MAY01

Luvut ja yhtälöt

Iitin lukio

2023-2024

Aleksi Alenius

Sisältö

1. Lukujoukot
- Kokonaisluvut
  - Laskusäännöt
- Rationaali- ja reaaliluvut

2. Yhtälöitä
- Ensimmäisen asteen yhtälö
- 1. asteen yhtälöpari

3. Potenssit ja juuret
- Motivaatio
- Potenssien laskusäännöt
- Erikoiset eksponentit
- Neliöjuuri
- Kuutiojuuri

4. Funktio
- Funktion kuvaaja

5. Prosenttilaskenta
- Prosentti
- Muutos- ja vertailuprosentti
- Muuttunut arvo

6. Verrannollisuus
- Suoraan verrannollisuus
- Kääntäen verrannollisuus

Lukujoukot

Kokonaisluvut

Luonnolliset luvut $\mathbb{N}$

Luonnolliset luvut ovat lukumäärää ilmaisevat luvut:

$$0, 1, 2, 3, ...$$

Määritelmä

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Kokonaisluvut $\mathbb{Z}$

Kokonaisluvut ovat luvut:

$$... - 2, -1, 0, 1, 2, ...$$

Määritelmä

$$\mathbb{Z} = \{... - 2, -1, 0, 1, 2, ...\}.$$

Vastaluku

Lukuja, joiden summa on 0, kutsutaan vastaluvuiksi.
Luvun a vastaluku on $-a$.

Esimerkki

Luvun -7 vastaluku on $-(-7) = 7$, koska

$$-7-(-7) = -7+7 = 0.$$

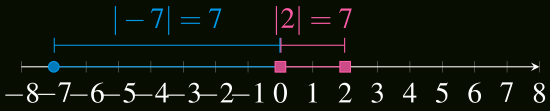
Itseisarvo

Luvun a itseisarvo $|a|$ on sen etäisyys nollasta.

Esimerkki

$$|2| = 2$$

$$|-7| = 7$$



Laskulait

Kokonaislukujen yhteen- ja kertolaskuille pätevät seuraavat lait:

1. Vaihdantalaki:

$$a+b=b+a$$

2. Liitäntälaki:

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

3. Osittelulaki:

$$a(b+c)=ab+ac$$

Merkkisäännöt

$$1 \cdot 1 = 1$$
$$1 \cdot (-1) = -1$$
$$-1 \cdot (-1) = 1$$

Laskujärjestys

1. Sulut
2. Potenssit ja juuret
3. Kerto- ja jakolasku
4. Yhteen- ja vähennyslasku

Huom.

Jakolaskuissa suositaan murtoviivamerkintää $\frac{a}{b}$ sekaannusten välttämiseksi.

Rationaali- ja reaaliluvut

Rationaaliluvut $\mathbb{Q}$

Määritelmä

Rationaaliluvut ovat lukuja, jotka voidaan esittää muodossa:

$$\frac{a}{b},$$

missä a ja b ovat kokonaislukuja ($a, b \in \mathbb{Z}$). Joukkomerkintänä:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

Esimerkki

$$\frac{1}{4} = 0,25$$

$$-\frac{213}{52} = -0,4961\ldots$$

Reaaliluvut $\mathbb{R}$

Määritelmä (Irrationaaliluvut)

Irrationaaliluvut ovat nimensä mukaisesti lukusuoran lukuja, jotka eivät ole rationaalilukuja. Esimerkkeinä $\sqrt{2}$ ja π.

Määritelmä (Reaaliluvut)

Reaaliluvut muodostuvat kaikista rationaali- ja irrationaaliluvuista.

Käänteisluvut

Kokonaisluvun ja sen vastaluvun summa on nolla. Vastaavasti:

Määritelmä (Käänteisluku)

Olkoot a reaaliluku. Luvun a käänteisluku on luku $\frac{1}{a} = a^{-1}$, jolle pätee:

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

Esimerkki

Luvun 3 käänteisluku on luku $\frac{1}{3}$, koska

$$3 \cdot \frac{1}{3} = 1.$$

Huom. $\frac{1}{3} = 3^{-1}$.

Yhtälöitä

Ensimmäisen asteen yhtälö

Yhtälö

Määritelmä

Yhtälö on kahden lausekkeen merkitty yhtäsuuruus.

Määritelmä (1. asteen yhtälö)

Ensimmäisen asteen yhtälö on yhtälö, jossa muuttujien korkein asteluku (potenssi) on 1.

Esimerkki

1. asteen yhtälöitä:

$$
\begin{aligned}
x &= 3 \\
x - 10 &= 14 \\
x + y - 5 &= 0 \\
x + 2z &= y - 10
\end{aligned}
$$

Yhtälön säilyvyys

Seuraavat toiminnot säilyttävät yhtäsuuruuden:

1. puolten vaihto
$$x = y \iff y = x$$
2. luvun lisääminen kummallekin puolelle
$$\begin{aligned} x &= y \,| + a \\ x + a &= y + a \end{aligned}$$
3. puolien kertominen samalla luvulla
$$\begin{aligned} x &= y \,| \cdot a \\ ax &= ay \end{aligned}$$

Esimerkki

Ratkaistaan yhtälö:

$$
\begin{aligned}
5x+9 &= 8x-3 && \mid -5x \\
5x+9-5x &= 8x-3-5x && \\
9 &= 3x-3 && \mid +3 \\
9+3 &= 3x-3+3 && \\
12 &= 3x && \mid \cdot \frac{1}{3} \\
\frac{12}{3} &= \frac{3x}{3} && \\
4 &= x && (puoltenvaihto) \\
x &= 4 &&
\end{aligned}
$$

1. asteen yhtälöpari

Yhtälöpari

Määritelmä

Yhtälöpari muodostuu kahdesta yhtälöstä, joissa on yksi tai useampi muuttuja. Yhtälöissä esiintyvät muuttujat toteuttavat molemmat yhtälöt. Yhtälöt merkitään yhtälöpariksi aaltosululla.

Esimerkki

Yhtälöiden $x+y=2$ ja $x-y=0$ muodostamaa yhtälöparia merkitään:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-2y=0 \end{cases}$$

Yhteenlaskumenetelmä

Yhtälöparin ratkaisuun on useampi menetelmä. Yhteenlaskumenetelmässä molempien yhtälöiden molemmat puolet lasketaan yhteen.

Esimerkki

Ratkaistaan aiemmin esitetty yhtälöpari yhteenlaskumenetelmällä.

$$\begin{cases} x+y=3 \mid \cdot 2 \\ x-2y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+2y=6 \\ x-2y=0 \end{cases}$$

$$3x=6 \mid \cdot \frac{1}{3}$$

$$x=2$$

Koska $x+y=3$, niin $2+y=3$ eli $y=1$.

Sijoitusmenetelmä

Sijoitusmenetelmässä ensin ratkaistaan yksi muuttuja toisen suhteen. Sitten tämä "ratkaisu"sijoitetaan toiseen yhtälöön.

Esimerkki

Ratkaistaan aiempi yhtälöpari sijoitusmenetelmällä. Toisesta yhtälöstä on helppo ratkaista x, joten

$$\begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ x &= 2y \end{aligned}$$

Sijoitetaan tämä ensimmäiseen yhtälöön:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2y + y &= 3 \\ 3y &= 3 \,|\, : 3 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Nyt, koska $x = 2y$, niin $x = 2$.

Potenssit ja juuret

Motivaatio

Potenssi

Kertolasku on yksinkertaisempi tapa kirjoittaa pitkä yhteenlasku.

Esimerkki

$$\underbrace{2+2+2+2+2}_{5} = 5 \cdot 2$$

Olisi kätevää olla vastaavanlainen työkalu myös pitkiä kertolaskuja (esim. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$) varten.

Potenssi

Määritelmä

Olkoot a reaaliluku ja n positiivinen kokonaisluku eli $a \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{Z}^+$. Luvun a n:s potenssi on luku a^n ja sen määritelmä on:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ kappaletta}}$$

Yläindeksin lukua n kutsutaan eksponentiksi.

Esimerkki

Luvun 2 viides potenssi on 2^5, mikä voidaan kirjoittaa muodossa:

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32.$$

Kymmenen potenssit

Kymmenen eri potensseja tutkimalla huomataan, että:

$$
\begin{aligned}
10^1 &= 10 \\
10^2 &= 100 \\
10^3 &= 1\,000 \\
&\vdots \\
10^6 &= 1\,000\,000 \\
&\vdots \\
10^9 &= 1\,000\,000\,000 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Kymmenpotenssimuoto

Isot luvut voidaan siis tarvittaessa esittää kymmenen potenssien avulla ns. kymmenpotenssimuodossa.

Määritelmä

Luvun kymmenpotenssimuoto on

$$a \cdot 10^n,$$

missä eksponentti n on kokonaisluku ja luku a on useimmiten väliltä $1 \leq |a| \leq 10$.

Esimerkki

$$4\,538\,102 \approx 4\,500\,000 = 4{,}5 \cdot 10^6$$

Potenssien laskusäännöt

Potenssien tulo

Olkoot a reaaliluku. Huomataan, että

$$a^2 \cdot a^5 = \underbrace{a \cdot a}_{2\text{ kpl.}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{5\text{ kpl.}} = a^7$$

Tästä voidaan päätellä tulos

Lause (Samankantaisten potenssien tulo)

Reaaliluvun a positiivisille kokonaislukupotensseille m ja n pätee

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Samankantaisten potenssien osamäärä

Entä jakolasku?

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = \frac{a \cdot a \cdot a}{1} = a^3.$$

Lause

Reaaliluvun a positiivisille kokonaislukupotensseille m ja n pätee

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Tulon potenssi

Entä, jos korotetaan kahden reaaliluvun a ja b tulo potenssiin 3?

$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a^3 b^3.$$

Lause

Reaalilukujen a ja b osamäärä korotettuna potenssiin n on

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Koska jakolasku on vain murtoluvulla kertomista, niin tästä seuraa:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Potenssin potenssi

Mitä, jos korotetaan reaaliluvun a toinen potenssi kolmanteen potenssin?

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^{3 \cdot 2} = a^6.$$

Lause

Reaaliluvun a potenssin m potenssi n on

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Erikoiset eksponentit

Nolla eksponenttina

Toistaiseksi olemme käyttäneet eksponenttina vain positiviisia kokonaislukuja. Mitä jos reaaliluvun a eksponentti on nolla?

$$a^0 = a^{1-1} = \frac{a^1}{a^1} = 1$$

Lause

Kaikilla reaaliluvuilla a:

$$a^0 = 1$$

Negatiivinen eksponentti

Tutkitaan luvun 2 eri potensseja:

$$
\begin{aligned}
2^2 &= 2 \cdot 2 = 4 \\
2^1 &= 2 \\
2^0 &= 1 \\
2^{-1} &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Sama tulos voidaan päätellä nollaeksponentin avulla:

$$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

Laskusäännöt

Lause

Olkoot $a \neq 0$ ja n positiivinen kokonaisluku. Tällöin

- $$a^0 = 1$$
- $$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
- *Erityisesti* $a^{-1} = \frac{1}{a}$ *on luvun* a *käänteisluku.*

Kymmenpotenssimuoto

Aiemmin huomattiin, että isot luvut on mahdollista esittää kymmenpotenssimuodossa $a \cdot 10^n$. Laajennetaan tätä käsitettä pieniin lukuihin. Kymmenen negatiiviset potenssit ovat

$$
\begin{aligned}
10^{-1} &= \frac{1}{10} = 0,1 \\
10^{-2} &= \frac{1}{100} = 0,01 \\
&\vdots \\
10^{-n} &= \frac{1}{1\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ kpl.}}} = \underbrace{0,0\ldots0}_{n\text{ kpl.}}1
\end{aligned}
$$

Esimerkki

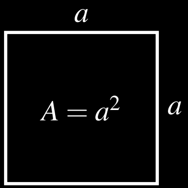
Luvun $0,001\,57$ kymmenpotenssimuoto on $1,57 \cdot 10^{-3}$, koska $0,00157 = \frac{1,57}{1\,000}$.

Neliöjuuri

Neliö

Muistetaan, että reaaliluvun a neliö on sen toinen potenssi

$$a^2$$



Jos neliön pinta-ala on 25 m², niin mikä on sen sivun pituus?

Neliöjuuri

Määritelmä

Reaaliluvun a neliöjuuri on se positiivinen luku $\sqrt{a}$, jonka toinen potenssi on a.

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Jos joillakin reaaliluvuilla a ja b pätee $a^2 = b$, niin

$$a = \pm\sqrt{b}.$$

Neliöjuuren alla olevaa lukua kutsutaan *juurrettavaksi*.

Huom.

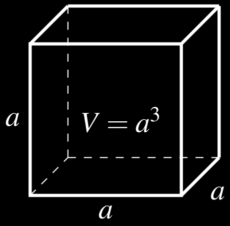
Koska $a^2 \geq 0$ kaikilla reaaliluvuilla a, niin neliöjuuri $\sqrt{b}$ on olemassa vain, jos $b \geq 0$.

Kuutiojuuri

Kuutio

Muistetaan, että reaaliluvun a kuutio on sen kolmas potenssi

$$a^3$$



Jos kuution tilavuus on 8 m^3 , niin mikä on sen sivun pituus?

Kuutiojuuri

Määritelmä

Luvun a kuutiojuuri on se luku $\sqrt[3]{a}$, jonka kolmas potenssi on a eli

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a.$$

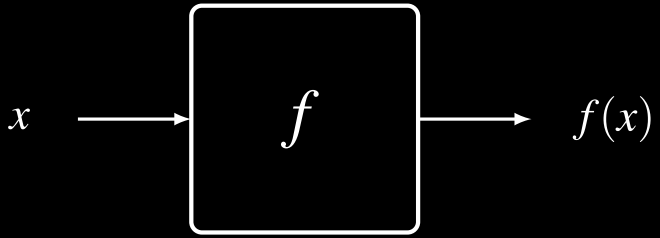
Jos $a^3 = b$, niin $a = \sqrt[3]{b}$.

Huom.

Koska $(-a)^3 = (-a)(-a)(-a) = -a^3$, niin kuutiojuuren voi ottaa myös negatiivisista luvuista.

Funktio

Funktio



Määritelmä

Funktio eli kuvaus f on yksikäsitteinen sääntö, joka liittää jokaiseen määrittelyjoukon alkioon x täsmälleen yhden maalijoukon alkion $f(x)$, jota kutsutaan funktion arvoksi kohdassa x.

Huom.

Tällä kurssilla funktioina käytetään ainoastaan reaalifunktioita. Funktion määritelmä ei kuitenkaan rajoitu vain reaalilukuihin.

Esimerkki

Olkoot funktio $f(x) = 2x + 1$. Tällöin funktion

- nimi on f
- muuttuja on x ja
- lauseke (eli sääntö) on $2x + 1$

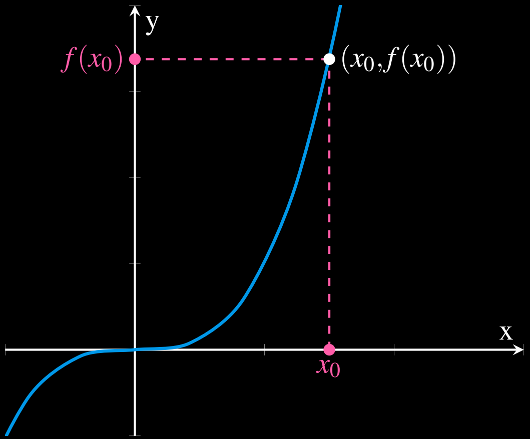
Funktion arvo kohdassa $x = 2$ ratkaistaan sijoittamalla kohdan arvo muuttujan x tilalle.

$$f(x) = 2x + 1$$
$$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

Sanotaan, että funktion f arvo kohdassa $x = 2$ on 5 (tai funktio f saa arvon 5, kun $x = 2$).

Funktion kuvaaja

Kuvaaja



Yhden muuttujan funktion f kuvaaja piirretään kaksiakseliseen koordinaatistoon. Vaaka- eli x-akselin koordinaattia kutsutaan kohdaksi ja pysty- eli y-akselin koordinaattia funktion f arvoksi.

Nollakohta

Määritelmä

Funktion f nollakohta on se kohta x, jossa

$$f(x) = 0$$

Seuraus

Nollakohdan määritelmästä seuraa, että funktion f kuvaaja leikkaa vaaka-akselin nollakohdissaan, koska silloin pystykoordinaatti $y = f(x) = 0$.

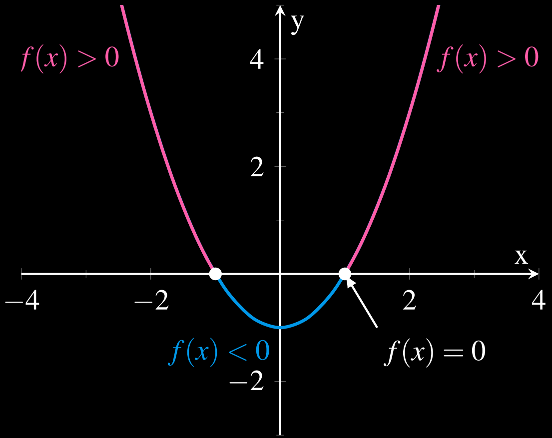
Määritelmä

Vastaavasti sanotaan, että funktion f arvo on

- positiivinen, kun $f(x) > 0$.
- negatiivinen, kun $f(x) < 0$.

Esimerkki

Tutkitaan funktion $f(x) = x^2 - 1$ kuvaajaa.



Prosenttilaskenta

Prosentti

Prosentti

Määritelmä

Prosentti % on yksi sadasosa eli

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01$$

Prosenttiluvun desimaalimuotoa kutsutaan usein prosenttikertoimeksi.

Esimerkki

$$\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 50\%$$

$$\frac{1}{3} = 0,333... = 33,3...\% \approx 33\%$$

Prosenttiosuus

Esimerkki

Kahden luvun välinen suhde (osamäärä) voidaan ilmaista prosentteina. Koska

$$\frac{7}{8} = 0,875 = 87,5\%,$$

niin luku 7 on 87,5% luvusta 8. Yhtälö voidaan muokata muotoon

$$\frac{7}{8} = 0,875 \mid \cdot 8$$

$$7 = 0,875 \cdot 8 = 87,5\% \cdot 8,$$

joten voidaan myös sanoa, että 87,5% luvusta 8 on 7.

Suhdeyhtälö

Määritelmä

Jos p % luvusta x on a, niin

$$\frac{p}{100} \cdot x = a,$$

missä

- p on prosenttien määrä
- x on perusarvo
- a on muuttunut arvo

Muutos- ja vertailuprosentti

Prosenttiyksikkö

Määritelmä

Prosenttiyksikkö on mitta, joka ilmaisee prosenttiosuuksien välisiä absoluuttisia eroja.

Esimerkki

Coca-Cola -juomasta $10,6\%$ koostuu sokerista ja Pepsistä 7%. Koska

$$10,6\% - 7\% = 3,6\%,$$

niin Coca-Colassa on $3,6$ prosenttiyksikköä enemmän sokeria kuin Pepsissä.

Vertailuprosentti

Määritelmä (Kahden luvun vertailu)

Reaalilukuja a ja b voidaan vertailla käyttämällä niiden osamäärää $\frac{a}{b}$, jossa jakajana on vertailun kohde.

Esimerkki

Kuinka monta prosenttia luku 55 on luvusta 44?
Vertailun kohteena on luku 44. Koska

$$\frac{55}{44} = \frac{5}{4} = 1,25 = 125\%,$$

niin luku 55 on 125% luvusta 44.

Ero prosentteina

Seuraus

Kahden luvun välinen ero voidaan esittää prosentteina. Jos halutaan tietää, "kuinka monta prosenttia suurempi reaaliluku a on kuin b", niin vastaus saadaan kaavasta

$$\frac{a-b}{b}$$

Esimerkki

Kuinka monta prosenttia enemmän sokeria on Coca-colassa kuin Pepsissä?
Coca-colassa on $10,6\%$ sokeria ja Pepsissä 7%, jolloin

$$\frac{10,6\% - 7\%}{7\%} = \frac{3,6\%}{7\%} \approx 0,53 = 53\%$$

Coca-colassa on siis noin 53% enemmän sokeria kuin Pepsissä.

Muuttunut arvo

Prosenttikerroin

Määritelmä

Koska $\% = 0,01$, niin prosenttimäärää $p\%$ vastaava prosenttikerroin on

$$p\% = \frac{p}{100}$$

Esimerkki

$$100\% = 1,00$$
$$50\% = 0,50$$
$$37,5\% = 0,375$$
$$0,2\% = 0,002$$

Muuttunut arvo

Seuraus

Jos reaaliluku a muuttuu p prosenttia, voidaan sen uusi arvo laskea prosenttikertoimen avulla.

$$\textit{muuttunut arvo} = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot a$$

Esimerkki

Paidan tavallinen myyntihinta on $24,95$ €. Kuinka paljon se maksaa 30% alennuksessa?
Hinta laskee 30%, jonka prosenttikerroin on $0,30$. Tällöin muuttunut arvo saadaan kaavasta:

$$(1 - 0,30) \cdot 24,95 = 0,7 \cdot 24,95 = 17,465 \approx 17,47.$$

Alennettu hinta on siis $17,47$ €.

Verrannollisuus

Suoraan verrannollisuus

Kilohinta

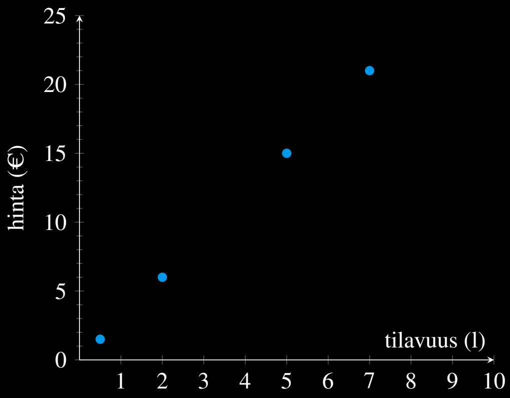
Alla on taulukoitu hintoja suomalaisten perunoiden eri litramäärille Helsingin Kauppatorilla:

Litraa	Hinta
0,5	1,5
2	6
5	15
7	21

Nopealla laskutoimituksella huomataan, että

$$\frac{1,5}{0,5} = \frac{6}{2} = \frac{15}{5} = \frac{21}{7} = 3$$

Sijoitetaan taulukon pisteet koordinaatistoon.



Suoraan verrannollisuus

Määritelmä

Suureiden A ja B sanotaan olevan suoraan verrannolliset, jos on olemassa reaaliluku k siten, että

$$\frac{A}{B} = k \iff A = k \cdot B$$

kaikilla suureiden A ja B toisiaan vastaavilla arvoilla. Tällöin lukua k kutsutaan suureiden A ja B suhdeluvuksi.

Esimerkki

Aiemmin huomattiin, että perunoiden hinnan ja litramäärän suhde oli

$$\frac{1,5}{0,5} = 3$$

eli niiden litrahinta oli 3 €/litra.

Suoran verrannollisuuden kuvaaja

Seuraus

Suoraan verrannollisten suureiden arvot asettuvat koordinatistossa suoralle

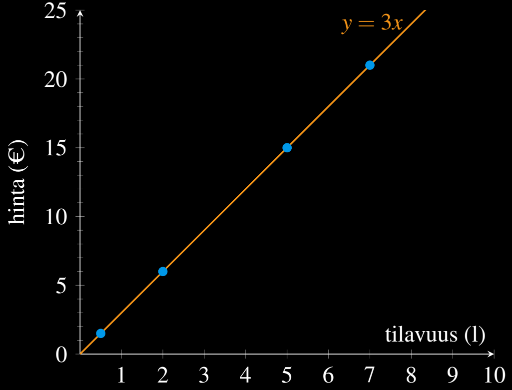
$$y = k \cdot x,$$

jossa

- k *on suureiden suhdeluku*
- y *on pystyakselin suureen arvo.*
- x *on vaaka-akselin suureen arvo.*

Kilohinta, osa 2!

Piirretään aiemmin tehtyyn kuvaajaan mittauspisteiden kautta kulkeva suora.



Koska hinnan ja litramäärän suhde on 3, niin tämän suoran yhtälö on $y = 3x$. Esimerkiksi 20 litran hinta saadaan sijoittamalla:

$$y = 3 \cdot 20 = 60 \text{ eli } 60 \text{ euroa.}$$

Kääntäen verrannollisuus

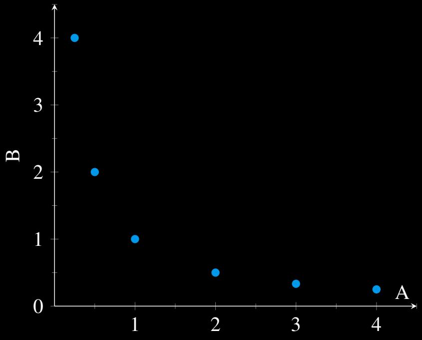
Kokeilua

Suoraan verrannollisten suureiden A ja B osamäärä on vakio. Mitä jos osamäärän sijasta määritellään niiden tulo vakioksi?

$$A \cdot B = k \iff B = \frac{k}{A}$$

Valitaan vaikka $k = 1$ ja taulukoidaan joitakin tuloksia:

A	B
0,25	4
0,5	2
1	1
2	0,5
3	0,33...
4	0,25



Kääntäen verrannollisuus

Määritelmä

Suureiden A ja B sanotaan olevan kääntäen verrannollisia, jos on olemassa jokin reaaliluku k siten, että

$$A \cdot B = k$$

kaikilla suureiden A ja B toisiaan vastaavilla arvoilla. Lukua k kutsutaan verrannollisuusluvuksi.

Esimerkki

Taulukkoon on koottu erään työn valmistumisajat tietyillä työntekijämäärillä. Arvoja vertailemalla huomataan, että

$$1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 5 \cdot 2{,}4 = 12$$

eli suureet ovat kääntäen verrannollisia ja $k = 12$.

Työntekijää	Aika (h)
1	12
2	6
3	4
4	3
5	2,4

Kuvaaja

Seuraus

Kääntäen verrannollisten suureiden kuvaajan pisteet asettuvat käyrälle, joka noudattaa yhtälöä

$$x \cdot y = k \iff y = \frac{k}{x}, \; kun \; x \neq 0.$$

Esimerkki

Työntekoesimerkissä huomattiin, että $k = 12$, joten sitä vastaava yhtälö on:

$$y = \frac{12}{x},$$

missä x vastaa työntekijöiden määrää ja y työn kestoa.