

MAB06-7
Talousmatematiikka

Iitin lukio
2023-2024

Aleksi Alenius



Sisältö

1. Veroja ja korkolaskuja

Prosenttilaskentaa

Ansiotulojen verotus

Muita veroja

Yksinkertainen korko

2. Rahan arvo ja valuutat

Indeksit

Rahan arvo

Valuutat

3. Lukujonot talousmatematiikassa

Aritmeettinen jono ja summa

Geometrinen jono ja summa

4. Korko- ja investointilaskentaa

Koronkorko

Diskonnttaus ja investointilaskenta

Katetuottolaskenta

5. Erilaisia lainoja

Tasalyhennyslaina

Tasaerälaina

Veroja ja korkolaskuja

Prosenttilaskentaa

Prosentti

Määritelmä

Prosentti % on yksi sadasosa.

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01$$

Esimerkki

Kuinka monta prosenttia luku 11 on luvusta 20?

$$\frac{11}{20} = 0,55 = 55\%$$

Esimerkki

Paidan hinta on 24 € ja sen hintaa nostetaan 15%. Mikä on paidan uusi hinta?

$$\begin{aligned} & (100\% + 15\%) \cdot 24 \\ & = (1,00 + 0,15) \cdot 24 \\ & = 1,15 \cdot 24 \\ & = 27,6 \end{aligned}$$

Paidan uusi hinta on siis 27,6 €.

Vertailu

Esimerkki

Myynnissä on kaksi laatikkoa. Niistä punainen maksaa 9,99 € ja sininen 11,90 €. Kuinka monta prosenttia kalliimpi on sininen laatikko kuin punainen laatikko?

Laatikkojen välinen hintaero on

$$11,90 - 9,99 = 1,91.$$

Vertauksen kohteena on punainen laatikko, joten ero prosentteina on

$$\frac{1,91}{9,99} = 0,191\dots \approx 0,19 = 19\%$$

Ansiotulojen verotus

Verot

Määritelmä

Verot ovat julkiselle vallalle maksettavia yksipuolisesti määrättyjä pakollisia rahasuorituksia. Veroja käytetään julkisen sektorin toiminnan rahoittamiseen

- terveydenhuolto
- koulutus
- julkiset rakennukset ja tiet

Esimerkki

- tulovero
- arvonlisävero
- valmistevero
- pääomatulovero
- lahjavero
- varainsiirtovero
- kiinteistövero
- kunnallisvero
- kirkollisvero

Ansiotulojen verotus

Määritelmä (ansiotulot)

Ansiotuloja ovat kaikki muut paitsi pääomatulot eli esimerkiksi:

- palkkatulo
- opintoraha
- työttömyyskorvaus

Määritelmä (verokortti)

Verokortissa ilmoitetaan veronmaksajan

- ennakonpidätysprosentti
 - peritään tulorajan alittavasta osuudesta.
- tuloraja
- lisäprosentti
 - peritään vain tulorajan ylittävästä osuudesta

Huom.

17 vuotta täyttäneet maksavat lisäksi muita veroluonteisia maksuja kuten eläke- ja työttömyysvakuutusmaksut (1,5%).

Tasavero ja veronpalautus

Määritelmä (tasavero)

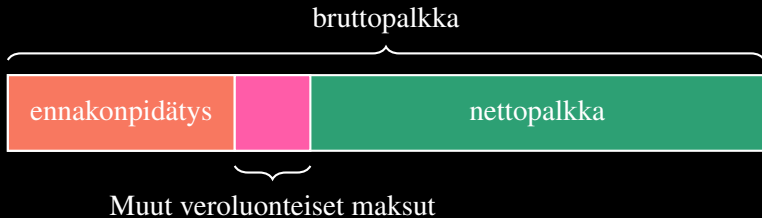
Kunnallis- ja kirkollisvero ovat tasaveroja. Tasaverot ovat veroja, joiden veroprosentit ovat samansuuruisia kaikille samassa kunnassa asuville.

Määritelmä (veronpalautus ja jäännösvero)

Vuoden aikana toteutuneita tuloja verrataan maksettuun ennakonpidätykseen.

- Jos ennakonpidätystä on peritty liian paljon, veronmaksaja saa veronpalautuksen.
- Vastaavasti veronmaksaja joutuu maksamaan jäännösveroa, jos ennakonpidätystä ei ole maksettu tarpeeksi.

Brutto- ja nettotulot



Muita veroja

Verotyypit

Määritelmä (välittömät verot)

Välittömät verot ovat veroja, jotka pidätetään suoraan palkasta tai muusta tulosta.

- valtion tulovero
- kunnallisvero
- perintövero
- lahjavero
- kiinteistövero

Määritelmä (välilliset verot)

Välilliset verot ovat veroja, jotka lähetetään verottajalle välikäden kautta.

- arvonlisävero
- tulli
- valmisteverot

Pääomatulojen verotus

Määritelmä

Pääomatulot ovat varallisuuden omistamisesta kertyviä tuloja.

- vuokratulot
- osinkotulot
- korkotulot
- voitto omaisuuden luovutuksesta
 - asunnot
 - osakkeet

verotus

Pääomatulojen verotus on progressiivista.

- 30%, jos pääomatulot ovat korkeintaan 30 000 euroa
- 34%, jos pääomatulot ovat yli 30 000 euroa.

Arvonlisävero

Määritelmä

Arvonlisävero on välillinen kulutusvero.

- Sisältyy tuotteen tai palvelun myyntihintaa.
- Ostaja maksaa.
- veroton hinta + alv. = myyntihinta

Tuote tai palvelu	Alv. (%)
yleinen	24
elintarvikkeet, rehut ja ravintolapalvelut	14
kirjat, lehdet, lääkkeet, henkilökuljetus, liikunta- ja majoituspalvelut, kulttuuri- ja viihdetilaisuudet, taide-esineet, tekijänoikeus ja esityskorvaukset.	10
yleissivistävä ja ammatillinen koulutus, terveyden- ja sairaanhoito, sosiaalihuolto	0

Perintö- ja lahjavero

Määritelmä (perintövero)

Perintövero maksetaan vähintään 20 000 euron perinnöstä.

Määritelmä (lahjavero)

Lahjaveroa maksetaan vähintään 5 000 euron arvoisesta lahjasta tai 3 vuoden aikana annetuista lahjoista, joiden yhteenlaskettu arvo on yli 5 000 euroa.

Veroluokat

Perintö- ja lahjaverojen suuruudet jakautuvat sukulaisuussuhteen mukaan kahteen luokkaan.

1. Aviopuoliso, lapset, lapsenlapset, vanhemmat ja isovanhemmat.
2. Sisarukset, muut sukulaiset ja perheen ulkopuoliset.

Veroluokkataulukot löytyvät Verohallinnon sivuilta (www.vero.fi).

Yksinkertainen korko

Yksinkertainen korko

Määritelmä

Korko on lainatun rahan hinta. Sen suuruus riippuu

- pääoman suuruudesta
- korkoajasta
- korkokannasta eli korkoprosentista

Korko lisätään pääomaan jokaisen korkokauden loputtua. Korkokauden pituus vaihtelee sopimuksen mukaan.

- Useimmiten vuosi tai kuukausi
- Joissakin lyhyissä lainoissa vain kymmeniä päiviä

Huom.

Korkotuotoista maksetaan lähdeveroa.

- 30% aina 30 000 euroon saakka ja
- 34% sen ylittävästä osasta.

Lause

Yksinkertainen korko r voidaan laskea kaavalla

$$r = kit,$$

missä

- k on alkuperäinen pääoma
- i on nettokorkokanta ja
 - $(1 - \text{lähdevero-}\%) \cdot \text{korkokanta}$.
- t on korkokausien lukumäärä.

Rahan arvo ja valuutat

Indeksit

Indeksi

Määritelmä

Indeksi on suhdeluku, joka kuvaa jonkin muuttujan suhteellista muutosta perusajankohdan suhteen. Perusajankohta ilmoitetaan usein merkinnällä

ajankohta = 100

Esimerkki

Alla olevaan taulukkoon on koottu kirjolohien kilohintoja vuosilta 2014–2018. (*Tilastokeskus*)

Perusajankohtana on vuoden 2014 kilohinta.

Vuosi	Kilohinta (€/kg)	Kilohinta verrattuna vuoteen 2014	Hintaindeksi (2014 = 100)
2014	9,56	100,0 %	100
2015	8,50	88,9 %	88,9
2016	9,70	101,5 %	101,5
2017	12,22	127,8 %	127,8
2018	11,16	116,7 %	116,7

Rahan arvo

Rahan ostovoima

Määritelmä

Rahan arvo eli ostovoima on sen kyky ostaa tavaroita ja palveluja.

Seuraus

Rahan ostovoima voi muuttua.

- Rahan arvo nousee:
 - "deflaatio"
 - Saman tavaran/palvelun ostaminen vaatii vähemmän rahaa.
- Rahan arvo laskee:
 - "inflaatio"
 - Saman tavaran/palvelun ostaminen vaatii enemmän rahaa.

Määritelmä (KHI)

Yleisen hintatason muutoksia kuvataan **kulutajahintaindeksillä** (KHI), jonka Suomessa laskee Tilastokeskus.

- kotitalouksien ostamien tavaroiden ja palveluiden hintakehitys.
- julkaistaan kuukausittain .

Esimerkki

Helmikuussa 2024 inflaatio oli 3,0%. Tällöin tuote, joka maksoi 100 € helmikuun alussa, maksaa sen jälkeen keskimäärin

$$(1 + 0,03) \cdot 100 = 103 \text{ euroa.}$$

Ostovoiman vertailu

Lause

Ostovoiman muutosta voidaan vertailla kahdella tavalla:

- *nimellisesti*
 - *Arvoja verrataan suoraan keskenään.*
- *reaalisesti*
 - *Rahamäärät muutetaan saman ajankohdan rahaksi ennen vertailua.*

Esimerkki

Eräs työntekijä sai palkkaa alla olevan taulukon mukaan. Lasketaan hänen palkkansa

- nimellinen muutos.
- reaalin muutos.

Vuosi	Palkka (€/kk)	KHI (2015=100)
2020	2 956	103,67
2023	3 221	109,36

Valuutat

Valuuttakurssit

Määritelmä

Valuuttakurssit ovat eri valuuttojen välisiä suhteita.

- Julkaistaan päivittäin. (epäsuora noteeraus, EKP)
- Tilivaluuttakurssit
 - yritysten maksuliikenne
- Seteli-/matkavaluuttakurssit
 - yksityishenkilön rahanvaihto

Huom.

Valuuttakursseja on kahdenlaisia. Euroalueilla:

- myyntikurssi
 - vaihtopiste myy ulkomaanvaluuttaa
- ostokurssi
 - vaihtopiste ostaa ulkomaanvaluuttaa

Valuutan arvo

Määritelmä (Revalvoituminen)

- Valuutan ulkoinen arvo kasvaa
- Samalla määrällä valuuttaa saa enemmän muita valuuttoja.
- Kurssin kuvaaja nousee.

Määritelmä (Devalvoituminen)

- Valuutan ulkoinen arvo pienenee
- Samalla määrällä valuuttaa saa vähemmän muita valuuttoja.
- Kurssin kuvaaja laskee.

Huom.

Valuuttakurssien epäsuora noteeraus kertoo euron (€) ulkoisen arvon. Arvo muuttuu päivittäin.

Seuraus

- *Revalvoituminen/devalvoituminen tapahtuu toisen valuutan suhteen.*
- *Muutokset ovat vastavuoroisia:*
 - *Eurolla enemmän USA:n dollareita*
 \iff *USA:n dollareilla vähemmän euroja*

Lukujonot talousmatematiikassa

Aritmeettinen jono ja summa

Aritmeettinen lukujono

Määritelmä

Lukujonoa kutsutaan **aritmeettiseksi**, jos sen kaikkien peräkkäisten jäsenten erotus on vakio. Aritmeettisen lukujonon (a_n) yleinen jäsen a_n on muotoa

$$a_n = a_1 + (n - 1)d,$$

missä

- a_1 on jonon 1. jäsen.
- n on yleisen jäsenen järjestysluku.
- d on lukujonon peräkkäisten jäsenten erotus eli **erotusvakio**

$$d = a_n - a_{n-1}$$

Aritmeettinen summa

Lause

Päättävän aritmeettisen lukujonon a_1, a_2, \dots, a_n jäsenten summa on

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2},$$

missä

- n on summattavien jäsenten lukumäärä.
- a_1 on jonon ensimmäinen jäsen.
- a_n on jonon viimeinen jäsen.

Esimerkki

Muodostetaan aritmeettisen lukujonon $(a_n) = 2, 11, 20, \dots$ yleinen jäsen ja lasketaan sen sadan ensimmäisen jäsenen summa. (HT)

Geometrinen jono ja summa

Geometrinen lukujono

Määritelmä

Lukujono on geometrinen, jos sen peräkkäisten jäsenten suhde on vakio eli

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

missä

- q on peräkkäisten jäsenten suhde eli **suhdeluku**.
- n on järjestysluku, $n = 1, 2, \dots$
- a_n on lukujonon n . jäsen.

Geometrisen jonon yleinen jäsen

Määritelmä

Geometrisen jonon (a_n) yleinen jäsen a_n voidaan esittää muodossa

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

missä

- a_1 on lukujonon 1. jäsen.
- q on lukujonon suhdeluku.
- n on järjestysluku.

Geometrinen summa

Lause

Päättävän geometrisen lukujonon a_1, a_2, \dots, a_n jäsenten summa S_n on

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

missä

- a_1 on jonon ensimmäinen jäsen.
- n jonon jäsenten lukumäärää.
- q jonon suhdeluku.

Esimerkki

Muodostetaan geometrisen lukujonon $(a_n) = 140, 210, 315, \dots$ yleinen jäsen ja lasketaan sen 30 ensimmäisen jäsenen summa.

Korko- ja investointilaskentaa

Koronkorko

Korko

Määritelmä

Korko on rahan hinta.

- Rahalainan antajalle maksettava korvaus.

Määritelmä (korkokanta)

Korkokanta on koron suuruus.

- Ilmoitetaan % lainatusta rahamäärästä.
- Maksetaan korkokausittain.
 - Useimmiten korkokausi = 1 vuosi.

Esimerkki

1. Mikko tallettaa pankkiin rahaa.
2. Pankki on käytännössä lainannut Mikon tallettaman rahamäärän.
 - Tilityypistä riippuen Mikko voi käyttää rahojaan välittömästi tai viiveellä.
3. Pankki maksaa Mikolle rahan hinnan eli koron.

Kasvanut pääoma

Lause

Korkoaikana kasvaneen pääoman määrä on

$$K_n = Kq^n,$$

missä

- K on alkupääoma
- n on korkokausien lukumäärä
- q on korkotekijä
 - Jos korkokanta on $p\%$, niin

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

Huom.

- Korkotuloista maksetaan 30 % lähdevero.
- Nettokorkokannassa lähdevero on otettu jo huomioon.

Esimerkki

Elsa tallettaa tilille 800 euroa korkokannalla 3,8 %. Korkotuloista maksetaan 30 % lähdevero.

1. Kuinka paljon tilillä on rahaa 10 vuoden kuluttua?
2. Milloin tilillä on yli 2 000 euroa?

Diskonttaus ja investointilaskenta

Diskonttaus

Määritelmä

Diskonttauksella eli koronpoistolla tarkoitetaan tulevaisuuden kasvaneen pääoman tämänhetkisen arvon laskemista.

Lause

Kasvaneen pääoman nykyarvo K on

$$K = K_n q^{-n},$$

missä

- K_n on kasvanut pääoma
- n on korkokausien lukumäärä
- q on korkotekijä

Huom.

Diskonttaus on koron lisäämisen vastaoperaatio!

Investointi

Määritelmä

Investointi on rahan sijoittamista tulevaisuuden hyödykkeisiin.

- Tavoitteena useimmiten tuotannon aloittaminen tai lisääminen.
- **Yksityinen**
 - Toteutetaan omalla vauraudella ja/tai lainalla. (esim. asuntolaina)
- **Julkinen**
 - Bruttokansantuote
 - Luottoluokitus

Katetuottolaskenta

Liikevaihto

Määritelmä

Liikevaihto eli myyntituotto:

$$\text{liikevaihto} = \text{yksikköhinta} \cdot \text{myyntimäärä}$$

Huom.

Liikevaihtoa laskettaessa käytetään verotonta yksikköhintaa.

Esimerkki

Kahvikupin hinta on 2,00 € (alv.=14 %).
Kahvila myy päivän aikana 120 kuppia kahvia. Lasketaan kahvilan päivittäinen liikevaihto. (HT)

Kustannukset

Määritelmä

Yrityksen kustannukset voidaan jakaa kahteen lajiin:

- **muuttuvat kustannukset**
 - riippuvat myyntimäärästä
 - enemmän tuotetta \implies suuremmat kustannukset
- **kiinteät kustannukset**
 - eivät riipu tuotannon määrästä.
 - tila- ja laitevuokrat, työntekijöiden palkat, vakuutukset jne.

Esimerkki

Muuttuvia kustannuksia ovat muun muassa:

- raaka-ainekulut
- ylityöpalkat
- energia- ja toimituskulut

Katetuotto ja tulos

Määritelmä

Katetuotto eli myyntikate =

liikevaihto – muuttuvat kustannukset

Katetuottoprosentti (KTP):

$$\text{KTP} = \frac{\text{katetuotto}}{\text{liikevaihto}}$$

Määritelmä

Tulos kertoo, onko toiminta kannattavaa.

tulos = katetuotto – kiinteät kustannukset

- Jos tulos $> 0 \implies$ kannattavaa.
- Jos tulos $< 0 \implies$ tappiollista.

Huom.

Katetuotto kertoo, kuinka paljon liikevaihdosta jää kiinteiden kustannusten kattamiseen. Katetuotto ei tarkoita voittoa!

Kokonaiskustannukset

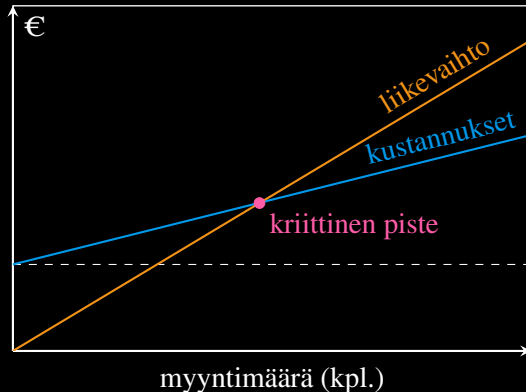
Määritelmä

Kokonaiskustannukset

$$= \begin{array}{l} \text{muuttuvat} \\ \text{kustannukset} \end{array} + \begin{array}{l} \text{kiinteät} \\ \text{kustannukset} \end{array}$$

Seuraus

Myyntimäärän kasvaessa myös liikevaihto kasvaa. \implies on olemassa **kriittinen piste**, jota ennen toiminta on tappiollista ja jonka jälkeen se on voitollista.



Erilaisia lainoja

Tasalyhennyslaina

Laina ja sen takaisinmaksu

maksuerä



korko

lyhennys

Määritelmä

Laina:

- toiselta taholta saatu pääoma.
- maksetaan takaisin.
- takaisinmaksuun sisältyy korko.

Seuraus

Laina maksetaan takaisin *maksuerissä*:

- *lyhennys + korko*
- *maksetaan lyhennyskausittain*
 - *sopimuksen mukaan*
 - *tyypillisesti kuukausittain*

Huom.

Kuukausikorko

$$= \frac{\text{vuosikorko}}{12}$$

Tasalyhennyslaina

Määritelmä

Tasalyhennyslaina:

- Kaikki lyhennykset yhtä suuria.
- \implies Maksuerät pienenevät ajan mittaan.

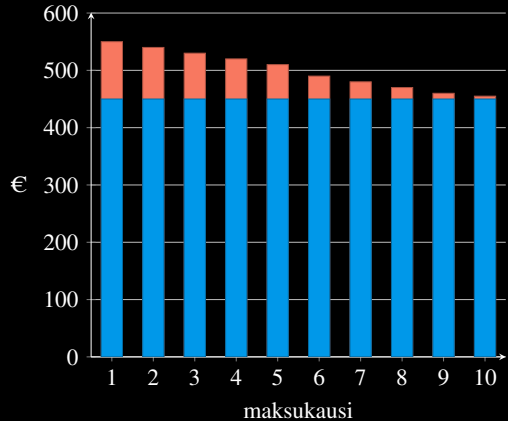
Lause

Tasalyhennyslainassa:

$$\text{erän lyhennys} = \frac{\text{laina}}{\text{maksuerien lkm.}}$$

$$\text{erän korko} = \text{korkokerroin} \cdot \begin{matrix} \text{jäljellä} \\ \text{oleva laina} \end{matrix}$$

Maksuerä = korko + lyhennys



Tasaerälaina

Tasaerälaina

Määritelmä

Tasaerälaina:

- Kaikki maksuerät ovat yhtä suuria.
- Lyhennyksen osuus kasvaa kausittain.

Lause

Tasaerän maksuerän eli *annuiteetin* A suuruus on

$$A = K \cdot q^n \frac{1 - q}{1 - q^n},$$

missä

- K on lainapääoma,
- q on maksukauden korkotekijä ja
- n on maksuerien lukumäärä.

