→ tulo on jaollinen luvulla $2 \cdot 4 = 8$

<u>Lause</u> Alkulukuja on ääretön määrä.

<u>Tod.</u> Vastaväite: alkulukuja on äärellinen määrä: m kpl

$$\Rightarrow p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m \quad \leftarrow \text{isoin alkuluku}$$

$$\Rightarrow a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_m + 1$$

$a > p_m \Rightarrow a$ ei voi olla alkuluku

$$\Rightarrow a = k \cdot p_i$$

$$\Rightarrow k \cdot p_i = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m + 1$$

$$\Leftrightarrow k \cdot p_i - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m = 1 \qquad \text{puuttuu } p_i$$

$$\Leftrightarrow p_i \underbrace{(k - p_1 \cdot p_2 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_m)}_{\in \mathbb{Z}} = 1 \quad ↯$$

alkuluku · kokonaisluku ei voi olla 1

$\Rightarrow$ vastaväite on epätosi $\Rightarrow$ väite tosi

<u>Esim.</u> Määritä

a) pienin kokonaisluku jolla on tekijänä luku 75600 ja joka on kokonaisluvun neliö,

b) suurin kokonaisluku joka on luvun 75600 tekijä ja joka on kokonaisluvun neliö.

<u>Ratk.</u> $75600 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$

a) Että saataisiin kokonaisluvun neliö, on alkulukujen eksponenttien oltava parillisia. Jotta saataisiin mahd. pieni luku, on 75600 kerrottava luvulla $3 \cdot 7 = 21$:

$$\underbrace{3 \cdot 7 \cdot 75600}_{1\,587\,600} = 3 \cdot 7 \cdot 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = (\underbrace{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}_{\in \mathbb{Z}})^2$$

TAI: Systemaattisella kokeilulla

$$\sqrt{75600} \notin \mathbb{Z}$$
$$\sqrt{2 \cdot 75600} \notin \mathbb{Z}$$
$$\sqrt{3 \cdot 75600} \notin \mathbb{Z}$$
$$\vdots$$
$$\sqrt{21 \cdot 75600} \in \mathbb{Z} \quad !$$