$\Rightarrow a + b = nc + b = kc$

$\Leftrightarrow b = kc - nc = c\underbrace{(k-n)}_{\in \mathbb{Z}} \Rightarrow c \mid b$ ↯

$\Rightarrow$ vastaväite on epätosi $\Rightarrow$ väite on tosi

Jakoyhtälö $\frac{a}{b} \Rightarrow a = bk + r, \quad 0 \le r < b$

$\Rightarrow$ jokainen kokonaisluku $a \in \mathbb{Z}$ on jotakin seuraavista muodoista:

$bk, \; bk+1, \; bk+2, \ldots, \; bk + (b-1) \qquad (k \in \mathbb{Z})$

Esim. $b = 2 \Rightarrow$ kaikki kokonaisluvut ovat muotoa $\underset{\text{parillinen}}{2k}$ tai $\underset{\text{pariton}}{2k+1}$

$b = 3 \Rightarrow$ — " — $3k, \; 3k+1$ tai $3k+2$

Esim. Onko $n^3 - n \; (n \in \mathbb{Z})$ aina jaollinen luvulla 3 ?

Ratk.

$0^3 - 0 = 0 = 0 \cdot 3$ %

$1^3 - 1 = 0 = 0 \cdot 3$ %

$2^3 - 2 = 6 = 2 \cdot 3$ %

$3^3 - 3 = 24 = 8 \cdot 3$ %

$(-2)^3 - (-2) = -8 + 2 = -6 = -2 \cdot 3$ %

$\vdots$

$\Rightarrow$ on ehkä jaollinen 3:lla aina

n on jotakin seuraavista muodoista:

$1^\circ \; \underset{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \ldots}{n = 3k} : n^3 - n = (3k)^3 - 3k = 27k^3 - 3k = 3\underbrace{(9k^3 - k)}_{\in \mathbb{Z}}$ % on jaollinen 3:lla

$2^\circ \; \underset{1, 4, 7, 10, \ldots, -2, -5, \ldots}{n = 3k+1} : n^3 - n = (3k+1)^3 - (3k+1) = (3k+1)(3k+1)^2 - (3k+1)$

$= (3k+1)(9k^2 + 6k + 1) - (3k+1)$

$= 27k^3 + 18k^2 + 3k + 9k^2 + 6k + 1 - 3k - 1$

$= 27k^3 + 27k^2 + 6k = 3\underbrace{(9k^3 + 9k^2 + 2k)}_{\in \mathbb{Z}}$ % on jaollinen 3:lla

$3^\circ \; \underset{2, 5, 8, \ldots, -1, -4, \ldots}{n = 3k+2} : n^3 - n = (3k+2)^3 - (3k+2) = (3k+2)(3k+2)^2 - (3k+2)$

$= (3k+2)(9k^2 + 12k + 4) - (3k+2)$

$= \ldots = 27k^3 + 54k^2 + 33k + 6$

$= 3\underbrace{(9k^3 + 18k^2 + 11k + 2)}_{\in \mathbb{Z}}$ % on jaollinen 3:lle

$1^\circ - 3^\circ \Rightarrow$ on jaollinen luvulla 3 aina

TAI: $n^3 - n = n(n^2 - 1^2) = n(n-1)(n+1)$

3 peräkkäistä kokonaislukua → täsmälleen yksi niistä on jaollinen 3:lla → tulo on jaollinen 3:lla