Esim. Osoita että $3^4 \cdot 5^6 \cdot 11^2$ on kokonaisluvun neliö.

Ratk. $3^4 \cdot 5^6 \cdot 11^2 = (3^2 \cdot 5^3 \cdot 11)^2 = 12\,375^2$

Yleisesti: Kokonaisluku n on kokonaisluvun neliö (k:n potenssi)
$\Leftrightarrow$ luvun n alkulukuhajotelmassa jokaisen alkuluvun eksponentti on parillinen (jaollinen luvulla k)

7.10 $2 \cdot 3^{11} \cdot 4^5 \cdot 6^9 = 2 \cdot 3^{11} \cdot (2^2)^5 \cdot (2\cdot 3)^9$
$= 2 \cdot 3^{11} \cdot 2^{10} \cdot 2^9 \cdot 3^9 = 2^{20} \cdot 3^{20}$
$= (2^{10} \cdot 3^{10})^2 = 60\,466\,176^2$

Esim. Määritä pienin kokonaisluku $m > 1$ joka on sekä kokonaisluvun neliö että kuutio.

Ratk. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Luvussa } m \text{ on oltava ainakin yksi alkulukutekijä} \\ m \text{ oltava niin pieni kuin mahdollista} \end{array} \right.$
$\Rightarrow$ m:ssä on tekijänä pelkästään alkuluku 2 $\Rightarrow m = 2^t$, $t \in \mathbb{Z}_+$
$\left. \begin{array}{l} m \text{ on mahd. pieni} \\ t \text{ on jaollinen 2:lla ja 3:lla} \end{array} \right\} \Rightarrow m = 2^6 = 64$
Siis $m = 2^6 = 64 = \underbrace{(2^3)^2}_{8^2} = \underbrace{(2^2)^3}_{4^3}$

TAI: Systemaattisella kokeilulla (esim. geogebralla)

$m=2$	$\underbrace{(\sqrt{2})^2}_{\notin \mathbb{Z}}$	$\underbrace{(\sqrt[3]{2})^3}_{\notin \mathbb{Z}}$
$m=3$	$\underbrace{(\sqrt{3})^2}_{\notin \mathbb{Z}}$	$\underbrace{(\sqrt[3]{3})^3}_{\notin \mathbb{Z}}$
$m=4$	2^2 ✓	$\underbrace{(\sqrt[3]{4})^3}_{\notin \mathbb{Z}}$
⋮	⋮	
$m=64$	8^2 ✓	4^3 ✓

7.11 Väite: $p^2 - 1$ on jaollinen luvulla 4 kun $p \geq 3$ on alkuluku

Tod. $p^2 - 1^2 = (p-1)(p+1)$

parillisia koska p alkulukuna (≥ 3) pariton

$= 2l \cdot 2k = 4 \cdot \underbrace{lk}_{\in \mathbb{Z}}$ ✓ on jaollinen luvulla 4

m.o.t.

Huom. $p-1$ ja $p+1$ ovat 2 peräkkäistä parillista lukua
$\rightarrow$ jompi kumpi niistä on jaollinen 4:llä