3° $n = 3k+2$: $n^3 - n = (3k+2)^3 - (3k+2)$

$= (3k+2)(3k+2)^2 - (3k+2)$

$= \ldots = 27k^3 + 54k^2 + 33k + 6$

$= 3\underbrace{(9k^3 + 18k^2 + 11k + 2)}_{\in \mathbb{Z}}$ $\vdots$ on jaollinen 3:lla

$1^\circ - 3^\circ \Rightarrow$ väite

「TAI: $n^3 - n = n(n^2 - 1^{\,2}) = n(n-1)(n+1)$

↑

3 peräkkäistä kokonaisluvun $\rightarrow$ tämän joukossa on jaollinen luvulla 3

$\rightarrow$ tulo on jaollinen luvulla 3 $\Rightarrow$ väite」

4.16 Väite $n(n+1)(2n+1)$ on jaollinen luvulla 6, $n \in \mathbb{Z}$

Tod. n on jotakin seuraavista muodoista:

1° $n = 6k$: $n(n+1)(2n+1) = \underbrace{6k(6k+1)(2\cdot 6k+1)}_{\in \mathbb{Z}}$ $\vdots$ on 6:lla jaollinen

2° $n = 6k+1$: $n(n+1)(2n+1) = (6k+1)(6k+1+1)(2(6k+1)+1)$

$= (6k+1)\underbrace{(6k+2)}_{2(3k+1)}\underbrace{(12k+3)}_{3(4k+1)}$

$= 6\underbrace{(6k+1)(3k+1)(4k+1)}_{\in \mathbb{Z}}$ $\vdots$ on 6:lla jaollinen

3° $n = 6k+2$: $n(n+1)(2n+1) = (6k+2)(6k+2+1)(2(6k+2)+1)$

$= \underbrace{(6k+2)}_{2(3k+1)}\underbrace{(6k+3)}_{3(2k+1)}(12k+5)$

$= 6\underbrace{(3k+1)(2k+1)(12k+5)}_{\in \mathbb{Z}}$ $\vdots$ on 6:lla jaollinen

4° $n = 6k+3$: $n(n+1)(2n+1) = (6k+3)(6k+3+1)(2(6k+3)+1)$

$= \underbrace{(6k+3)}_{3(2k+1)}(6k+4)\underbrace{(12k+7)}_{2(3k+2)}$

$= 6\underbrace{(2k+1)(3k+2)(12k+7)}_{\in \mathbb{Z}}$ $\vdots$ on 6:lla jaollinen

5° $n = 6k+4$: $n(n+1)(2n+1)$ ...

6° $n = 6k+5$: $n(n+1)(2n+1)$ ...

$1^\circ - 6^\circ \Rightarrow$ väite