9'. $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$

a) $m = 252 \cdot k = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot k = t^2$, $k, t \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ luvussa t on vain alkulukutekijät 2, 3 ja 7 (jotta m mahd. pieni)

$\Rightarrow m = (2 \cdot 3 \cdot 7)^2 = 42^2 = \underline{1764} = 252 \cdot 7$

b) $m = 252 \cdot k$

$\frac{m}{20} = t^5 \quad | \cdot 20 \Leftrightarrow m = 20 \cdot t^5 = 2^2 \cdot 5 \cdot t^5 = 252k = 2^2 3^2 7 k \quad | : 2^2 \Leftrightarrow 5t^5 = 3^2 \cdot 7 \cdot k$

$\Rightarrow$ luvussa t on vain alkulukutekijät 3 ja 7

$\Rightarrow m = 2^2 \cdot 5 \cdot (3 \cdot 7)^5 = \underline{81\,682\,020} = 20 \cdot 21^5 = 252 \cdot (3^3 \cdot 5 \cdot 7^4) = 252 \cdot 324\,135$

---

10. 1° $m = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{s_t}$, missä luvut p_i ovat keskenään erisuuria alkulukuja ja $s_i \in \mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Kullakin luvun m tekijällä a_j on tekijänä vain kyseisiä alkulukuja p_i, siten että a_j:n tekijänä on $p_i^{r_i}$ missä $r_i \le s_i$. Koska syt$(a_i, a_j) = 1$, ei millään kahdella eri tekijällä a_i ole samoja alkulukutekijöitä. Siten m on jaollinen tulolle $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$

$\Rightarrow$ jaollisuuslause on tosi

2° $7m^2 \underbrace{(m^2-1)}_{(m-1)(m+1)} \underbrace{(m^2-4)}_{(m-2)(m+2)} = 7 \underbrace{(m-2)(m-1)m^2(m+1)(m+2)}$

Tulossa on 5 peräkkäistä kokonaislukua

$\rightarrow$ ainakin 2 niistä on jaollisia luvulla 2 (parillisia) joista toinen on myös jaollinen luvulla 4 (peräkkäiset parilliset luvut); luvuissa on kaksi luvulla 3 jaollista lukua ($m-2$ ja $m+1$ TAI $m-1$ ja $m+2$ TAI m ja m); luvuissa on täsmälleen yksi luvulla 5 jaollinen luku $\rightarrow$ lauseke on jaollinen luvuille 7, $2 \cdot 4 = 8$, $3 \cdot 3 = 9$, 5. Kyseisillä luvuilla ei ole pareittain yhteisiä tekijöitä: syt$(7,8)$ = syt$(7,9)$ = syt$(7,5)$ = syt$(8,9)$ = syt$(8,5)$ = syt$(9,5) = 1$

Jaollisuuslauseen (todistus kohdassa 1°) mukaan lauseke on jaollinen luvulla $7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 5 = 2520 \Rightarrow$ väite

---

8'. a) $2^{m+1} - 1 = 2(2^m - 1) + \underline{1} \quad \Rightarrow$ syt$(2^{m+1} - 1, 2^m - 1) = \underline{1}$

$2^m - 1 = (2^m - 1) \cdot 1$

b) $2^{m+2} - 1 = 2^2 \cdot (2^m - 1) + 3$

syt$(2^{m+2} - 1, 2^m - 1)$ on luvun 3 tekijä $\Rightarrow$ syt on joko 1 tai $\underline{3}$

m	1	2	3	4	5	6	7	
2^m-1	1	3	7	15	31	63	127	...
$2^{m+2}-1$	7	15	31	63	128	255	511	
3 on tekijä	ei	on	ei	on	ei	on	ei	

<u>Väite</u> 3 on luvun $2^m - 1$ tekijä $\Leftrightarrow m$ on parillinen

<u>Tod.</u> $2^m - 1 \equiv (-1)^m - 1 \begin{cases} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod 3 & , m \text{ parillinen} \\ \equiv -1 - 1 = -2 \equiv 1 \pmod 3 & , m \text{ pariton} \end{cases}$

MAA 11 27.5.2024

1. A: "Olen opiskellut ahkerasti", B: "koe on helppo", C: "saan kurssista hyvän arvosanan"

a) $(A \wedge B) \Rightarrow C$, b) $(\neg B \wedge C) \Rightarrow A$, c) $(\neg C \wedge A) \Rightarrow \neg B$

---

2. 1.9.1939 $\rightarrow$ 1.9.2024 (sunnuntai) : täysiä vuosia 85

karkauspäiviä : 22 (1940, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92, 96, 00, 04, 08, 12, 16, 20, 24)

$\Rightarrow$ päiviä : $85 \cdot 365 + 22 = 31\,047 = 4435 \cdot 7 + 2$

$\Rightarrow$ viikonpäivä on siirtynyt 2 päivää $\Rightarrow$ <u>1.9.1939 oli perjantai</u>

---

3. a)

$\frac{25\,200}{7020}$: $25\,200 = 3 \cdot 7020 + 4140$

$\frac{7020}{4140}$: $7020 = 1 \cdot 4140 + 2880$

$\frac{4140}{2880}$: $4140 = 1 \cdot 2880 + 1260$

$\frac{2880}{1260}$: $2880 = 2 \cdot 1260 + 360$

$\frac{1260}{360}$: $1260 = 3 \cdot 360 + 180$

$\frac{360}{180}$: $360 = 2 \cdot 180$

$\Rightarrow \underline{\text{syt}(25\,200, 7020) = 180}$

$\underline{\text{pyj}(25200, 7020)} = \frac{25200 \cdot 7020}{\text{syt}(25200, 7020)} = \frac{25200 \cdot 7020}{180} = \underline{982\,800}$

b) $25\,200 = \underline{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}$

$7020 = \underline{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 13}$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{syt}(25\,200, 7020) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = \underline{180} \\ \text{pyj}(25\,200, 7020) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 = \underline{982\,800} \end{cases}$

---

4. A: "Ari on syytön", B: "Bengt on syytön", C: "Calle on syytön"

A	B	C	$(A \vee \neg B) \Rightarrow \neg C$		$A \Rightarrow C$	
1	1	1	0	$(1 \Rightarrow 0)$	1	
1	1	0	1	$(1 \Rightarrow 1)$	0	
1	0	1	0	$(1 \Rightarrow 0)$	1	
1	0	0	1	$(1 \Rightarrow 1)$	0	
0	1	1	1	$(0 \Rightarrow 0)$	1	$\leftarrow$
0	1	0	1	$(0 \Rightarrow 1)$	1	$\leftarrow$
0	0	1	0	$(1 \Rightarrow 0)$	1	
0	0	0	1	$(1 \Rightarrow 1)$	1	$\leftarrow$

Koska todistajat ovat luotettavia, on lausuntojen oltava tosia $\Rightarrow$ 5., 6. tai 8. rivi. Koska Ari ja Calle eivät rötöstele yhdessä, ei 6. tai 8. rivi käy $\Rightarrow$ 5. rivi

<u>Vast.</u> <u>Ari on syyllinen ja Bengt ja Calle ovat syyttömiä</u>

4'. Parittomat peräkkäiset kokonaisluvut : $2k+1$ ja $2k+3$

$\Rightarrow (2k+1)(2k+3) + 1 = (4k^2 + 6k + 2k + 3) + 1 = 4k^2 + 8k + 4$

$= 4\underbrace{(k^2 + 2k + 1)}_{\in \mathbb{Z}}$ %. on jaollinen luvulla 4 $\Rightarrow$ väite

---

5. K: "on kunnetta", A: "on äitiharhoja"

K	A	a) $(K \vee \neg A) \Rightarrow (A \vee \neg K)$		b) $(K \wedge A) \Rightarrow (A \vee \neg K)$		c) $K \vee (A \Rightarrow \neg K)$	
1	1	1	$(1 \Rightarrow 1)$	1	$(1 \Rightarrow 1)$	1	$(1 \vee 0)$
1	0	0	$(1 \Rightarrow 0)$	1	$(0 \Rightarrow 0)$	1	$(1 \vee 1)$
0	1	1	$(0 \Rightarrow 1)$	1	$(0 \Rightarrow 1)$	1	$(0 \vee 1)$
0	0	1	$(1 \Rightarrow 1)$	1	$(0 \Rightarrow 1)$	1	$(0 \vee 1)$