta: $x\approx\underline{2{,}6}$

15.7

$x-\sqrt{x+4}=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{x+4}=g(x)$
$x_1=2$, $x_{n+1}=g(x_n)$
$x_2=g(x_1)\approx2{,}449\,489\,742\,783\,2$
$x_3=g(x_2)\approx2{,}539\,584\,561\,061\,7$
$x_4=g(x_3)\approx2{,}557\,261\,144\,478\,9$
$\vdots$
$x_{20}\approx x_{21}\approx2{,}561\,552\,812\,808\,8 \quad \Rightarrow \underline{x\approx2{,}561\,553}$

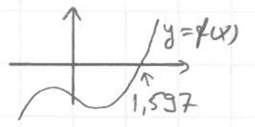
15.23

$x^3+2x-4=0 \qquad [x\approx1{,}179\,509\,024\,602\,9]$

a) $x^3+2x-4=0 \Leftrightarrow 2x=4-x^3 \quad |:2$
$\Leftrightarrow x=2-\frac{1}{2}x^3=g(x)$
$x_1=1$, $x_{n+1}=g(x_n)$
$x_2=g(x_1)=1{,}5$
$x_3=g(x_2)=0{,}3125$
$x_4=g(x_3)=1{,}984\,741\,210\,937\,5$
$\vdots$
$x_{10}\approx3{,}2107\cdot10^{47}$
$x_{11}\approx-1{,}65\cdot10^{142}$ $\Rightarrow$ ei suppene

b) $x^3+2x-4=0 \Leftrightarrow x^3=4-2x \quad |\sqrt[3]{\ }$
$\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{4-2x}=f(x)$
$x_1=1$, $x_{n+1}=f(x_n)$
$x_2=f(x_1)\approx1{,}259\,921\,049\,894\,9$
$x_3=f(x_2)\approx1{,}139\,644\,369\,477\,1$
$x_4=f(x_3)\approx1{,}198\,310\,414\,108\,2$
$\vdots$
$x_{41}\approx x_{42}\approx1{,}179\,509\,024\,602\,9$
$\Rightarrow$ suppenee kohti ratkaisua ($\approx1{,}179\,509$)

M1. $f(x) = x^5 - 4x - 4$



$f'(x) = 5x^4 - 4$

Newtonin menetelmä: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0,1,2,\ldots$

$x_0 = 2$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_1)} \approx 1{,}736\ 842\ 105\ 263\ 2$

$x_2 \approx 1{,}619\ 784\ 422\ 053\ 2$

$x_3 \approx 1{,}597\ 720\ 931\ 010\ 2$

$x_4 \approx 1{,}597\ 006\ 900\ 876\ 4$

$x_5 \approx 1{,}597\ 006\ 172\ 192\ 7$

$x_6 \approx 1{,}597\ 006\ 172\ 191\ 9 \approx x_7$ $\Rightarrow \underline{x \approx 1{,}597}$

M4. $x^3 = x + 2 \iff f(x) = x^3 - x - 2 = 0$

Newtonin menetelmä: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0,1,2,\ldots$

$f'(x) = 3x^2 - 1 \geq 3 \cdot 1^2 - 1 = 2$ kun $x \geq 1$

$\Rightarrow$ f aidosti kasvava välillä $[1,\infty[$

$\Rightarrow$ f:llä on korkeintaan 1 0-kohta väl. $[1,\infty[$ (1)

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = -2 < 0 \\ f(2) = 4 > 0 \\ f \text{ jatkuva} \end{array}\right\} \Rightarrow f\text{:llä on korkeintaan 1 0-kohta (2)}$$

(1) ja (2) $\Rightarrow$ f:llä on täsmälleen 1 0-kohta väl. $[1,\infty[$

$x_0 = 1$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2$

$x_2 \approx 1{,}636\ 363\ 636\ 363\ 6$

$x_3 \approx 1{,}530\ 392\ 052\ 131\ 2$

$x_4 \approx 1{,}521\ 441\ 465\ 135\ 1$

$x_5 \approx 1{,}521\ 379\ 709\ 733\ 2$

$x_6 \approx 1{,}521\ 379\ 706\ 804\ 6 \approx x_7$ $\Rightarrow \underline{x \approx 1{,}52}$

M6. Väite $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$, $n = 1,2,3,\ldots$

Tod. 1° Alkuaskel $n = 1$: $1 = 1^2$ %. väite tosi arvolla 1

2° Induktio-oletus: oletetaan että väite on tosi jollakin arvolla n ts. $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$

3° Induktioaskel $n \to n+1$:

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2n-1)}_{=n^2} + (2(n+1)-1)$$

$$\overset{2^\circ}{=} n^2 + 2n + 2 - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \ \%$$

väite tosi arvolla $n+1$

1°–3° $\Rightarrow$ väite (induktioperiaate) m.o.t.

Huom. $1 \overset{+2}{+} 3 \overset{+2}{+} 5 + \ldots + (2n-1) = \frac{1+(2n-1)}{2} \cdot n = n \cdot n = n^2$

aritmeettinen summa

M9. Väite $7^n - 4$ on jaollinen luvulla 3 kun $n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$

Tod. 1° Alkuaskel $n = 0$: $7^0 - 4 = 1 - 4 = -3 = -1 \cdot 3$ %. väite tosi arvolla 0

2° Induktio-oletus: väite tosi arvolla n ts. $7^n - 4 = 3k \iff 7^n = 3k + 4$

3° Induktioaskel $n \to n+1$:

$$7^{n+1} - 4 = 7 \cdot 7^n - 4 \overset{2^\circ}{=} 7 \cdot (3k+4) - 4$$

$$= 21k + 28 - 4 = 21k - 24 = 3\underbrace{(3k-8)}_{\in \mathbb{Z}} \ \%$$

väite tosi arvolla $n+1$

1°–3° $\Rightarrow$ väite (induktioperiaate)