a) Lause ei ole aina tosi ⇒ lause ei ole tautologia
b), c) Lause on aina tosi → lause on tautologia

5!

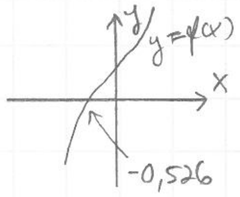
```
r = float(input("Anna ympyrän säde: "))
a = float(input("Anna neliön sivun pituus: "))
Ay = 3.14159 * r ** 2
An = a ** 2
print("Ympyrän pinta-ala on", round(Ay, 2))
print("Neliön pinta-ala on", round(An, 2))
if Ay > An:
    print("Ympyrän pinta-ala on isompi")
else:
    print("Neliön pinta-ala on isompi")
```

6. a) Vastaesimerkki: $1+2+3+4 = 10$ ei ole jaollinen luvulla 4 ⇒ ei ole

b) $1+2+3+4+5 = 15 = 3 \cdot 5$ %.
$7+8+9+10+11 = 45 = 9 \cdot 5$ %.
$-2+(-1)+0+1+2 = 0 = 0 \cdot 5$ %.
} voi olla tosi

Yleisesti: $k+(k+1)+(k+2)+(k+3)+(k+4) = 5k+10 = 5\overbrace{(k+2)}^{\in \mathbb{Z}}$ % on jaollinen luvulla 5 ⇒ on

6! $x^3+2 = x^2-3x \Leftrightarrow \underbrace{x^3-x^2+3x+2}_{=f(x)} = 0$, $f'(x) = 3x^2-2x+3$



$x_0 = 0$ Newton: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0,1,2,\ldots$

$x_1 \approx -0{,}666\ 666\ 666\ 666\ 67$
$x_2 \approx -0{,}535\ 947\ 712\ 418\ 29$
$x_3 \approx -0{,}526\ 010\ 033\ 999\ 19$
$x_4 \approx -0{,}525\ 957\ 482\ 107\ 68$
$x_5 \approx -0{,}525\ 957\ 480\ 649\ 31$
$x_6 \approx$ — ,, — ⇒ Vast. $x \approx -0{,}525\ 957$

7. Väite $(n^2+n)(n+2)$ on jaollinen luvulla 6 aina kun $n \in \mathbb{Z}$

Tod. n on jotakin seuraavista muodoista:

1° $n = 6k$: $(n^2+n)(n+2) = ((6k)^2+6k)(6k+2) = (36k^2+6k)(6k+2)$
$= 6(\underbrace{6k^2+k)(6k+2)}_{\in \mathbb{Z}}$ % on jaollinen 6:lla

2° $n = 6k+1$: $(n^2+n)(n+2) = \ldots = 6(2k+1)(3k+1)(6k+1)$ % —,,—

3° $n = 6k+2$: $(n^2+n)(n+2) = \ldots = 6 \cdot 2(2k+1)(3k+1)(3k+2)$ % —,,—

4° $n = 6k+3$: $(n^2+n)(n+2) = \ldots = 6(2k+1)(3k+2)(6k+5)$ —,,—

5° $n = 6k+4$: $(n^2+n)(n+2) = \ldots = 6 \cdot 2(k+1)(3k+2)(6k+5)$ —,,—

6° $n = 6k+5$: $(n^2+n)(n+2) = \ldots = 6(k+1)(6k+5)(6k+7)$

1°–6° ⇒ väite

TAI: 1° $n \equiv 0 \pmod 6$: $(n^2+n)(n+2) \equiv (0^2+0) \cdot (0+2) \equiv 0 \pmod 6$ %. on jaoll. 6:lla
2° $n \equiv 1 \pmod 6$: $(1^2+1) \cdot (1+2) \equiv 6 \equiv 0 \pmod 6$ %. on jaoll. 6:lla
3° $n \equiv 2 \pmod 6$: $(2^2+2)(2+2) \equiv 24 \equiv 0 \pmod 6$ %. —,,—
4° $n \equiv 3 \pmod 6$: $(3^2+3)(3+2) \equiv 60 \equiv 0 \pmod 6$ %. —,,—
5° $n \equiv 4 \pmod 6$: $(4^2+4)(4+2) \equiv 120 \equiv 0 \pmod 6$ %. —,,—
6° $n \equiv 5 \pmod 6$: $(5^2+5)(5+2) \equiv 210 \equiv 0 \pmod 6$ %. —,,—
1°–6° ⇒ väite

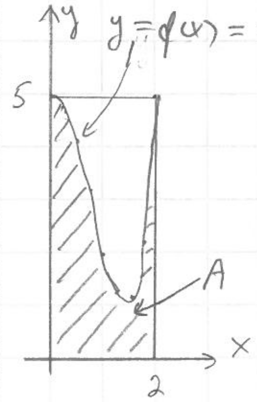
TAI: $(n^2+n)(n+2) = n(n+1)(n+2)$
Tulossa on 3 peräkkäistä kokonaislukua → luvuista ainakin yksi on jaollinen luvulla 2 (parillinen) ja täsmälleen yksi on jaollinen luvulla 3 → tulo on jaollinen luvuilla 2 ja 3, syt$(2,3) = 1$. Sovelletaan 10 jaollisuuslause ⇒ tulo on jaollinen luvulla $2 \cdot 3 = 6$

7! Väite $2^{2n}-1$ on jaollinen luvulla 3 kun $n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$

Tod. $2^{2n}-1 \overset{(*)}{\equiv} (-1)^{2n}-1 \equiv 1-1 \equiv 0 \pmod 3$ ⇒ väite (*) $2 \equiv -1 \pmod 3$

8. $8^{3400} + 7^{4513} = (8^{10})^{340} + 7 \cdot (7^4)^{1128} = 1\,073\,741\,824^{340} + 7 \cdot 2401^{1128}$
$\equiv 24^{340} + 7 \cdot 1^{1128} \pmod{100}$
$= (24^{10})^{34} + 7 = 63\,403\,380\,965\,376^{34} + 7$
$\equiv 76^{34} + 7 = (76^5)^6 \cdot 76^4 + 7$
$= 2\,535\,525\,376^6 \cdot 33\,362\,176 + 7$
$\equiv 76^6 \cdot 76 + 7 \pmod{100} \equiv 14\,645\,194\,571\,783 \pmod{100}$
⇒ kun annettu luku jaetaan luvulla 100, on jakojäännös 83 ⇒ loppu: 83

9.




```
n = int(input("Anna arvottavien pisteiden lukumäärä: "))
import random
alla = 0
for i in range(1, n+1):
    x = 2 * random.random()
    y = 5 * random.random()
    if y < x**4 - 4*x**2 + 3:
        alla = alla + 1
print("Käyrän f(x)=x^4-4x^2+5 alle tuli arvotuista", n,
"pisteestä", alla, "pistettä, joten pinta-ala on
noin", round(alla/n*10, 3))
```

Huom. Pinta-alan tarkka arvo (MAA7) $A = \int_0^2 f(x)\,dx = \frac{86}{15} \approx 5{,}733$