

# MAA11 Algoritmit ja Lukuteoria

1.1 A: "jäteli on tyyni", B: "lötöden reentuiltemään"  
 a)  $A \vee B$ : "jäteli on tyyni ja lötöden reentuiltemään."  
 b)  $\neg A \wedge \neg B$ : "jäteli ei ole tyyni eikä lötöde reentuiltemään."  
 c)  $\neg A \vee B$ : "jäteli ei ole tyyni tai lötöden reentuiltemään."

1.2 A: "jälöä reellä", B: "maayni leikkaa muumissa"  
 a)  $\neg A \vee B$ , b)  $A \vee B$ , c)  $\neg(A \vee B)$

1.3 A: "ki on jäteli", B: "veit ajaa pyörällä"  
 C: "jäteli on tyynä"  
 a)  $C \Rightarrow B$ : jos jäteli on tyynä, niin veit ajaa pyörällä.  
 b)  $A \Rightarrow \neg B$ : jos ki on jäteli, niin et veit ajaa pyörällä.  
 c)  $B \Leftrightarrow (\neg A \wedge C)$ : Veit ajaa pyörällä jos ja vain jos ki ei ole jäteli ja jäteli on tyynä.

1.4 A: "on perijälöi", B: "pyöräköri on köyvä"  
 C: "kallialla on pölypölyä"  
 a)  $A \wedge B \wedge C$ , b)  $(C \vee B) \Rightarrow A$ , c)  $(B \wedge C) \Leftrightarrow A$   
 d)  $(A \Rightarrow C) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$

2.4 a) 

A	B	$A \vee (B \Rightarrow A)$	$(A \vee B) \Rightarrow A$
1	1	1 (1V1)	1 (1⇒1)
1	0	1 (1V0)	1 (1⇒0)
0	1	0 (0V1)	0 (0⇒1)
0	0	1 (0V0)	1 (0⇒0)

Toumunkaulat ovat idontitiset.  
 b) A: "pidän sukista", B: "pidän pitsestä"  
 $A \vee (B \Rightarrow A)$ : Pidän sukista tai jos pidän pitsestä, niin pidän sukista.  
 $(A \vee B) \Rightarrow A$ : jos pidän sukista tai pitsestä, niin pidän sukista.

2.5 L: "nyplinen on lötödi selkäröinen"  
 O: "nyplinen on lötödi Oritis"  

L	O	$L \wedge (\neg L \Leftrightarrow O)$
1	1	0 (1∧0)
1	0	1 (1∧1) ←
0	1	0 (0∧1)
0	0	0 (0∧0)

Merko väestän lötödi on luotollana, on väestä toi. Siten byyressä on 2. väestöväi, jöten selkäröinen on nyplinen ja Oritis nyplis.

2.3 A: "duuo on ritari", B: "Pödi on ritari"  
 Pödi duuo  

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Leftrightarrow \neg B$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	0

⇒ 2. rivi ⇒ duuo on ritari ja Pödi on kalumi

2.14 A: "matrukolan jivallo", B: "otstolan väsäile"  
 A B  $A \Rightarrow B$   $A \Rightarrow \neg B$   $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$   

1	1	1	0	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	0

a) Ei matrukolan jivallo, väändä koussä ilän saava.  
 b) Uhoi jödiin väestöimur väälöän tölöllös, kun ei matrukolan jivallo ja otstolan väsäile.

P: "Pitöri on nyplis", T: "Touuo on nyplis"  
 a) Touuo: 

P	T	$T \vee \neg P$	$T \vee P$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	1	0

← ei köy (jöl on nyplinen)  
 ↓: nyplinen jukun totta

a) 2. tai 3. rivi ⇒ Touuo tai Pitöri on jpin nyplinen.  
 b) 3. tai 4. rivi ⇒ Pitöri on nyplinen, Touuo ei totta

A: "Rauli on lomalla", B: "Rauli on ulkomailla"  
 a) 

A	B	$(A \vee B) \vee \neg A$	$B \Rightarrow (\neg B \vee \neg A)$
1	1	1 (1V0)	0 (1⇒0)
1	0	1 (1V0)	1 (0⇒1)
0	1	1 (0V1)	1 (1⇒1)
0	0	1 (0V0)	1 (0⇒1)

a) saave on aiva toi ⇒ on tautologie  
 "Rauli on lomalla tai ulkomailla, tai Rauli ei ole lomalla"  
 b) saave ei ole aiva toi ⇒ ei ole tautologie  
 "jos Rauli on ulkomailla, niin Rauli ei ole ulkomailla tai ei ole lomalla."

3.4 

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
1	1	1	1 (1V0)
1	0	0	0 (0V0)
0	1	0	0 (0V0)
0	0	1	1 (0V1)

saaveilla on idontitiset toumunkaulat, jöten ne ovat loogisesti ekvivalentit.

3.6 A: "luumunua jötöä luntä", B: "luumunua on jössästä"  

A	B	$(A \vee B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$	$\neg B \vee (B \Rightarrow A)$	$(A \wedge B) \vee (A \Rightarrow \neg B)$
1	1	1 (1V0)	1 (0V1)	1 (1V0)
1	0	1 (1V0)	1 (1V0)	1 (0V1)
0	1	1 (0V1)	0 (0V0)	1 (0V1)
0	0	1 (0V0)	1 (0V1)	1 (0V1)

on ei on

3.14 H: "jölöin jöivöni on jössästä"  
 P: "tulöä köse on joutainan"  

H	P	$(H \Rightarrow P) \wedge (\neg H) \Rightarrow \neg P$
1	1	1 (0⇒0)
1	0	1 (0⇒1)
0	1	0 (1⇒0)
0	0	1 (1⇒1)

saave ei ole aiva toi, jöten saave ei ole tautologie.

3.16 A: "duuo on ritari", B: "Rauli on ritari"  

A	B	veestöimur	P
1	1	kyllä	1
1	0	ei	0
0	1	kyllä	0
0	0	ei	1

⇒ byyrymuri: Ollöä ritari ja jö veestöimur jö Rauli on ritari?



3.20 4: "tiedän olevani kunnollut", B: "olen kunnollut"

a)  $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A$   
 b)  $A \wedge B \quad (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A$

A	B	$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)$	$\Rightarrow \neg A$
1	1	$(0 \Rightarrow 0)$	1
1	0	$(0 \Rightarrow 0)$	1
0	1	$(1 \Rightarrow 1)$	1
0	0	$(1 \Rightarrow 1)$	1

Kause on aina totti, joten ajateltava on tautologia

4.3 a)  $17^2$   $\Rightarrow$  osamäärä: 2, jäsosjäännös: 7

$\Rightarrow$  jäsosjääntö: 27 = 2·10 + 7

b)  $\frac{305}{100}$   $\Rightarrow$  osamäärä: 3, jäsosjäännös: 5

$\Rightarrow$  jäsosjääntö: 305 = 3·100 + 5

c)  $\frac{9993}{1000}$   $\Rightarrow$  osamäärä: 9, jäsosjäännös: 999

$\Rightarrow$  jäsosjääntö: 9993 = 9·1000 + 999

4.5 a) 21 = 7·3      b) 43 = 14·3 + 1

c) -28 = -10·3 + 2      d) -44 = -15·3 + 1

4.8 Väite  $M(m^2+8)$  on jollain luonnolla 3 kun  $m \in \mathbb{Z}$

Tod.  $m$  on jätään neuvasta muotoista:

$1^0 m = 3k; m(m^2+8) = 3k(3k^2+8) \in \mathbb{Z}$  on jollain 3:lla

$2^0 m = 3k+1; m(m^2+8) = (3k+1)((3k+1)^2+8)$

$= (3k+1)(9k^2+6k+1+8) = (3k+1)(9k^2+6k+9)$

$= 3(3k+1)(3k^2+2k+3) \in \mathbb{Z}$  on jollain 3:lla

$3^0 m = 3k+2; m(m^2+8) = (3k+2)((3k+2)^2+8)$

$= (3k+2)(9k^2+12k+4+8) = (3k+2)(9k^2+12k+12)$

$= 3(3k+2)(3k^2+4k+4) \in \mathbb{Z}$  on jollain 3:lla

$1^0-3^0 \Rightarrow$  väite

4.9 arvot:  $k, k+1, k+2, k+3, k+4 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow k+(k+1)+(k+2)+(k+3)+(k+4) = 5k+10 = 5(k+2) \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$  on jollain 5:lla

4.12 a) 2020 = 4·505  $\Rightarrow$  on

b) 1958 = 4·499 + 2  $\Rightarrow$  ei

c) 1880 = 4·470  $\Rightarrow$  on

d) 1800 = 400·4 + 200  $\Rightarrow$  ei

e) 2000 = 400·5  $\Rightarrow$  on

4.17 Väite  $(m+1)^2 - (m-1)^2$  on jollain luonnolla 4,  $m \in \mathbb{Z}$

Tod.  $(m+1)^2 - (m-1)^2 = (m^2+2m+1) - (m^2-2m+1)$

$= 4m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  väite

5.1 a) 45 = 1·45 = 3·15 = 5·9

18 = 1·18 = 2·9 = 3·6

$\Rightarrow$  yhteiset tekijät: 1, 3, 9  $\Rightarrow$  ryf(45, 18) = 9

b) 48 = 1·48 = 2·24 = 3·16 = 4·12 = 6·8

24 = 1·24 = 2·12 = 3·8 = 4·6

$\Rightarrow$  yhteiset tekijät: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24  $\Rightarrow$  ryf = 24

c) 35 = 1·35 = 5·7

12 = 1·12 = 2·6 = 3·4  $\Rightarrow$  yhteiset tekijät: 1  $\Rightarrow$  ryf(35, 12) = 1

5.3 a)  $\frac{495}{364}$ : 495 = 1·364 + 131

364 = 2·131 + 102

131 = 1·102 + 29

102 = 3·29 + 15

23 = 1·15 + 14

15 = 1·14 + 1  $\Rightarrow$  ryf(495, 364) = 1

14 = 14·1

b)  $\frac{364}{495}$  ei voida myytää koska luonnolla ei ole yhteisiä tekijöitä (paitsi luvun 1)

5.5 a)  $\frac{56}{32}$ : 56 = 1·32 + 24

32 = 1·24 + 8  $\Rightarrow$  ryf(56, 32) = 8

24 = 3·8

$\frac{56 \cdot 32}{8} = \frac{56 \cdot 32}{8} = 224$

b)  $\frac{41}{56} = \frac{4}{224}$

$\frac{7}{32} = \frac{7}{224}$

$\frac{28}{16} = \frac{28}{16}$

$\frac{700}{16} = \frac{700}{16}$

$\frac{28}{16} = \frac{28}{16}$

$\frac{16}{16} = 1$

$\frac{12}{16} = 3 \cdot 4 \Rightarrow$  ryf(28, 16) = 4

$\frac{28 \cdot 16}{4} = 112$

112 min = 14,52 min  $\Rightarrow$  20 7:00 + 1,52 = 8,52

$a = k \cdot 378$

$a = m \cdot 180$

$\frac{378}{180} = \frac{378}{180} = 2 \cdot 180 + 18$

$180 = 10 \cdot 18$

$\frac{378 \cdot 180}{18} = \frac{378 \cdot 180}{18} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$

$\frac{378 \cdot 180}{180} = \frac{378 \cdot 180}{180} = 3780$