

*MAB06-7*  
*Talousmatematiikka*

Iitin lukio  
2023-2024

Aleksi Alenius



# Sisältö

## 1. Veroja ja korkolaskuja

Prosenttilaskentaa

Ansiotulojen verotus

Muita veroja

Yksinkertainen korko

## 2. Rahan arvo ja valuutat

Indeksit

Rahan arvo

Valuutat

## 3. Lukujonot talousmatematiikassa

Aritmeettinen jono ja summa

Geometrinen jono ja summa

## 4. Korko- ja investointilaskentaa

Koronkorko

Diskonttaus ja investointilaskenta

Katetuottolaskenta

## 5. Erilaisia lainoja

Tasalyhennyslaina

Tasaerälaina

# *Veroja ja korkolaskuja*

# *Prosenttilaskentaa*

# Prosentti

## Määritelmä

Prosentti % on yksi sadasosa.

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01$$

## Esimerkki

Kuinka monta prosenttia luku 11 on luvusta 20?

$$\frac{11}{20} = 0,55 = 55\%$$

## Esimerkki

Paidan hinta on 24 € ja sen hintaa nostetaan 15%. Mikä on paidan uusi hinta?

$$\begin{aligned} & (100\% + 15\%) \cdot 24 \\ & = (1,00 + 0,15) \cdot 24 \\ & = 1,15 \cdot 24 \\ & = 27,6 \end{aligned}$$

Paidan uusi hinta on siis 27,6 €.

## Vertailu

### Esimerkki

Myynnissä on kaksi laatikkoa. Niistä punainen maksaa 9,99 € ja sininen 11,90 €. Kuinka monta prosenttia kalliimpi on sininen laatikko kuin punainen laatikko?

Laatikkojen välinen hintaero on

$$11,90 - 9,99 = 1,91.$$

Vertauksen kohteena on punainen laatikko, joten ero prosentteina on

$$\frac{1,91}{9,99} = 0,191\dots \approx 0,19 = 19\%$$

# *Ansiotulojen verotus*

# Verot

## Määritelmä

**Verot** ovat julkiselle vallalle maksettavia yksipuolisesti määrättyjä pakollisia rahasuorituksia. Veroja käytetään julkisen sektorin toiminnan rahoittamiseen

- terveydenhuolto
- koulutus
- julkiset rakennukset ja tiet

## Esimerkki

- tulovero
- arvonlisävero
- valmistevero
- pääomatulovero
- lahjavero
- varainsiirtovero
- kiinteistövero
- kunnallisvero
- kirkollisvero



# Ansiotulojen verotus

## Määritelmä (ansiotulot)

Ansiotuloja ovat kaikki muut paitsi pääomatulot eli esimerkiksi:

- palkkatulo
- opintoraha
- työttömyyskorvaus

## Määritelmä (verokortti)

Verokortissa ilmoitetaan veronmaksajan

- ennakonpidätysprosentti
  - peritään tulorajan alittavasta osuudesta.
- tuloraja
- lisäprosentti
  - peritään vain tulorajan ylittävästä osuudesta

## Huom.

17 vuotta täyttäneet maksavat lisäksi muita veroluonteisia maksuja kuten eläke- ja työttömyysvaikutusmaksut (1,5%).

## Tasavero ja veronpalautus

### *Määritelmä (tasavero)*

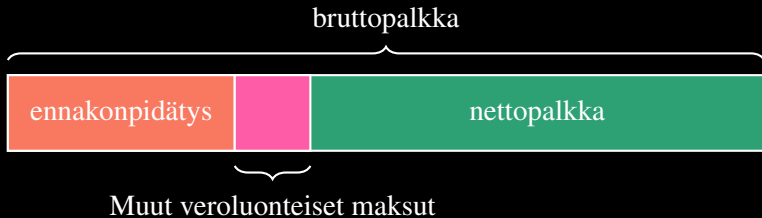
Kunnallis- ja kirkollisvero ovat tasaveroja. Tasaverot ovat veroja, joiden veroprosentit ovat samansuuruisia kaikille samassa kunnassa asuville.

### *Määritelmä (veronpalautus ja jäännösvero)*

Vuoden aikana toteutuneita tuloja verrataan maksettuun ennakonpidätykseen.

- Jos ennakonpidätystä on peritty liian paljon, veronmaksaja saa veronpalautuksen.
- Vastaavasti veronmaksaja joutuu maksamaan jäännösveroa, jos ennakonpidätystä ei ole maksettu tarpeeksi.

# Brutto- ja nettotulot



## *Muita veroja*

# Verotyypit

## *Määritelmä (välittömät verot)*

Välittömät verot ovat veroja, jotka pidätetään suoraan palkasta tai muusta tulosta.

- valtion tulovero
- kunnallisvero
- perintövero
- lahjavero
- kiinteistövero

## *Määritelmä (välilliset verot)*

Välilliset verot ovat veroja, jotka lähetetään verottajalle välikäden kautta.

- arvonlisävero
- tulli
- valmisteverot

# Pääomatulojen verotus

## Määritelmä

Pääomatulot ovat varallisuuden omistamisesta kertyviä tuloja.

- vuokratulot
- osinkotulot
- korkotulot
- voitto omaisuuden luovutuksesta
  - asunnot
  - osakkeet

## verotus

Pääomatulojen verotus on progressiivista.

- 30%, jos pääomatulot ovat korkeintaan 30 000 euroa
- 34%, jos pääomatulot ovat yli 30 000 euroa.

# Arvonlisävero

## Määritelmä

Arvonlisävero on välillinen kulutusvero.

- Sisältyy tuotteen tai palvelun myyntihintaa.
- Ostaja maksaa.
- veroton hinta + alv. = myyntihinta

<b>Tuote tai palvelu</b>	<b>Alv. (%)</b>
yleinen	24
elintarvikkeet, rehut ja ravintolapalvelut	14
kirjat, lehdet, lääkkeet, henkilökuljetus, liikunta- ja majoituspalvelut, kulttuuri- ja viihdetilaisuudet, taide-esineet, tekijänoikeus ja esityskorvaukset.	10
yleissivistävä ja ammatillinen koulutus, terveyden- ja sairaanhoito, sosiaalihuolto	0

## Perintö- ja lahjaverot

### Määritelmä (perintövero)

Perintövero maksetaan vähintään 20 000 euron perinnöstä.

### Määritelmä (lahjaverot)

Lahjaverot maksetaan vähintään 5 000 euron arvoisesta lahjasta tai 3 vuoden aikana annetuista lahjoista, joiden yhteenlaskettu arvo on yli 5 000 euroa.

### Veroluokat

Perintö- ja lahjaverojen suuruudet jakautuvat sukulaisuussuhteen mukaan kahteen luokkaan.

1. Aviopuoliso, lapset, lapsenlapset, vanhemmat ja isovanhemmat.
2. Sisarukset, muut sukulaiset ja perheen ulkopuoliset.

Veroluokkataulukot löytyvät Verohallinnon sivuilta ([www.vero.fi](http://www.vero.fi)).



# *Yksinkertainen korko*

# Yksinkertainen korko

## Määritelmä

Korko on lainatun rahan hinta. Sen suuruus riippuu

- pääoman suuruudesta
- korkoajasta
- korkokannasta eli korkoprosentista

Korko lisätään pääomaan jokaisen korkokauden loputtua. Korkokauden pituus vaihtelee sopimuksen mukaan.

- Useimmiten vuosi tai kuukausi
- Joissakin lyhyissä lainoissa vain kymmeniä päiviä

## Huom.

Korkotuotoista maksetaan lähdeveroa.

- 30% aina 30 000 euroon saakka ja
- 34% sen ylittävästä osasta.

## Lause

Yksinkertainen korko  $r$  voidaan laskea kaavalla

$$r = kit,$$

missä

- $k$  on alkuperäinen pääoma
- $i$  on nettokorkokanta ja
  - $(1 - \text{lähdevero-}\%) \cdot \text{korkokanta}$ .
- $t$  on korkokausien lukumäärä.

# *Rahan arvo ja valuutat*

# *Indeksit*

# Indeksi

## Määritelmä

Indeksi on suhdeluku, joka kuvaa jonkin muuttujan suhteellista muutosta perusajankohdan suhteen. Perusajankohta ilmoitetaan usein merkinnällä

ajankohta = 100

## Esimerkki

Alla olevaan taulukkoon on koottu kirjolohien kilohintoja vuosilta 2014–2018. (*Tilastokeskus*)

Perusajankohtana on vuoden 2014 kilohinta.

Vuosi	Kilohinta (€/kg)	Kilohinta verrattuna vuoteen 2014	Hintaindeksi (2014 = 100)
2014	9,56	100,0 %	100
2015	8,50	88,9 %	88,9
2016	9,70	101,5 %	101,5
2017	12,22	127,8 %	127,8
2018	11,16	116,7 %	116,7

# *Rahan arvo*

# Rahan ostovoima

## Määritelmä

Rahan arvo eli ostovoima on sen kyky ostaa tavaroita ja palveluja.

## Seuraus

Rahan ostovoima voi muuttua.

- Rahan arvo nousee:
  - "deflaatio"
  - Saman tavarahan/palvelun ostaminen vaatii vähemmän rahaa.
- Rahan arvo laskee:
  - "inflaatio"
  - Saman tavarahan/palvelun ostaminen vaatii enemmän rahaa.

## Määritelmä (KHI)

Yleisen hintatason muutoksia kuvataan **kulutajahintaindeksillä** (KHI), jonka Suomessa laskee Tilastokeskus.

- kotitalouksien ostamien tavaroiden ja palveluiden hintakehitys.
- julkaistaan kuukausittain .

## Esimerkki

Helmikuussa 2024 inflaatio oli 3,0%. Tällöin tuote, joka maksoi 100 € helmikuun alussa, maksaa sen jälkeen keskimäärin

$$(1 + 0,03) \cdot 100 = 103 \text{ euroa.}$$

# Ostovoiman vertailu

## Lause

*Ostovoiman muutosta voidaan vertailla kahdella tavalla:*

- *nimellisesti*
  - *Arvoja verrataan suoraan keskenään.*
- *reaalisesti*
  - *Rahamäärät muutetaan saman ajankohdan rahaksi ennen vertailua.*

## Esimerkki

Eräs työntekijä sai palkkaa alla olevan taulukon mukaan. Lasketaan hänen palkkansa

- nimellinen muutos.
- reaalin muutos.

<b>Vuosi</b>	<b>Palkka (€/kk)</b>	<b>KHI (2015=100)</b>
2020	2 956	103,67
2023	3 221	109,36



# *Valuutat*

# Valuuttakurssit

## Määritelmä

Valuuttakurssit ovat eri valuuttojen välisiä suhteita.

- Julkaistaan päivittäin. (epäsuora noteeraus, EKP)
- Tilivaluuttakurssit
  - yritysten maksuliikenne
- Seteli-/matkavaluuttakurssit
  - yksityishenkilön rahanvaihto

## Huom.

Valuuttakursseja on kahdenlaisia. Euroalueilla:

- myyntikurssi
  - vaihtopiste myy ulkomaanvaluuttaa
- ostokurssi
  - vaihtopiste ostaa ulkomaanvaluuttaa

# Valuutan arvo

## Määritelmä (Revalvoituminen)

- Valuutan ulkoinen arvo kasvaa
- Samalla määrällä valuuttaa saa enemmän muita valuuttoja.
- Kurssin kuvaaja nousee.

## Määritelmä ( Devalvoituminen)

- Valuutan ulkoinen arvo pienenee
- Samalla määrällä valuuttaa saa vähemmän muita valuuttoja.
- Kurssin kuvaaja laskee.

## Huom.

Valuuttakurssien epäsuora noteeraus kertoo euron (€) ulkoisen arvon. Arvo muuttuu päivittäin.

## Seuraus

- *Revalvoituminen/devalvoituminen tapahtuu toisen valuutan suhteen.*
- *Muutokset ovat vastavuoroisia:*
  - *Eurolla enemmän USA:n dollareita*  
 $\iff$  *USA:n dollareilla vähemmän euroja*

*Lukujonot talousmatematiikassa*

## *Aritmeettinen jono ja summa*

# Aritmeettinen lukujono

## Määritelmä

Lukujonoa kutsutaan **aritmeettiseksi**, jos sen kaikkien peräkkäisten jäsenten erotus on vakio. Aritmeettisen lukujonon  $(a_n)$  yleinen jäsen  $a_n$  on muotoa

$$a_n = a_1 + (n - 1)d,$$

missä

- $a_1$  on jonon 1. jäsen.
- $n$  on yleisen jäsenen järjestysluku.
- $d$  on lukujonon peräkkäisten jäsenten erotus eli **erotusvakio**

$$d = a_n - a_{n-1}$$

# Aritmeettinen summa

## Lause

Päättävän aritmeettisen lukujonon  $a_1, a_2, \dots, a_n$  jäsenten summa on

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2},$$

missä

- $n$  on summattavien jäsenten lukumäärä.
- $a_1$  on jonon ensimmäinen jäsen.
- $a_n$  on jonon viimeinen jäsen.

## Esimerkki

Muodostetaan aritmeettisen lukujonon  $(a_n) = 2, 11, 20, \dots$  yleinen jäsen ja lasketaan sen sadan ensimmäisen jäsenen summa. (HT)

# *Geometrinen jono ja summa*



# Geometrinen lukujono

## Määritelmä

Lukujono on geometrinen, jos sen peräkkäisten jäsenten suhde on vakio eli

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

missä

- $q$  on peräkkäisten jäsenten suhde eli **suhdeluku**.
- $n$  on järjestysluku,  $n = 1, 2, \dots$
- $a_n$  on lukujonon  $n$ . jäsen.

## Geometrisen jonon yleinen jäsen

### Määritelmä

Geometrisen jonon  $(a_n)$  yleinen jäsen  $a_n$  voidaan esittää muodossa

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

missä

- $a_1$  on lukujonon 1. jäsen.
- $q$  on lukujonon suhdeluku.
- $n$  on järjestysluku.

# Geometrinen summa

## Lause

Päättävän geometrisen lukujonon  $a_1, a_2, \dots, a_n$  jäsenten summa  $S_n$  on

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

missä

- $a_1$  on jonon ensimmäinen jäsen.
- $n$  jonon jäsenten lukumäärää.
- $q$  jonon suhdeluku.

## Esimerkki

Muodostetaan geometrisen lukujonon  $(a_n) = 140, 210, 315, \dots$  yleinen jäsen ja lasketaan sen 30 ensimmäisen jäsenen summa.

# *Korko- ja investointilaskentaa*

# *Koronkorko*

# Korko

## Määritelmä

**Korko** on rahan hinta.

- Rahalainan antajalle maksettava korvaus.

## Määritelmä (korkokanta)

**Korkokanta** on koron suuruus.

- Ilmoitetaan % lainatusta rahamäärästä.
- Maksetaan korkokausittain.
  - Useimmiten korkokausi = 1 vuosi.

## Esimerkki

1. Mikko tallettaa pankkiin rahaa.
2. Pankki on käytännössä lainannut Mikon tallettaman rahamäärän.
  - Tilityypistä riippuen Mikko voi käyttää rahojaan välittömästi tai viiveellä.
3. Pankki maksaa Mikolle rahan hinnan eli koron.

# Kasvanut pääoma

## Lause

Korkoaikana kasvaneen pääoman määrä on

$$K_n = Kq^n,$$

missä

- $K$  on alkupääoma
- $n$  on korkokausien lukumäärä
- $q$  on korkotekijä
  - Jos korkokanta on  $p\%$ , niin

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

## Huom.

- Korkotuloista maksetaan 30 % lähdeveroa.
- Nettokorkokannassa lähdevero on otettu jo huomioon.

## Esimerkki

Elsa tallettaa tilille 800 euroa korkokannalla 3,8 %. Korkotuloista maksetaan 30 % lähdeveroa.

1. Kuinka paljon tilillä on rahaa 10 vuoden kuluttua?
2. Milloin tilillä on yli 2 000 euroa?

# *Diskonttaus ja investointilaskenta*



# Diskonttaus

## Määritelmä

**Diskonttauksella** eli koronpoistolla tarkoitetaan tulevaisuuden kasvaneen pääoman tämänhetkisen arvon laskemista.

## Lause

Kasvaneen pääoman nykyarvo  $K$  on

$$K = K_n q^{-n},$$

missä

- $K_n$  on kasvanut pääoma
- $n$  on korkokausien lukumäärä
- $q$  on korkotekijä

## Huom.

Diskonttaus on koron lisäämisen vastaoperaatio!

# Investointi

## Määritelmä

**Investointi** on rahan sijoittamista tulevaisuuden hyödykkeisiin.

- Tavoitteena useimmiten tuotannon aloittaminen tai lisääminen.
- **Yksityinen**
  - Toteutetaan omalla vauraudella ja/tai lainalla. (esim. asuntolaina)
- **Julkinen**
  - Bruttokansantuote
  - Luottoluokitus

# *Katetuottolaskenta*

# Liikevaihto

## Määritelmä

**Liikevaihto** eli myyntituotto:

$$\text{liikevaihto} = \text{yksikköhinta} \cdot \text{myyntimäärä}$$

## Huom.

Liikevaihtoa laskettaessa käytetään verotonta yksikköhintaa.

## Esimerkki

Kahvikupin hinta on 2,00 € (alv.=14 %).  
Kahvila myy päivän aikana 120 kuppia kahvia. Lasketaan kahvilan päivittäinen liikevaihto. (HT)

# Kustannukset

## Määritelmä

Yrityksen kustannukset voidaan jakaa kahteen lajiin:

- **muuttuvat kustannukset**
  - riippuvat myyntimäärästä
  - enemmän tuotetta  $\implies$  suuremmat kustannukset
- **kiinteät kustannukset**
  - eivät riipu tuotannon määrästä.
  - tila- ja laitevuokrat, työntekijöiden palkat, vakuutukset jne.

## Esimerkki

Muuttuvia kustannuksia ovat muun muassa:

- raaka-ainekulut
- ylityöpalkat
- energia- ja toimituskulut

# Katetuotto ja tulos

## Määritelmä

**Katetuotto** eli myyntikate =

liikevaihto – muuttuvat kustannukset

Katetuottoprosentti (KTP):

$$\text{KTP} = \frac{\text{katetuotto}}{\text{liikevaihto}}$$

## Määritelmä

**Tulos** kertoo, onko toiminta kannattavaa.

tulos = katetuotto – kiinteät kustannukset

- Jos tulos  $> 0 \implies$  kannattavaa.
- Jos tulos  $< 0 \implies$  tappiollista.

## Huom.

Katetuotto kertoo, kuinka paljon liikevaihdosta jää kiinteiden kustannusten kattamiseen. Katetuotto ei tarkoita voittoa!

# Kokonaiskustannukset

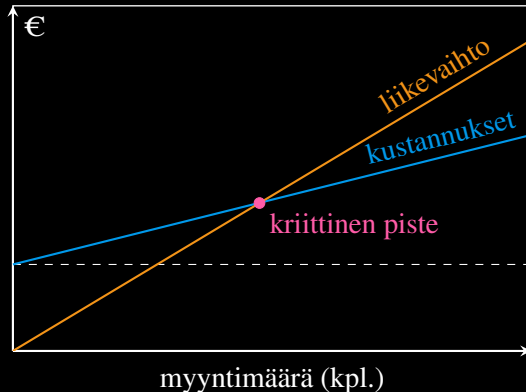
## Määritelmä

### Kokonaiskustannukset

$$= \begin{array}{l} \text{muuttuvat} \\ \text{kustannukset} \end{array} + \begin{array}{l} \text{kiinteät} \\ \text{kustannukset} \end{array}$$

## Seuraus

Myyntimäärän kasvaessa myös liikevaihto kasvaa.  $\implies$  on olemassa **kriittinen piste**, jota ennen toiminta on tappiollista ja jonka jälkeen se on voitollista.



*Erilaisia lainoja*



# *Tasalyhennyslaina*

# *Tasaerälaina*