MAB03

Geometria

Iitin lukio

2023-2024

Aleksi Alenius

Sisältö

Kolmioita

Erilaisia kolmioita

Kulma

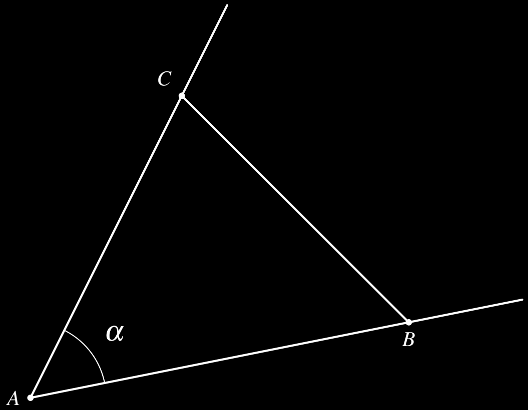
Määritelmä

Kulma on kahden puolisuoran väliin jäävä tason osa. Kulman nimeämiseen voidaan käyttää

- kreikkalaista kirjainta (α, β, γ, δ jne.)
- sen kylkipisteitä ja kärkpistettä (oikea-kärki-vasen).
- monikulmioissa vastaavaa kärkipistettä.

Esimerkki

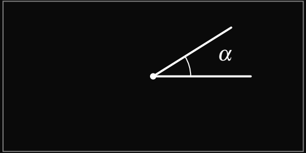
Viereisen kuvan kulmaa voidaan kutsua kulmaksi α, kulmaksi BAC tai kolmion ABC kulmaksi A.



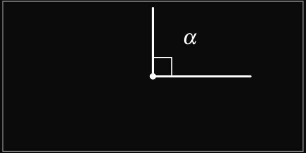
Kulmien luokittelu

Määritelmä

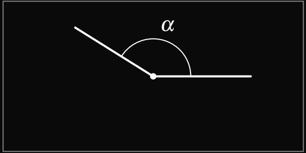
Terävä kulma
$(0 < \alpha < 90^o)$



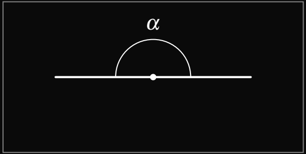
Suora kulma
$(\alpha = 90^o)$



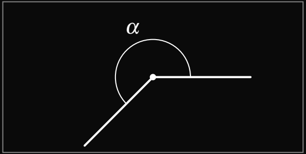
Tylppä kulma
$(90^o < \alpha < 180^o)$



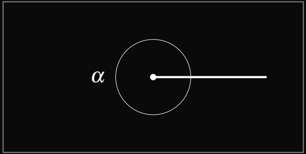
Oikokulma
$(\alpha = 180^o)$



Kupera kulma
$(180^o < \alpha < 360^o)$



Täysi kulma
$(\alpha = 360^o)$



Kolmio

Määritelmä

Kolmio on monikulmio, jolla on kolme kulmaa.

Seuraus

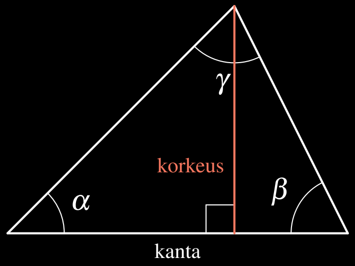
Kolmiolla on seuraavat ominaisuudet:

- *kulmien summa on* 180^o *(HT)*

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^o$$

- *pinta-ala on*

$$A = \frac{kanta \cdot korkeus}{2}$$



Suorakulmainen kolmio

Määritelmä

Suorakulmainen kolmio on kolmio, jonka kulmista yksi on 90^o. Suorakulmaisen komion

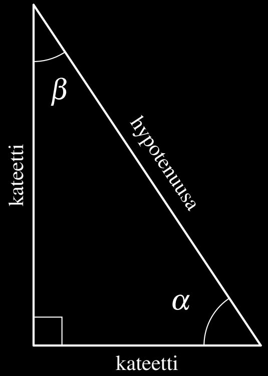
- pisintä sivua kutsutaan hypotenuusaksi.
- lyhyempiä sivuja kutsutaan kateeteiksi.

Seuraus

- *Suorakulmaisen kolmion muut kulmat ovat teräviä ($0 < \alpha,\ \beta < 90^o$) ja niiden summa*

$$\alpha + \beta = 90^o.$$

- *Kateetit ovat suoran kulman kylkisivuja.*



Tasakylkinen kolmio

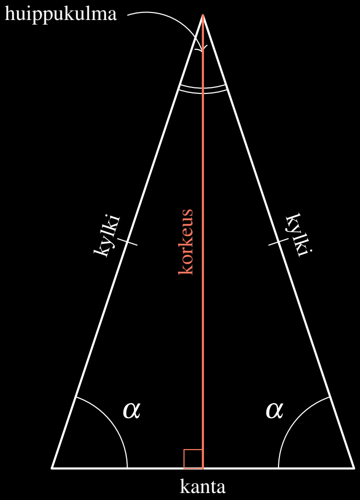
Määritelmä

Kolmiota kutsutaan tasakylkiseksi, jos sillä on kaksi samanmittaista sivua. Tällöin

- yhtä pitkiä sivuja kutsutaan kolmion kyljiksi ja jäljelle jäävää sivua sen kannaksi.
- yhtä pitkien sivujen muodostamaa kulmaa kutsutaan huippukulmaksi.
- kannan ja kylkien muodostamia kulmia kutsutaan kantakulmiksi (α).

Seuraus

- *Kantakulmat (α) ovat yhtä suuria.*
- *Huippukulmasta piirretty korkeusjana puolittaa tasakylkisen kolmion kahteen samanlaiseen suorakulmaiseen kolmioon.*



Tasasivuinen kolmio

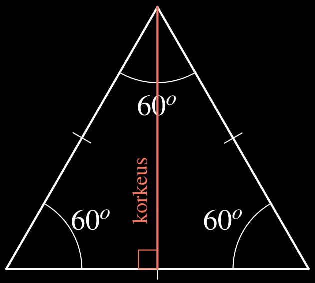
Määritelmä

Kolmiota kutsutaan tasasivuiseksi, jos kaikki sen sivut ovat yhtä pitkiä.

Seuraus

Tasasivuisen kolmion

- *kaikki kulmat ovat* 60^o.
- *kaikki korkeusjanat puolittavat vastakkaisen sivun.*



Pythagoraan lause

Pythagoraan lause

Lause

Olkoot suorakulmaisen kolmion kateetit pituuksiltaan a ja b sekä sen hypotenuusa c. Tällöin

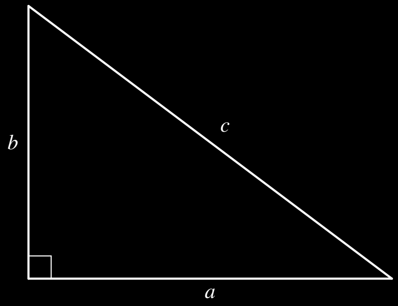
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Seuraus (käänteislause)

Jos kolmion sivujen pituudet a, b ja c toteuttavat Pythagoraan lauseen, niin kolmio on suorakulmainen.

Esimerkki

Tasakylkisen kolmion kyljet ovat 11 cm pitkiä ja sen kanta 9 cm. Lasketaan kolmion korkeus. (HT)



Pisteiden välinen etäisyys

Esimerkki

Selvitetään pisteiden $(-2,1)$ ja $(3,5)$ välinen etäisyys.

- Vaakasuunnassa etäisyys on

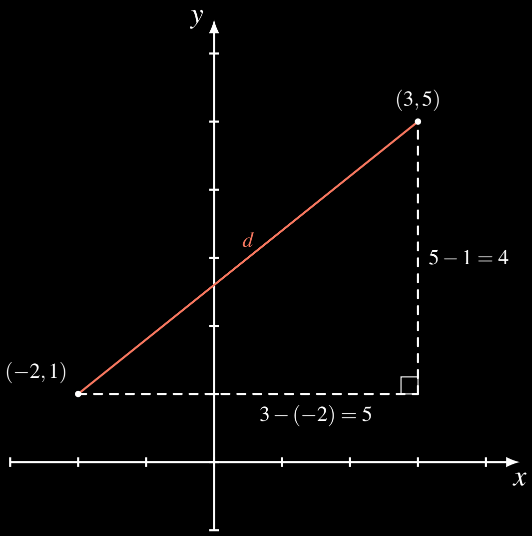
$$3-(-2)=5$$

- ja pystysuunnassa

$$5-1=4.$$

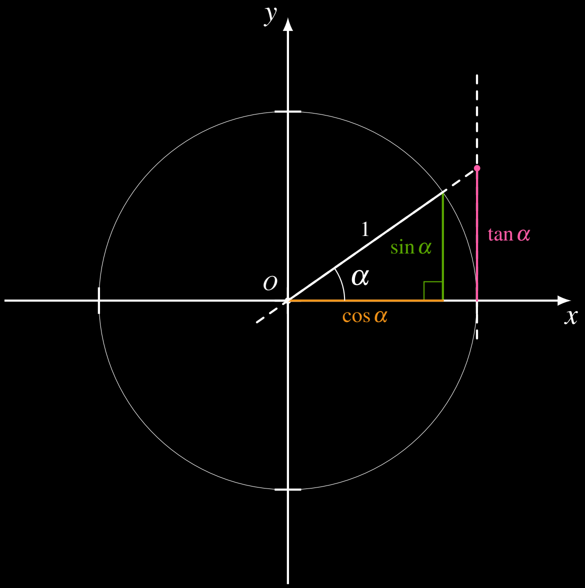
- Hypotenuusan pituus voidaan ratkaista Pythagoraan lauseen avulla:

$$d^2=5^2+4^2=25+16=41 \mid \sqrt{}$$
$$d=\sqrt{41}\ (\approx 6{,}4)$$



Suorakulmaisen kolmion trigonometriaa

Yksikköympyrä

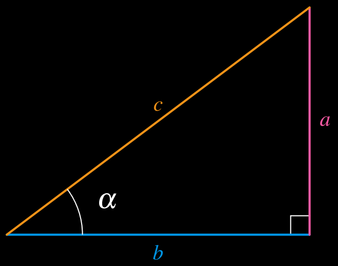


Trigonometriset funktiot

Määritelmä

Suorakulmaisen kolmion kulman α trigonometriset funktiot ovat:

- $$\sin\alpha = \frac{\text{vastakkainen kateetti}}{\text{hypotenuusa}} = \frac{a}{c}$$
- $$\cos\alpha = \frac{\text{viereinen kateetti}}{\text{hypotenuusa}} = \frac{b}{c}$$
- $$\tan\alpha = \frac{\text{vastakkainen kateetti}}{\text{viereinen kateetti}} = \frac{a}{b}$$



Mallintaminen suorakulmaisen kolmion avulla

Sovelluksia

Seuraus

Suorakulmaisia kolmioita ilmenee melkein kaikissa geometriaan liittyvissä aiheissa.

- korkeus ja etäisyys
- kulmat

Lause

Suorakulmaisen kolmion mitat ja kulmat voi ratkaista, jos 90^o kulman lisäksi tunnetaan ainakin:

- kahden sivun pituudet.
  - kulmat $\rightarrow$ trigonometriset funktiot
  - tuntematon sivu $\rightarrow$ Pythagoraan lause
- yhden sivun pituus ja yhden terävän kulman suuruus.
  - trigonometriset funktiot.

Monikulmioita

Suorakulmio

Suorakulmio

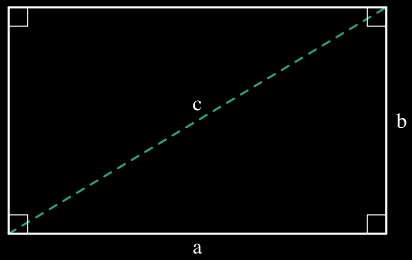
Määritelmä

Suorakulmio on nelikulmio, jonka kaikki kulmat ovat suoria kulmia.

Lause

Jos suorakulmion sivujen pituudet ovat a ja b, niin sen

- *piiri on*
$$p = 2a + 2b$$
- *pinta-ala on*
$$A = ab$$



Seuraus

Suorakulmion lävistäjän c pituuden voi laskea Pythagoraan lauseen avulla

$$a^2 + b^2 = c^2 \iff c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Suunnikas

Suunnikas

Määritelmä

Suunnikas on nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset.

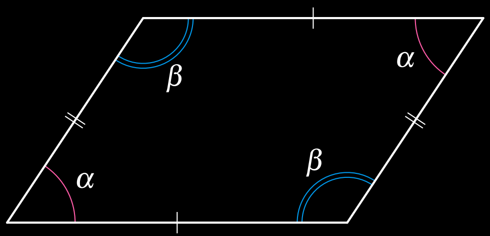
Seuraus

Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret.

Lause

Suunnikkaan vierekkäisten kulmien summa on 180^o, *koska*

$$2\alpha + 2\beta = 360^o \mid : 2$$
$$\alpha + \beta = 180^o$$



Suunnikkaan pinta-ala

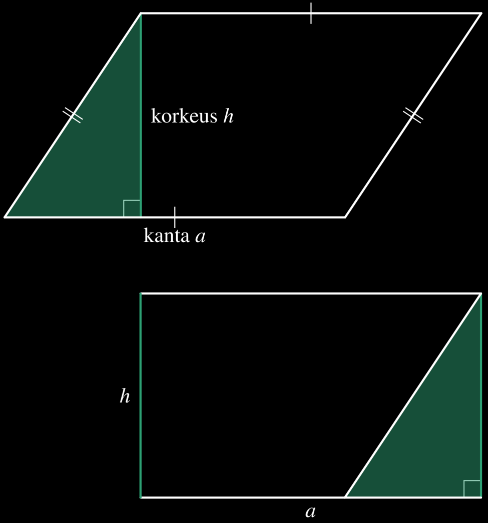
Määritelmä

Suunnikkaan korkeus h on sen vastakkaisten sivujen kohtisuora etäisyys.

Lause

Suunnikkaan pinta-ala A only

$$\begin{aligned} A &= kanta \cdot korkeus \\ &= ah \end{aligned}$$



Muita monikulmioita

Puolisuunnikas

Määritelmä

Puolisuunnikas on nelikulmio, jonka sivuista kaksi ovat yhdensuuntaisia.

Huom.

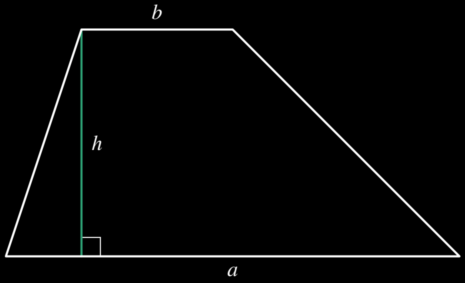
Puolisuunnikkaan sivuilla tai kulmilla ei välttämättä ole samansuuruista paria.

Lause

Puolisuunnikkaan pinta-ala on

$$A = h \cdot \frac{a+b}{2}$$

(HT)



Monikulmiot

Määritelmä

- Monikulmio on suljettu ja itseään leikkaamaton murtoviiva.
- Monikulmiot nimetään niiden kärkipisteiden lukumäärän mukaan.

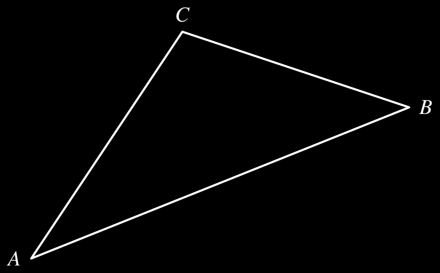
Lause

n-kulmion kulmien summa on

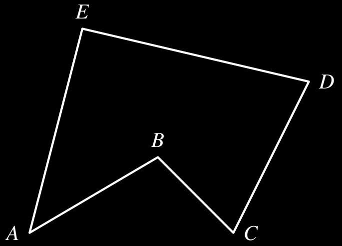
$$(n-2)\cdot 180^o$$

(HT)

Kolmekulmio eli kolmio *ABC*



Viisikulmio *ABCDE*



Säännölliset monikulmiot

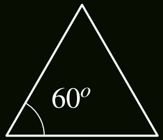
Määritelmä

Monikulmiota kutsutaan säännölliseksi, jos sen kaikki

- sivut ovat yhtä pitkiä ja
- kulmat ovat yhtä suuria.

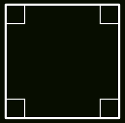
Esimerkki

Tasasivuinen kolmio



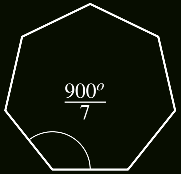
Esimerkki

Neliö



Esimerkki

Seitsenkulmio eli heptagoni



Ympyrä

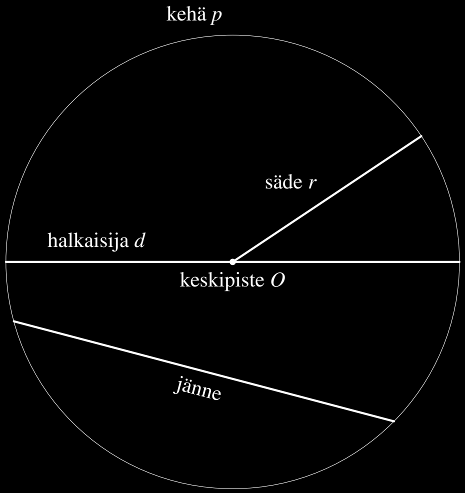
Ympyrään liittyviä pituuksia

Ympyrä

Määritelmä

Ympyrä on joukko pisteitä, joiden etäisyys pisteestä O on r. Ympyrän

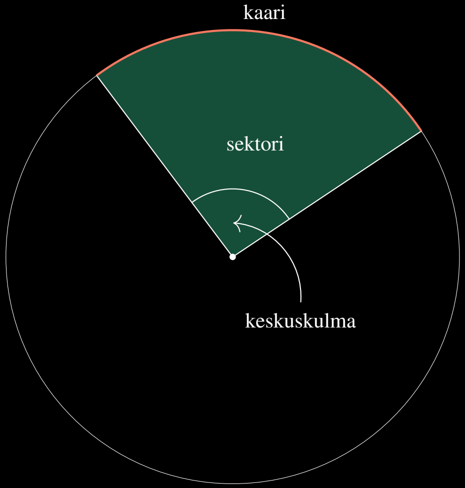
- kehä on näiden pisteiden muodostama joukko.
- keskipiste on se piste, joka on yhtä kaukana kaikista sen kehän pisteistä.
- säde on sen kehän pisteiden etäisyys keskipisteestä.
- halkaisija on jana, joka yhdistää kaksi kehän pistettä ja kulkee ympyrän keskipisteen kautta.
- jänne yhdistää kaksi kehän pistettä.



Ympyrän sektori

Määritelmä

- Keskuskulma on kulma, jonka
  - kärki on ympyrän keskipiste.
  - kyljet ovat ympyrän säteitä.
- Kaari on kahden kehän pisteen välissä oleva kehän osa.
- Sektori on kahden ympyrän säteen ja sen kehän rajoittama alue.



Ympyrään liittyviä pinta-aloja

Ympyrän pinta-aloja

Lause (Ympyrän pinta-ala)

Ympyrän pinta-ala on

$$A = \pi r^2,$$

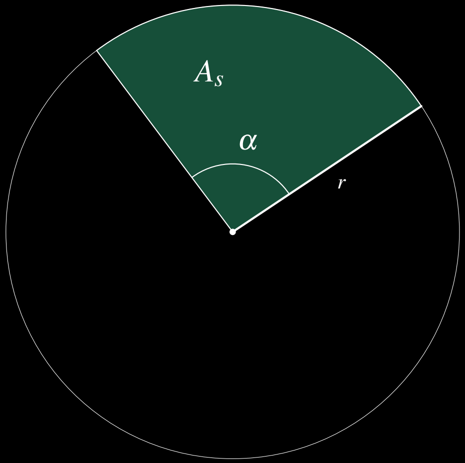
missä r on ympyrän säteen pituus.

Lause (Sektorin pinta-ala)

Ympyrän pinta-ala on

$$A_s = \frac{\alpha}{360^o} \cdot \pi r^2,$$

missä r on ympyrän säteen pituus.



Ympyrän tangentti

Tangentti

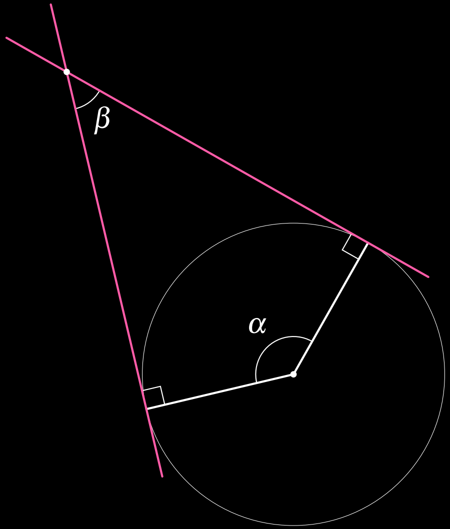
Määritelmä

Ympyrän tangentti on suora, joka leikkaa ympyrän kehän tasan yhdessä pisteessä.

Seuraus

- *Ympyrän tangentti ja säde ovat kohtisuorassa.*
- *Ympyrän ulkopuolisen pisteen kautta voi kulkea tasan kaksi ympyrän tangenttia.*
- *Tangenttikulmalle* β *ja keskuskulmalle* α *pätee*

$$\alpha + \beta = 180^o$$



Yhdenmuotoisuus

Yhdenmuotoiset kuviot

Yhdenmuotoisuus

Määritelmä

Kahta tasokuviota kutsutaan yhdenmuotoisiksi, jos ne voidaan muuttaa toisiksiin

- siirtämällä,
- kiertämällä,
- peilaamalla, tai
- skaalaamalla.

Jos kuviot K_1 ja K_2 ovat yhdenmuotoisia, merkitään

$$K_1 \sim K_2$$

Seuraus

Yhdenmuotoisten monikulmioiden vastinkulmien suuruudet ja vastinsivujen suhteet ovat samat.

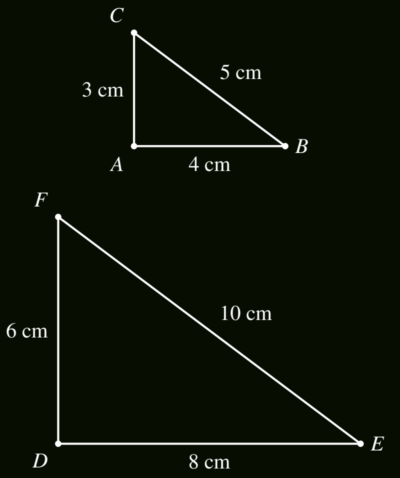
Yhdenmuotoiset kolmiot

Esimerkki

Tutkitaan kolmioita ABC ja DEF, joiden sivujen pituudet tunnetaan.
Lasketaan vastinsivujen suhteet.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{BC}{EF} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{CA}{FD} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Koska suhteet ovat yhtä suuret, niin kolmiot ABC ja DEF ovat yhdenmuotoiset.



Kolmioiden yhdenmuotoisuus

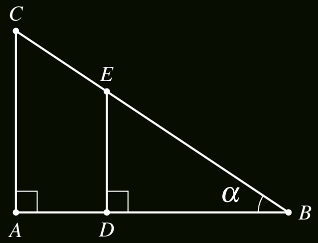
Lause (kk-lause)

Jos kolmion kaksi kulmaa ovat yhtä suuria kuin toisen kolmion vastaavat kulmat, niin kolmiot ovat yhdenmuotoisia.

Huom.

Yllä oleva lause on erityisen hyödyllinen tarkastaltaessa sisäkkäisiä kolmioita.

Esimerkki



Koska molemmilla kolmioilla ABC ja DBE on yksi suorakulma ja

$$\measuredangle EBD = \measuredangle CBA = \alpha,$$

niin kk-lauseen mukaan kolmiot ABC ja DEF ovat yhdenmuotoiset.

Mittakaava

Mittakaava

Määritelmä

Mittakaava

- Kahden yhdenmuotoisen kuvion sivujen pituuksien suhde.
- Merkitään kirjaimella k

Määritelmä (kartat)

- Piirroksia, jotka ovat yhdenmuotoisia jonkin ympäristön kanssa.
- Mittakaava kartan reunassa.
- $$k = \frac{\text{pituus kartalla}}{\text{pituus luonnossa}}$$

Esimerkki

Jos kartan ilmoitettu mittakaava on $k = 1 : 10\,000$, niin 1 cm kartalla on luonnossa

$$k = \frac{1\text{ cm}}{\text{pituus luonnossa}}$$

$$\begin{aligned}\text{pituus luonnossa} &= \frac{1\text{ cm}}{k}\\ &= \frac{1\text{ cm}}{\left(\frac{1}{10\,000}\right)}\\ &= 10\,000\text{ cm}\\ &= 100\text{ m}\end{aligned}$$

Pinta-alojen suhde

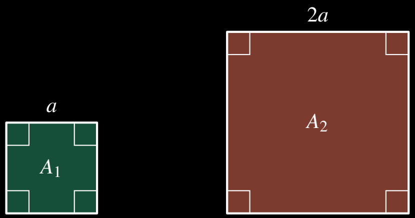
Esimerkki

Tutkitaan kahta neliötä, joista yhden sivujen pituudet ovat a ja toisen $2a$.
Neliöt ovat yhdenmuotoisia ja niiden pituuksien suhde on

$$k = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

Neliöiden pinta-alat ovat $A_1 = a^2$ ja $A_2 = (2a)^2 = 4a^2$, joten niiden pinta-alojen suhde on

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{a^2}{4a^2} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$



Seuraus

Jos yhdenmuotoisten tasokuvioiden pituuksien suhde on k, niin niiden pinta-alojen suhde on k^2.

Avaruuskappaleita

Lieriö

Lieriö

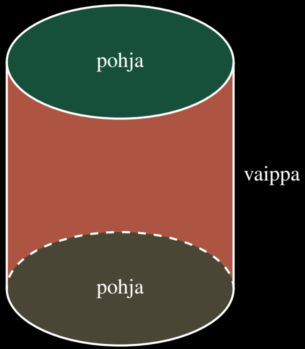
Määritelmä

Lieriö on avaruuskappale, jonka osia ovat:

- samanmuotoiset pohjat ja
- pohjia yhdistävä vaippa.

Huom.

Suoran lieriön vaippa on kohtisuorassa sen pohjia vastaan. Kurssilla käsitellään vain suoria lieriöitä.



Lieriön pinta-ala ja tilavuus

Lause

Lieriön

- vaipan pinta-ala

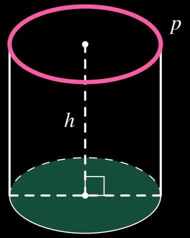
$$A_{vaippa} = ph$$

- kokonaispinta-ala

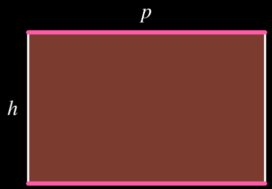
$$A = A_{vaippa} + A_{pohja}$$

- tilavuus

$$V = A_{pohja} \cdot h$$



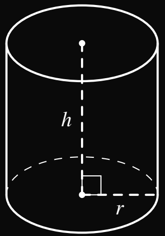
Vaippa avattuna:



Erilaisia lieriöitä

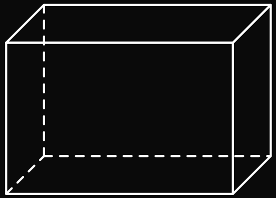
Määritelmä (Ympyrälieriö)

Ympyrälieriö on lieriö, jonka pohja on ympyrän muotoinen.



Määritelmä (särmiöt)

- Särmiön pohja on monikulmio
- Suorakulmainen särmiö $\iff$ pohjana suorakulmio
- Säännöllinen särmiö $\iff$ pohjana säännöllinen monikulmio



Suorakulmainen särmiö

Kartio

Kartio

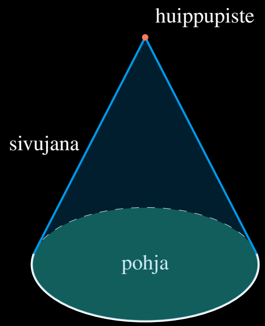
Määritelmä

Kartio on avaruuskappale, joka koostuu

- pohjasta
- huippupisteestä
- sivujanoista

Huom.

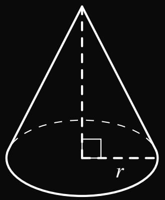
Kurssilla käsitellään vain suoria kartioita, joiden huippupiste on suoraan pohjan keskipisteen yläpuolella.



Erilaisia kartioita

Määritelmä (ympyräkartio)

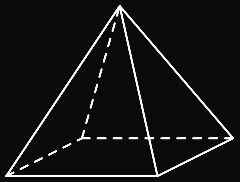
Ympyräkartion pohja on ympyrän muotoinen.



$$A_{\text{pohja}} = \pi r^2$$

Määritelmä (pyramidi)

Pyramidin pohja on monikulmio.
Pyramidia kutsutaan säännölliseksi, jos sen pohja on säännöllinen monikulmio.



Neliöpohjainen pyramidi

pinta-ala ja tilavuus

Lause

Kartion

- kokonaispinta-ala

$$A = A_{vaippa} + A_{pohja}$$

- tilavuus

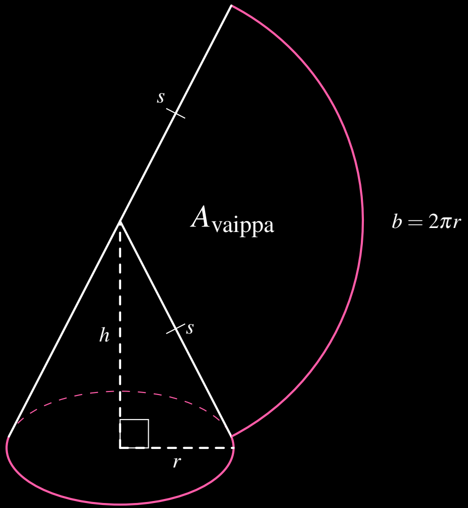
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{pohja} \cdot h$$

Huom.

Ympyräkartion vaipan pinta-ala on

$$A_{\text{vaippa}} = \pi r s$$

Pyramidin vaipan pinta-ala on sen sivutahkojen alojen summa.



Pallo

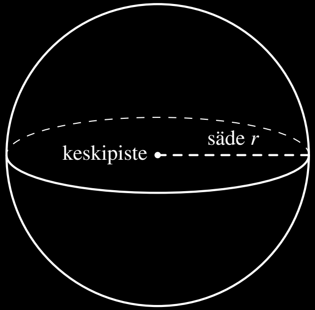
Pallo

Määritelmä

Pallo on avaruuskappale, jonka pisteet ovat samalla etäisyydellä pallon keskipisteestä.

Huom.

Vertaa pallojen ja ympyröiden määritelmiä.



Pinta-ala ja tilavuus

Lause

Pallon

- pinta-ala
$$A = 4\pi r^2$$
- tilavuus
$$\frac{4}{3}\pi r^3$$