Huom. Koska $10 \equiv 1 \pmod 9$ pätee vastaava tulos myös luvulle 9 jaollisuuteen.

6.18 a) $99^{2019} \equiv (-1)^{2019}$

$= -1$

$\equiv 99 \pmod{100}$

$\Rightarrow$ loppu: $\underline{99}$

$571023 \equiv 23 \pmod{100}$

$5710 \cdot 100 + 23 \qquad 0 \cdot 100 + 23$

b) $51^{2018} = \underbrace{51 \cdot 51}_{2601} \cdot \underbrace{51 \cdot 51}_{2601} \cdot 51 \cdot \ldots \cdot 51$

$= (51^2)^{1009} = 2601^{1009} \equiv 1^{1009} = 1 \pmod{100}$

$\Rightarrow$ jakojäännös luvulla 100 jaettaessa $= 1$

$\Rightarrow 51^{2018} = k \cdot 100 + 1 = \ldots \underline{01}$

6.22 Väite $16 \cdot 7^{2n} - 28 \cdot 3^{2n+3}$ on jaollinen luvulla 5 kun $n \in \underbrace{\mathbb{Z}_+}_{=\{1,2,3,\ldots\}}$

Tod. $16 \cdot 7^{2n} - 28 \cdot 3^{2n+3} = 16 \cdot (7^2)^n - 28 \cdot 3^{2n} \cdot 3^3$

$= 16 \cdot (7^2)^n - 28 \cdot (3^2)^n \cdot 27$

$= 16 \cdot 49^n - 28 \cdot 9^n \cdot 27$

$\overset{*}{\equiv} 1 \cdot (-1)^n - 3 \cdot (-1)^n \cdot 2 \pmod 5$

$= (-1)^n - 6 \cdot (-1)^n$

$\overset{*}{\equiv} (-1)^n - 1 \cdot (-1)^n \pmod 5$

$\equiv 0 \pmod 5$

$\Rightarrow$ väite

* $16 \equiv 1$, $49 \equiv -1$, $28 \equiv 3$, $9 \equiv -1$, $27 \equiv 2 \pmod 5$

* $6 \equiv 1 \pmod 5$

6.12 Väite $n^5 - n$ on jaollinen luvulla 5, $n \in \mathbb{Z}$

Tod. T n on jotakin seuraavista muodoista

1° $n = 5k$: $n^5 - n = (5k)^5 - 5k = 5^5 k^5 - 5k = 5\underbrace{(5^4 k^5 - k)}_{\in \mathbb{Z}}$ % on jaollinen 5:llä

2° $n = 5k+1$: $n^5 - n = \ldots = 5 \cdot \underbrace{(\quad)}_{\in \mathbb{Z}}$ % — " —

⋮

5° $n = 5k+4$: $n^5 - n = \ldots = 5\underbrace{(\quad)}_{\in \mathbb{Z}}$ % — " —

1°–5° $\Rightarrow$ väite