*MAB03*

# *Geometria*

Iitin lukio

2023-2024

Aleksi Alenius

# *Sisältö*

# *Kolmioita*

# *Erilaisia kolmioita*

# Kulma

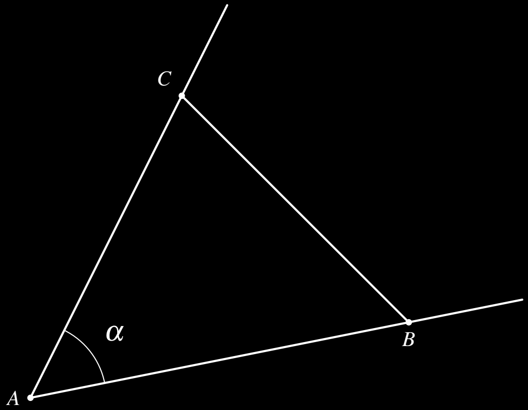
## Määritelmä

Kulma on kahden puolisuoran väliin jäävä tason osa. Kulman nimeämiseen voidaan käyttää

- kreikkalaista kirjainta ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ jne.)
- sen kylkipisteitä ja kärkpistettä (oikea-kärki-vasen).
- monikulmioissa vastaavaa kärkipistettä.

## Esimerkki

Viereisen kuvan kulmaa voidaan kutsua kulmaksi $\alpha$, kulmaksi $BAC$ tai kolmion $ABC$ kulmaksi $A$.

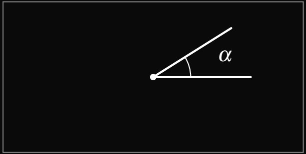


# Kulmien luokittelu

## *Määritelmä*

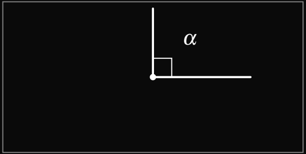
**Terävä kulma**

$(0 < \alpha < 90^o)$



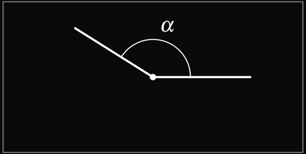

**Suora kulma**

$(\alpha = 90^o)$



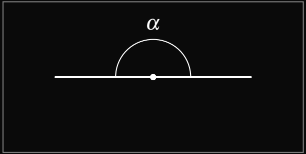

**Tylppä kulma**

$(90^o < \alpha < 180^o)$



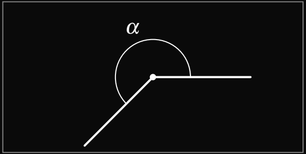

**Oikokulma**

$(\alpha = 180^o)$



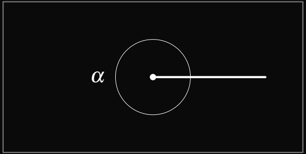

**Kupera kulma**

$(180^o < \alpha < 360^o)$




**Täysi kulma**

$(\alpha = 360^o)$



# Kolmio

*Määritelmä*

**Kolmio** on monikulmio, jolla on kolme kulmaa.

*Seuraus*

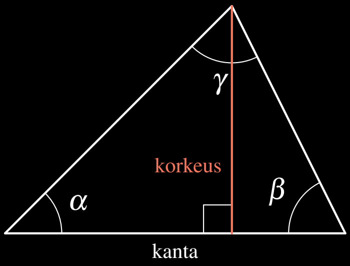
*Kolmiolla on seuraavat ominaisuudet:*

- *kulmien summa on* $180^o$ *(HT)*

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^o$$

- *pinta-ala on*

$$A = \frac{kanta \cdot korkeus}{2}$$



# Suorakulmainen kolmio

**Määritelmä**

Suorakulmainen kolmio on kolmio, jonka kulmista yksi on $90^o$. Suorakulmaisen komion

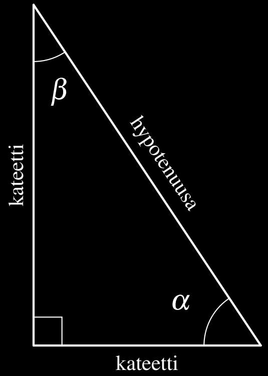
- pisintä sivua kutsutaan hypotenuusaksi.
- lyhyempiä sivuja kutsutaan kateeteiksi.

**Seuraus**

- *Suorakulmaisen kolmion muut kulmat ovat teräviä ($0 < \alpha,\ \beta < 90^o$) ja niiden summa*

$$\alpha + \beta = 90^o.$$

- *Kateetit ovat suoran kulman kylkisivuja.*



# Tasakylkinen kolmio

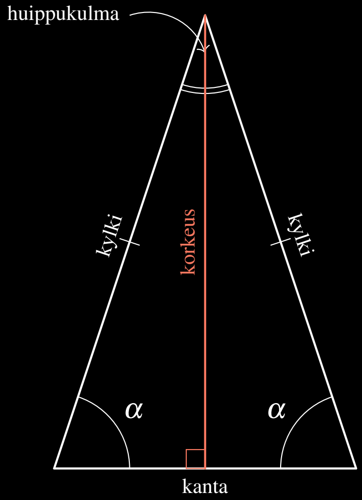
## *Määritelmä*

Kolmiota kutsutaan tasakylkiseksi, jos sillä on kaksi samanmittaista sivua. Tällöin

- yhtä pitkiä sivuja kutsutaan kolmion kyljiksi ja jäljelle jäävää sivua sen kannaksi.
- yhtä pitkien sivujen muodostamaa kulmaa kutsutaan huippukulmaksi.
- kannan ja kylkien muodostamia kulmia kutsutaan kantakulmiksi ($\alpha$).

## *Seuraus*

- *Kantakulmat ($\alpha$) ovat yhtä suuria.*
- *Huippukulmasta piirretty korkeusjana puolittaa tasakylkisen kolmion kahteen samanlaiseen suorakulmaiseen kolmioon.*



# Tasasivuinen kolmio

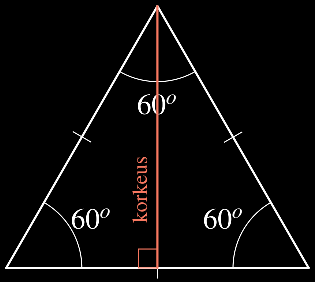
## *Määritelmä*

Kolmiota kutsutaan tasasivuiseksi, jos kaikki sen sivut ovat yhtä pitkiä.

## *Seuraus*

*Tasasivuisen kolmion*

- *kaikki kulmat ovat* $60^o$.
- *kaikki korkeusjanat puolittavat puolittavat vastakkaisen sivun.*



# Pythagoraan lause

# Pythagoraan lause

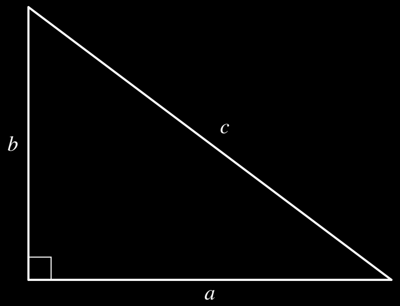
**Lause**

*Olkoot suorakulmaisen kolmion kateetit pituuksiltaan $a$ ja $b$ sekä sen hypotenuusa $c$. Tällöin*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

**Lause (käänteislause)**

*Jos kolmion sivujen pituudet $a$, $b$ ja $c$ toteuttavat Pythagoraan lauseen, niin kolmio on suorakulmainen.*




**Esimerkki**

Tasakylkisen kolmion kyljet ovat 11 cm pitkiä ja sen kanta 9 cm. Lasketaan kolmion korkeus. (HT)

# *Pisteiden välinen etäisyys*

## *Esimerkki*

Selvitetään pisteiden $(-2,1)$ ja $(3,5)$ välinen etäisyys.

- Vaakasuunnassa etäisyys on

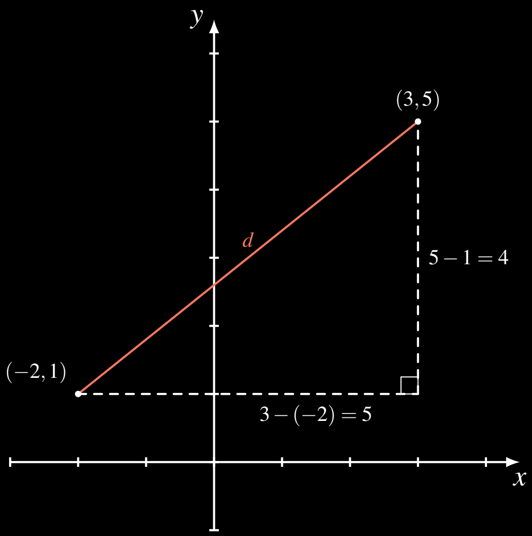
$$3-(-2)=5$$

- ja pystysuunnassa

$$5-1=4.$$

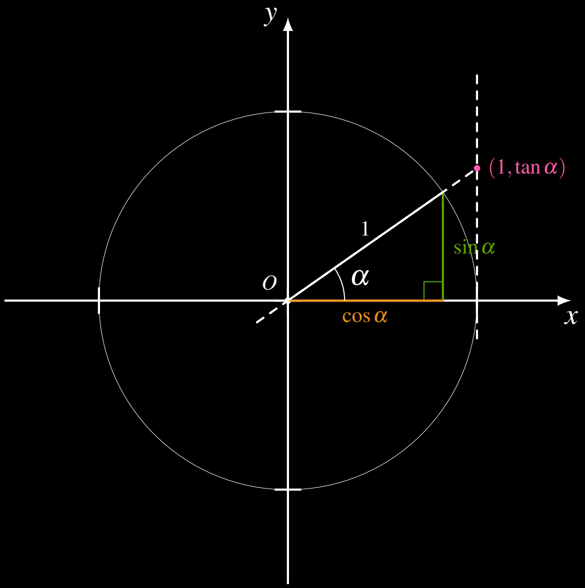
- Hypotenuusan pituus voidaan ratkaista Pythagoraan lauseen avulla:

$$d^2=5^2+4^2=25+16=41 \mid\sqrt{\phantom{x}}$$
$$d=\sqrt{41}\ (\approx 6{,}4)$$



# *Suorakulmaisen kolmion trigonometriaa*

# Yksikköympyrä

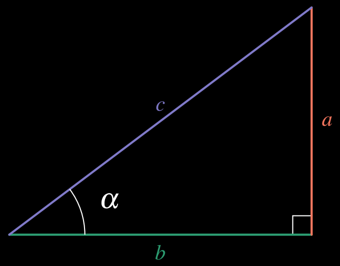


# Trigonometriset funktiot

## Määritelmä

Suorakulmaisen kolmion kulman $\alpha$ trigonometriset funktiot ovat:

- $$\sin\alpha = \frac{\text{vastakkainen kateetti}}{\text{hypotenuusa}} = \frac{a}{c}$$
- $$\cos\alpha = \frac{\text{viereinen kateetti}}{\text{hypotenuusa}} = \frac{b}{c}$$
- $$\tan\alpha = \frac{\text{vastakkainen kateetti}}{\text{viereinen kateetti}} = \frac{a}{b}$$



# *Mallintaminen suorakulmaisen kolmion avulla*

# Sovelluksia

**Seuraus**

Suorakulmaisia kolmioita ilmenee melkein kaikissa geometriaan liittyvissä aiheissa.

- korkeus ja etäisyys
- kulmat

**Lause**

Suorakulmaisen kolmion mitat ja kulmat voi ratkaista, jos $90^o$ kulman lisäksi tunnetaan ainakin:

- kahden sivun pituudet.
  - kulmat $\to$ trigonometriset funktiot
  - tuntematon sivu $\to$ Pythagoraan lause
- yhden sivun pituus ja yhden terävän kulman suuruus.
  - trigonometriset funktiot.

# *Monikulmioita*

# *Suorakulmio*

# Suorakulmio

## Määritelmä

Suorakulmio on nelikulmio, jonka kaikki kulmat ovat suoria kulmia.

## Lause

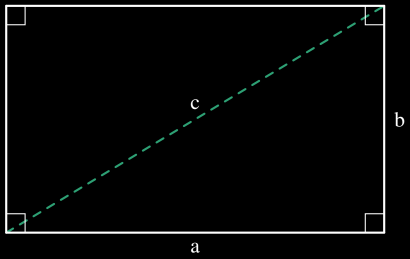
*Jos suorakulmion sivujen pituudet ovat a ja b, niin sen*

- *piiri on*

$$p = 2a + 2b$$

- *pinta-ala on*

$$A = ab$$




## Seuraus

*Suorakulmion lävistäjän c pituuden voi laskea Pythagoraan lauseen avulla*

$$a^2 + b^2 = c^2 \iff c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

# Suunnikas

# Suunnikas

**Määritelmä**

Suunnikas on nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset.

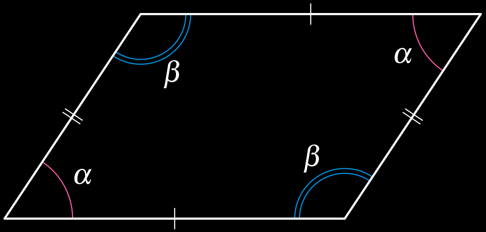
**Seuraus**

*Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret.*

**Lause**

*Suunnikkaan vierekkäisten kulmien summa on* $180^o$*, koska*

$$2\alpha + 2\beta = 360^o \mid : 2$$
$$\alpha + \beta = 180^o$$



# *Suunnikkaan pinta-ala*

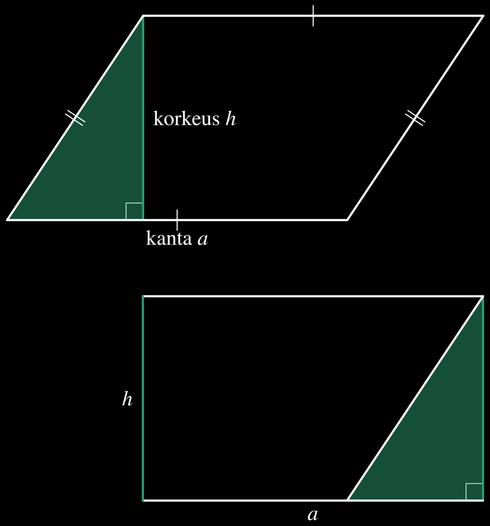
*Määritelmä*

Suunnikkaan korkeus $h$ on sen vastakkaisten sivujen kohtisuora etäisyys.

*Lause*

*Suunnikkaan pinta-ala A only*

$$\begin{aligned} A &= kanta \cdot korkeus \\ &= ah \end{aligned}$$



# Muita monikulmioita

# Puolisuunnikas

**Määritelmä**

Puolisuunnikas on nelikulmio, jonka sivuista kaksi ovat yhdensuuntaisia.

**Huom.**

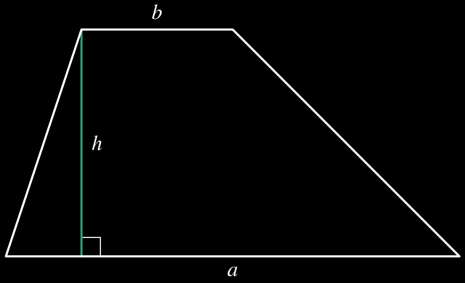
Puolisuunnikkaan sivuilla tai kulmilla ei välttämättä ole samansuuruista paria.

**Lause**

*Puolisuunnikkaan pinta-ala on*

$$A = h \cdot \frac{a+b}{2}$$

(HT)



# Monikulmiot

### *Määritelmä*

- Monikulmio on suljettu ja itseään leikkaamaton murtoviiva.
- Monikulmiot nimetään niiden kärkipisteiden lukumäärän mukaan.

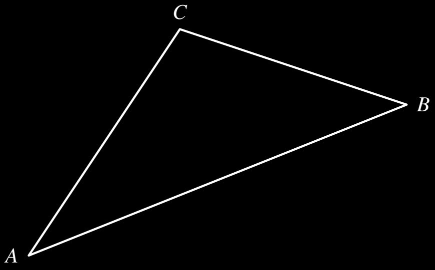
### *Lause*

*n-kulmion kulmien summa on*

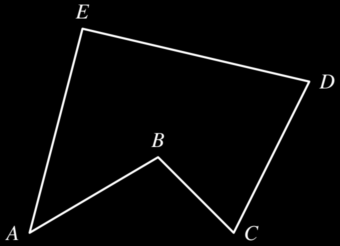
$$(n-2)\cdot 180^o$$

*(HT)*

Kolmekulmio eli kolmio $ABC$




Viisikulmio $ABCDE$



# Säännölliset monikulmiot

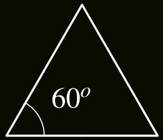
### Määritelmä

Monikulmiota kutsutaan säännölliseksi, jos sen kaikki

- sivut ovat yhtä pitkiä ja
- kulmat ovat yhtä suuria.

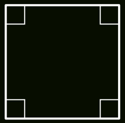
### Esimerkki

Tasasivuinen kolmio



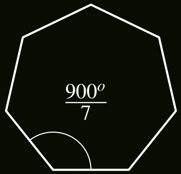

### Esimerkki

Neliö



### Esimerkki

Seitsenkulmio eli heptagoni



# *Ympyrä*

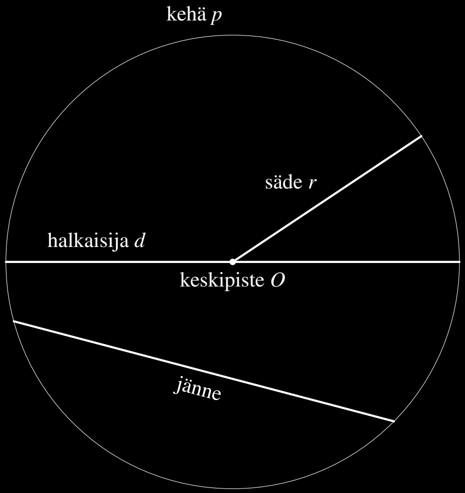
# *Ympyrään liittyviä pituuksia*

# Ympyrä

## Määritelmä

Ympyrä on joukko pisteitä, joiden etäisyys pisteestä $O$ on $r$. Ympyrän

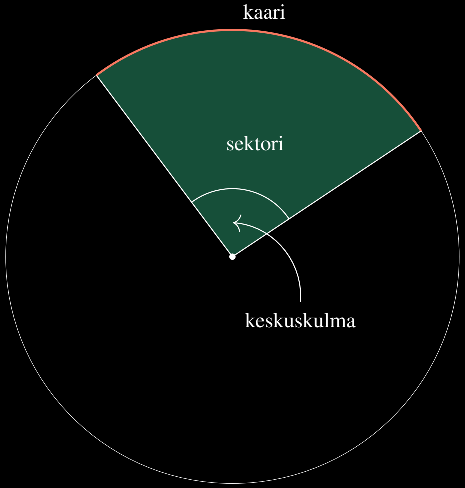
- kehä on näiden pisteiden muodostama joukko.
- keskipiste on se piste, joka on yhtä kaukana kaikista sen kehän pisteistä.
- säde on sen kehän pisteiden etäisyys keskipisteestä.
- halkaisija on jana, joka yhdistää kaksi kehän pistettä ja kulkee ympyrän keskipisteen kautta.
- jänne yhdistää kaksi kehän pistettä.



# *Ympyrän sektori*

### *Määritelmä*

- Keskuskulma on kulma, jonka
  - kärki on ympyrän keskipiste.
  - kyljet ovat ympyrän säteitä.
- Kaari on kahden kehän pisteen välissä oleva kehän osa.
- Sektori on kahden ympyrän säteen ja sen kehän rajoittama alue.



# Ympyrään liittyviä pinta-aloja

# Ympyrän pinta-aloja

**Lause (Ympyrän pinta-ala)**

Ympyrän pinta-ala on

$$A = \pi r^2,$$

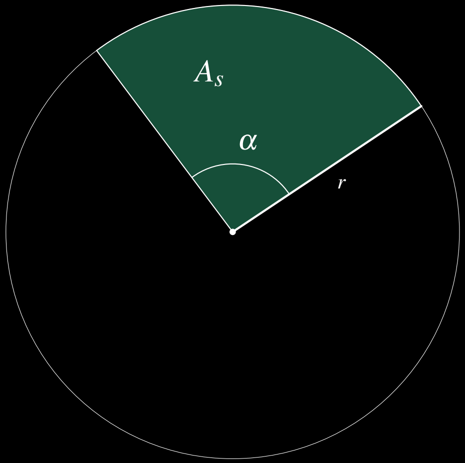
missä $r$ on ympyrän säteen pituus.

**Lause (Sektorin pinta-ala)**

Ympyrän pinta-ala on

$$A_s = \frac{\alpha}{360^o} \cdot \pi r^2,$$

missä $r$ on ympyrän säteen pituus.



# *Ympyrän tangentti*

# *Tangentti*

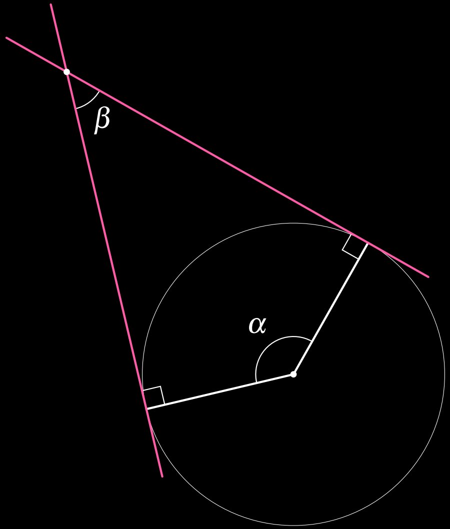
### *Määritelmä*

Ympyrän tangentti on suora, joka leikkaa ympyrän kehän tasan yhdessä pisteessä.

### *Seuraus*

- *Ympyrän tangentti ja säde ovat kohtisuorassa.*
- *Ympyrän ulkopuolisen pisteen kautta voi kulkea tasan kaksi ympyrän tangenttia.*
- *Tangenttikulmalle $\beta$ ja keskuskulmalle $\alpha$ pätee*

$$\alpha + \beta = 180^o$$



# *Yhdenmuotoisuus*

# *Yhdenmuotoiset kuviot*

# Yhdenmuotoisuus

## Määritelmä

Kahta tasokuviota kutsutaan yhdenmuotoisiksi, jos ne voidaan muuttaa toisiksiin

- siirtämällä,
- kiertämällä,
- peilaamalla, tai
- skaalaamalla.

Jos kuviot $K_1$ ja $K_2$ ovat yhdenmuotoisia, merkitään

$$K_1 \sim K_2$$

## Seuraus

*Yhdenmuotoisten monikulmioiden vastinkulmien suuruudet ja vastinsivujen suhteet ovat samat.*

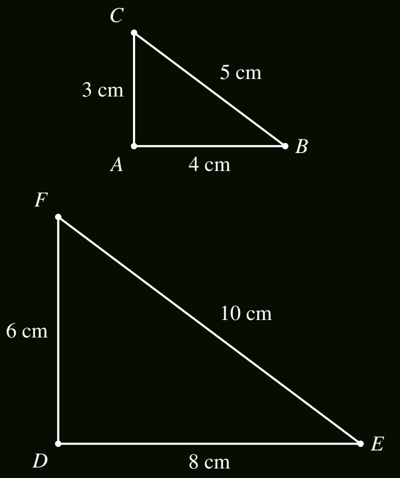
# Yhdenmuotoiset kolmiot

## Esimerkki

Tutkitaan kolmioita $ABC$ ja $DEF$, joiden sivujen pituudet tunnetaan.
Lasketaan vastinsivujen suhteet.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{BC}{EF} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{CA}{FD} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Koska suhteet ovat yhtä suuret, niin kolmiot $ABC$ ja $DEF$ ovat yhdenmuotoiset.



# Kolmioiden yhdenmuotoisuus

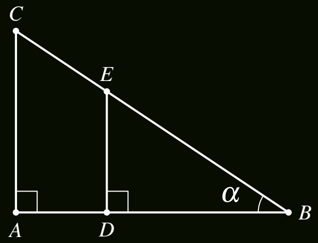
**Lause (kk-lause)**

*Jos kolmion kaksi kulmaa ovat yhtä suuria kuin toisen kolmion vastaavat kulmat, niin kolmiot ovat yhdenmuotoisia.*

**Huom.**

Yllä oleva lause on erityisen hyödyllinen tarkastaltaessa sisäkkäisiä kolmioita.

**Esimerkki**




Koska molemmilla kolmioilla $ABC$ ja $DBE$ on yksi suorakulma ja

$$\measuredangle EBD = \measuredangle CBA = \alpha,$$

niin kk-lauseen mukaan kolmiot $ABC$ ja $DEF$ ovat yhdenmuotoiset.

# Mittakaava

# Mittakaava

## Määritelmä

**Mittakaava**

- Kahden yhdenmuotoisen kuvion sivujen pituuksien suhde.
- Merkitään kirjaimella $k$

## Määritelmä (kartat)

- Piirroksia, jotka ovat yhdenmuotoisia jonkin ympäristön kanssa.
- Mittakaava kartan reunassa.
- $$k = \frac{\text{pituus kartalla}}{\text{pituus luonnossa}}$$

## Esimerkki

Jos kartan ilmoitettu mittakaava on $k = 1 : 10\,000$, niin 1 cm kartalla on luonnossa

$$k = \frac{1\text{ cm}}{\text{pituus luonnossa}}$$

$$\begin{aligned}\text{pituus luonnossa} &= \frac{1\text{ cm}}{k}\\ &= \frac{1\text{ cm}}{\left(\frac{1}{10\,000}\right)}\\ &= 10\,000\text{ cm}\\ &= 100\text{ m}\end{aligned}$$

# Pinta-alojen suhde

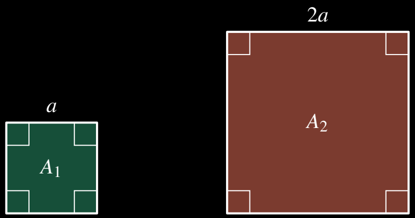
## Esimerkki

Tutkitaan kahta neliötä, joista yhden sivujen pituudet ovat $a$ ja toisen $2a$.
Neliöt ovat yhdenmuotoisia ja niiden pituuksien suhde on

$$k = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

Neliöiden pinta-alat ovat $A_1 = a^2$ ja $A_2 = (2a)^2 = 4a^2$, joten niiden pinta-alojen suhde on

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{a^2}{4a^2} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$




## Seuraus

*Jos yhdenmuotoisten tasokuvioiden pituuksien suhde on $k$, niin niiden pinta-alojen suhden on $k^2$.*

# *Avaruuskappaleita*

# *Lieriö*

# *Lieriö*

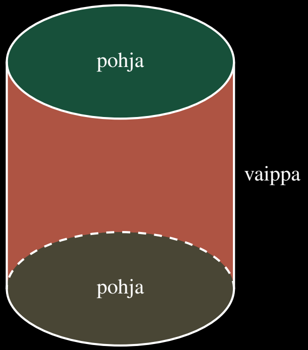
*Määritelmä*

Lieriö on avaruuskappale, jonka osia ovat:

- samanmuotoiset pohjat ja
- pohjia yhdistävä vaippa.

*Huom.*

Suoran lieriön vaippa on kohtisuorassa sen pohjia vastaan. Kurssilla käsitellään vain suoria lieriöitä.



# Lieriön pinta-ala ja tilavuus

**Lause**

Lieriön

- vaipan pinta-ala

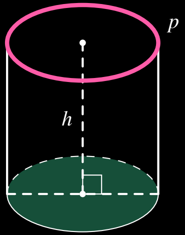
$$A_{vaippa} = ph$$

- kokonaispinta-ala

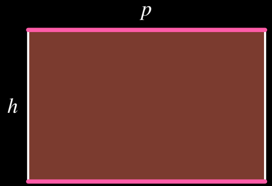
$$A = A_{vaippa} + A_{pohja}$$

- tilavuus

$$V = A_{pohja} \cdot h$$



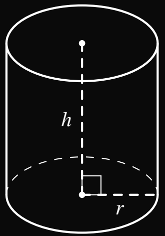

Vaippa avattuna:



# Erilaisia lieriöitä

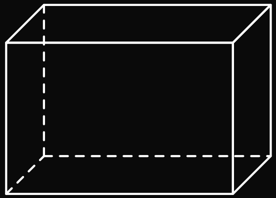
### *Määritelmä (Ympyrälieriö)*

Ympyrälieriö on lieriö, jonka pohja on ympyrän muotoinen.




### *Määritelmä (särmiöt)*

- Särmiön pohja on monikulmio
- Suorakulmainen särmiö $\Longleftrightarrow$ pohjana suorakulmio
- Säännöllinen särmiö $\Longleftrightarrow$ pohjana säännöllinen monikulmio



Suorakulmainen särmiö

# *Kartio*

# Kartio

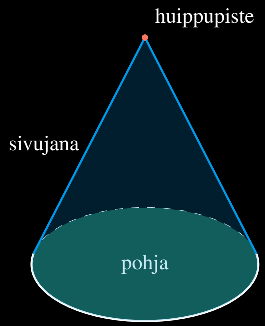
### *Määritelmä*

Kartio on avaruuskappale, joka koostuu

- pohjasta
- huippupisteestä
- sivujanoista

### *Huom.*

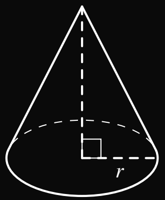
Kurssilla käsitellään vain suoria kartioita, joiden huippupiste on suoraan pohjan keskipisteen yläpuolella.



# Erilaisia kartioita

*Määritelmä (ympyräkartio)*

Ympyräkartion pohja on ympyrän muotoinen.

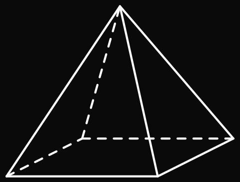



$$A_{\text{pohja}} = \pi r^2$$

*Määritelmä (pyramidi)*

Pyramidin pohja on monikulmio.

Pyramidia kutsutaan säännölliseksi, jos sen pohja on säännöllinen monikulmio.



Neliöpohjainen pyramidi

# pinta-ala ja tilavuus

**Lause**

*Kartion*

- *kokonaispinta-ala*

$$A = A_{vaippa} + A_{pohja}$$

- *tilavuus*

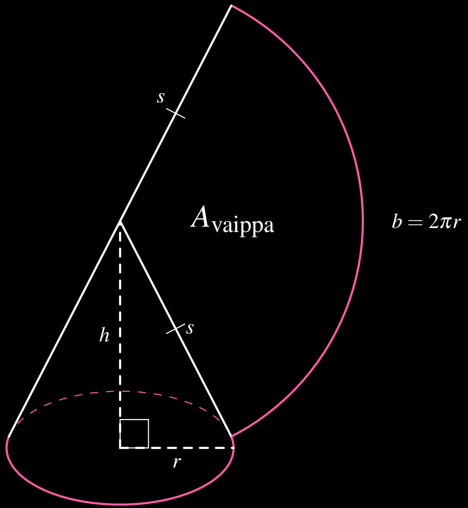
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{pohja} \cdot h$$

**Huom.**

Ympyräkartion vaipan pinta-ala on

$$A_{\mathrm{vaippa}} = \pi r s$$

Pyramidin vaipan pinta-ala on sen sivutahkojen alojen summa.



# *Pallo*

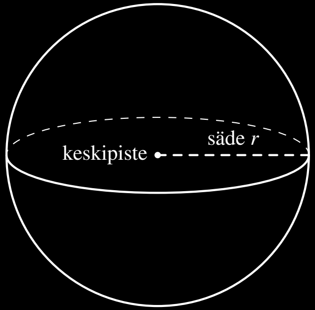
# Pallo

*Määritelmä*

Pallo on avaruuskappale, jonka pisteet ovat samalla etäisyydellä pallon keskipisteestä.

*Huom.*

Vertaa pallojen ja ympyröiden määritelmiä.



# Pinta-ala ja tilavuus

**Lause**

Pallon

- pinta-ala
$$A = 4\pi r^2$$
- tilavuus
$$\frac{4}{3}\pi r^3$$