MAB02

Lausekkeet ja yhtälöt

Iitin lukio

2023-2024

Aleksi Alenius

Sisältö

1. Polynomilausekkeita

- Sieventäminen
- Lausekkeiden muodostaminen

2. Funktioita ja yhtälöitä

- Ensimmäisen asteen polynomi ja yhtälö
- Toisen asteen polynomifunktio
- Toisen asteen yhtälö
- Erikoistapauksia
- Matemaattisena mallina
- Sovelluksia

3. Lukujonoja ja summia

- Lukujono
- Aritmeettinen jono
- Aritmeettinen summa
- Aritmeettinen jono mallina
- Geometrinen jono
- Geometrinen summa
- Geometrinen jono mallina

Polynomilausekkeita

Sieventäminen

Lauseke

Määritelmä

Lauseke on yhdistelmä, joka voi sisältää seuraavia osia:

- lukuja
- kirjaimia
- laskutoimitusmerkkejä ($+$, $-$, $\cdot$ jne.)
- sulkuja

Esimerkki

$$1+1 \qquad x^2+y^2$$

$$\frac{\sqrt{x+1}}{y} \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i$$

Sanastoa

Määritelmä

- Termi
  - Lausekkeen yhteenlaskettavat
- Muuttuja
  - Symboli, joka edustaa jotakin lukuarvoa.
  - Arvoa ei aina tunneta.

Esimerkki

Lauseekkeessa

$$1+1$$

on kaksi termiä (1 ja 1) eikä yhtään muuttujaa.

Sen sijaan lausekkeessa

$$x^2+x+1$$

on kolme termiä (x^2, x ja 1) sekä yksi muuttuja (x).

Sieventäminen

Määritelmä

Lausekkeen sieventäminen tarkoittaa sen kirjoittamista uudelleen yksinkertaisemmassa muodossa. Sieventäminen ei muuta lausekkeen arvoa!

Lause (Sievennyssääntöjä)

- *Laskujärjestys*
- *Sulut yhteenlaskussa (merkkisäännöt)*

$$a+(-b)=a-b \qquad a-(+b)=a-b \qquad a-(-b)=a+b$$

- *Kertolaskun osittelulaki*

$$a(b+c)=ab+ac$$

- *Potenssien laskusäännöt*

Sievennystä

Määritelmä

Lausekkeet voidaan nimetä esimerkiksi kirjaimin. Lausekkeen muuttuja(t) kirjoitetaan sulkuihin kirjaimen jälkeen.

Esimerkki

Sievennetään lausekkeet A ja $P(x)$, kun

1. $$A = 5 + 2 \cdot (3 - 4^2)$$
2. $$P(x) = (5x + 3)(4x - 2)$$

Polynomi

Määritelmä

- Lauseketta kutsutaan polynomiksi, jos sen termit ovat jonkin muuttujan ei-negatiivisten kokonaislukupotenssien monikertoja.
- Polynomin aste on sen muuttujan korkein potenssi.

Esimerkki

Lauseke

$$x^2 + 2x + 1$$

on polynomi. Sen muuttuja on x ja aste on 2.
Lauseke voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$x^2 + 2 \cdot x^1 + 1 \cdot x^0$$

Lausekkeiden muodostaminen

Lausekkeen arvo

Seuraus

Muuttujia sisältävä lauseke voidaan sieventää yksittäiseksi lukuarvoksi, jos sen muuttujien tilalle sijoitetaan lukuja.

Esimerkki

Aiemmin sievensimme lausekkeen $P(x)$. Lasketaan sen arvo, kun $x = 2$:

$$\begin{aligned} P(x) &= 20x^2 + 2x - 6 \\ P(2) &= 20 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 6 \\ &= 20 \cdot 4 + 4 - 6 \\ &= 80 - 2 \\ &= 78 \end{aligned}$$

Sanotaan, että lausekkeen $P(x)$ arvo on 78, kun $x = 2$.

Lausekkeet mallina

Seuraus

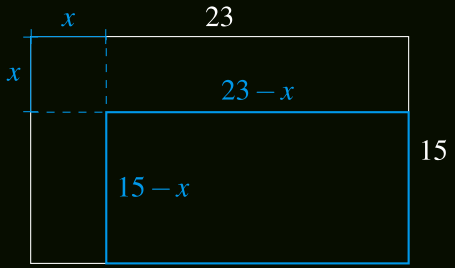
Lausekkeita voidaan käyttää erilaisten ilmiöiden kuvaamiseen.

Esimerkki

Lehmäaitaus on muodoltaan suorakulmio, jonka sivujen mitat ovat 15 ja 23 metriä. Molempien sivujen aitoja lyhennetään x metriä. Muodosta lauseke, joka kuvaa aitauksen pinta-alaa lyhennyksen jälkeen.

Olkoot suorakulmion pinta-ala $A(x)$, jolloin:

$$\begin{aligned} A(x) &= \text{kanta} \ \cdot \ \text{korkeus} \\ &= (23-x)(15-x) \\ &= (23-x)\cdot 15 + (23-x)\cdot(-x) \\ &= 345 - 15x - 23x + x^2 \\ &= x^2 - 38x + 345 \end{aligned}$$



Funktioita ja yhtälöitä

Ensimmäisen asteen polynomi ja yhtälö

Polynomifunktio

Määritelmä (Reaalifunktio)

Reaalifunktio f on yksikäsitteinen sääntö, joka liittää jokaisen määrittelyjoukkonsa luvun x johonkin arvoon $f(x)$.
Funktion sääntöä kuvataan jollakin lausekkeella $f(x)$.

Määritelmä (Polynomifunktio)

Polynomifunktio on funktio, jonka lauseke on polynomi.

1. asteen polynomifunktio

Määritelmä

1. asteen polynomifunktio on funktio, jonka lauseke on 1. asteen polynomi. Se on esitettävissä muodossa

$$f(x) = ax + b,$$

missä

- a ja b ovat reaalilukuja.
- $a \neq 0$.

Esimerkki

Funktio $f(x) = 2x - 3$ on 1. asteen polynomifunktio. Sen arvo kohdassa $x = 3$ on

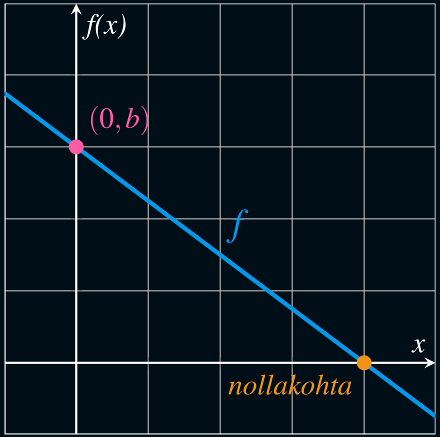
$$f(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 6 - 3 = 3.$$

Kuvaaja

Seuraus

1. asteen funktion $f(x) = ax + b$ kuvaaja on suora.

- *Kuvaaja laskee, jos $a < 0$, ja nousee, jos $a > 0$.*
- *Kuvaaja leikkaa y-akselin pisteessä $(0, b)$*
- *Kuvaajalla on täsmälleen yksi nollakohta.*
  - *Ratkaistavissa yhtälöstä $f(x) = 0$*



Esimerkki

Esimerkki

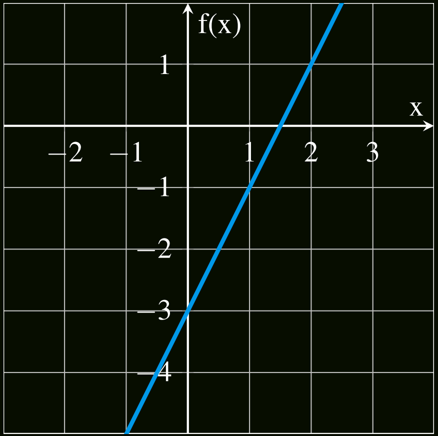
Tutkitaan aiemman 1. asteen polynomifunktion

$$f(x) = 2x - 3$$

kuvaajaa. Nollakohta voidaan laskea ratkaisemalla:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 2x - 3 &= 0 \\ 2x &= 3 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Kuvaaja leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -3)$ ja se on nouseva, koska $2 > 0$.



Toisen asteen polynomifunktio

Johdanto

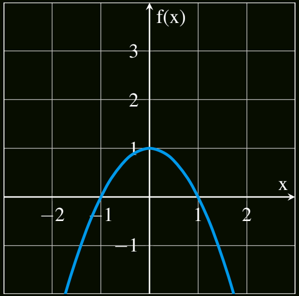
Esimerkki

Tutkitaan funktion

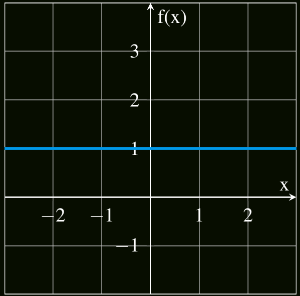
$$f(x) = ax^2 + 1$$

kuvaajaa, kun

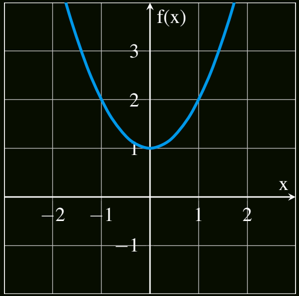
$a < 0$



$a = 0$



$a > 0$



Paraabeli

Määritelmä

Funktiota f kutsutaan 2. asteen polynomifunktioksi, jos sen lauseke voidaan esittää muodossa

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

missä

- a,b ja c ovat reaalilukuja
- $a \neq 0$

Seuraus

2. asteen polynomifunktion kuvaaja on paraabeli, joka

- *aukeaa alaspäin, jos* $a < 0$
- *aukeaa ylöspäin, jos* $a > 0$

Paraabelin ominaisuuksia

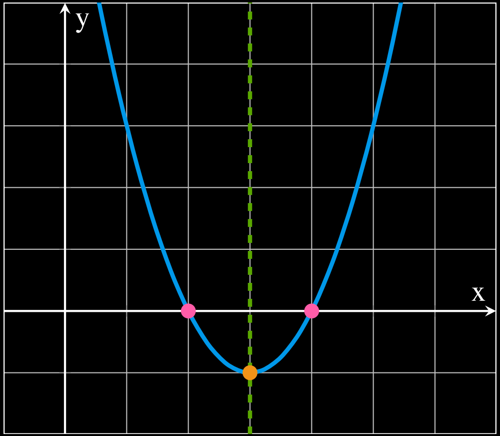
Määritelmä

Paraabelin kuvaajan ominaisuuksia:

- nollakohdat
- huippu
- symmetria-akseli

Huom.

Paraabelilla on korkeintaan 2 nollakohtaa.



Toisen asteen yhtälö

Ratkaisukaava

Määritelmä

2. asteen yhtälö on muotoa

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Huom.

Toisen asteen yhtälön ratkaiseminen on käytännössä paraabelin nollakohtien etsimistä.
$\implies$ ratkaisuja on korkeintaan 2.

Seuraus (2. asteen ratkaisukaava)

Toisen asteen yhtälön ratkaisut saadaan kaavasta

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esimerkki

Ratkaistaan yhtälö $x^2 + 2 = x$.

Erikoistapauksia

Puuttuvia termejä

Esimerkki

Seuraavista 2. asteen polynomiyhtälöistä puuttuu 1. asteen termit. Ratkaistaan

- $2x^2 - 6 = 0$
- $x^2 + 1 = 0$

Seuraus

Jos polynomifunktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ kerroin $b = 0$, niin sen nollakohtien ratkaiseminen ei välttämättä vaadi ratkaisukaavan käyttöä.

$$\begin{aligned} f(x) = ax^2 + c &= 0 \\ ax^2 &= -c \\ x^2 &= \frac{-c}{a} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{-c}{a}} \end{aligned}$$

Puuttuva vakiotermi

Esimerkki

Seuraavista 2. asteen polynomiyhtälöistä puuttuu vakiotermi. Ratkaistaan

- $x(x+3)=0$
- $-x^2+x=-8x+2x^2$

Seuraus

Jos polynomifunktion $f(x)=ax^2+bx+c$ kerroin $c=0$, niin sen nollakohdat voidaan ratkaista tulon nollasäännöllä:

$$\begin{aligned} f(x)=ax^2+bx&=0\\ x(ax+b)&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ ax+b=0 \iff x=\frac{-b}{a} \end{cases}$$

Matemaattisena mallina

Mallinnus 2. asteen polynomifunktiolla

Seuraus

2. asteen polynomifunktioita voidaan käyttää muun muassa seuraavien ilmiöiden mallintamiseen:

- *Tasaisesti kiihtyvä liike*
  - $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
  - *heittoliike, putoamisliike, jarrutus jne.*
- *erilaiset pinta-alan muutokset*
- *kaaret*
  - *sillat, rakennukset, jotkin luonnonmuodostumat*
  - *roikkuvat ketjut tai narut*

Huom.

Yllä oleva lista ei ole tyhjentävä!

Sovelluksia

Ongelmanratkaisu

Vaiheet

1. Ymmärrä ongelma.
   - Mitä tiedetään?
   - Mitä halutaan tietää?
2. Muodosta suunnitelma.
   - Oletko nähnyt vastaavaa ongelmaa?
   - Liittyykö ongelma johonkin tuntemaasi asiaan?
   - Voiko ongelman esittää toisella tavalla?
     - Kaava, kuva tai molemmat?
3. Toteuta suunnitelma.
   - Tarkista jokainen vaihe.
4. Tutki vastausta.
   - Onko vastaus järkevä?
   - Voiko vastauksen saada toisella tavalla?

Lukujonoja ja summia

Lukujono

Lukujono

Määritelmä

Lukujono on järjestetty luettelo lukuja. Lukujonon muodostavia lukuja kutsutaan sen jäseniksi.

Määritelmä (päättyvyys)

Lukujonoa kutsutaan päättyväksi, jos sillä on viimeinen jäsen. Muutoin lukujonoa kutsutaan päättymättömäksi.

Lukujonoja

Esimerkki

Lukujono

$$2,\ 4,\ 6,\ 8$$

on päättyvä, mutta lukujono

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots$$

on päättymätön. Kuitenkin lukujono

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots,\ 320$$

on päättyvä.

Yleinen lukujono

Määritelmä

Yleisen lukujonon (a_n) jäseniä merkitään muuttujilla

$$(a_n) = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

joiden alaindeksit ovat niiden järjestysnumeroita.

Määritelmä (yleinen jäsen)

Lukujonon (a_n) yleinen jäsen on

$$a_n = a(n),$$

missä $a(n)$ on lukujonon n:ttä jäsentä kuvaava lauseke.

Yleinen lukujono

Esimerkki

Olkoot lukujono $(a_n) = 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots$.
Tällöin

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= 4 \\ a_3 &= 6 \\ a_4 &= 8 \\ &\vdots \\ a_n &= 2n \end{aligned}$$

Voidaan merkitä $(a_n) = 2n$.

Aritmeettinen jono

Aritmeettinen lukujono

Esimerkki

Tarkastellaan lukujonoa

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \ldots$$

Mikä on annetun lukujonon n. jäsen? (HT)

Aritmeettinen lukujono

Määritelmä

Lukujonoa kutsutuaan **aritmeettiseksi**, jos sen kaikkien peräkkäisten jäsenten erotus on vakio. Aritmeettisen lukujonon (a_n) yleinen jäsen a_n on muotoa

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

missä

- a_1 on jonon 1. jäsen.
- n on yleisen jäsenen järjestysluku.
- d on lukujonon peräkkäisten jäsenten erotus eli **erotusvakio**

$$d = a_n - a_{n-1}$$

Aritmeettinen lukujono

Esimerkki

Aritmeettisen lukujonon (a_n) jäseniä ovat

$$a_1 = 5 \text{ ja}$$
$$a_3 = 19$$

Selvitetään jonon

1. erotusvakio.
2. kymmenes jäsen a_{10}.

Aritmeettinen summa

Lukujonon summa

Esimerkki

Lasketaan päättyvän aritmeettisen lukujonon

$$2,\ 5,\ \ldots,\ 23$$

jäsenten summa. (HT)

Esimerkki

Lasketaan kokonaislukujen 1–100 summa.
Kannattaako aiempaa laskutapaa käyttää tässä tapauksessa? (HT)

— *Carl Friedrich Gauss*

Aritmeettinen summa

Lause

Päättyvän aritmeettisen lukujonon a_1, a_2, ..., a_n jäsenten summa on

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2},$$

missä

- *n on summattavien jäsenten lukumäärä.*
- *a_1 on jonon ensimmäinen jäsen.*
- *a_n on jonon viimeinen jäsen.*

Aritmeettinen jono mallina

Aritmeettisen jonon käsitteitä

Määritelmä (erotusvakio)

Aritmeettisen lukujonon erotusvakio eli differenssi d on sen kahden peräkkäisen jäsenen erotus eli

$$d = a_n - a_{n-1}$$

Määritelmä (yleinen jäsen)

Aritmeettisen lukujonon (a_n) yleinen jäsen on

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Lause (aritmeettinen summa)

Aritmeettisen lukujonon n ensimmäisen jäsenen summa on

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Mallintaminen

Seuraus

Aritmeettista lukujonoa voidaan käyttää kuvaamaan tilanteita, joissa:

- *voidaan muodostaa lukujono ja*
- *jonon jäsenten erotus on vakio*

Huom.

Aritmeettinen lukujono voi olla laskeva, jolloin $d < 0$.

Geometrinen jono

Johdanto

Esimerkki

Tutkitaan lukujonoa

$$2,\ 6,\ 18,\ 64,\ \ldots$$

HT:

- Mikä on tämän lukujonon seuraava jäsen?
- Entä 10. jäsen?
- Entä yleinen eli n. jäsen?

Geometrinen lukujono

Määritelmä

Lukujono on geometrinen, jos sen peräkkäisten jäsenten suhde on vakio eli

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

missä

- q on peräkkäisten jäsenten suhde eli suhdeluku.
- n on järjestysluku, $n = 1,\ 2,\ \ldots$.
- a_n on lukujonon n. jäsen.

Esimerkki

Johdannon esimerkistä voidaan huomata, että

$$q = \frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{64}{18} = 3$$

Geometrisen jonon yleinen jäsen

Määritelmä

Geometrisen jonon (a_n) yleinen jäsen a_n voidaan esittää muodossa

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

missä

- a_1 on lukujonon 1. jäsen.
- q on lukujonon suhdeluku.
- n on järjestysluku.

Johdannon ratkaisu

Esimerkki

Johdannon lukujonon ensimmäinen jäsen oli 2 ja suhdeluku $q = 3$, joten sen yleinen jäsen on muotoa:

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}.$$

Tähän sijoittamalla $n = 10$ voidaan ratkaista lukujonon kymmenennen jäsenen arvo:

$$a_{10} = 2 \cdot 3^{10-1} = 2 \cdot 3^9 = 39\,366$$

Geometrinen summa

Johdanto

Esimerkki

Lukujonon ensimmäiset viisi jäsentä ovat

$$7,\ 14,\ 28,\ 56,\ 112,\ \ldots$$

HT:

- Mikä on lukujonon ensimmäisten viiden jäsenen summa?
- Entä 10 jäsenen summa?
- Entä n jäsenen summa?

Geometrinen summa

Lause

Päättyvän geometrisen lukujonon a_1, a_2, ..., a_n jäsenten summa S_n on

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q},$$

missä

- *a_1 on jonon ensimmäinen jäsen.*
- *n jonon jäsenten lukumäärää.*
- *q jonon suhdeluku.*

Summan laskeminen

Esimerkki

Lukujonon

$$7,\ 14,\ 28,\ 56,\ 112,\ \ldots$$

ensimmäinen jäsen on $a_1 = 7$ ja suhdeluku $q = \frac{14}{7} = 2$.
Sen ensimmäisten n jäsenen summa S_n on siis

$$S_n = 7 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = 7 \cdot \frac{1-2^n}{-2}$$

Kymmenen ensimmäisen jäsenen summa saadaan sijoittamalla $n = 10$, jolloin

$$S_{10} = 7 \cdot \frac{1-2^{10}}{-1} = 7\ 161$$

Geometrinen jono mallina

Geometrisen jonon käsitteitä

Määritelmä (suhdeluku)

Geometrisen jonon suhdeluku q on sen kahden peräkkäisen jäsenen suhde eli

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Määritelmä (yleinen jäsen)

Geometrisen lukujonon (a_n) yleinen jäsen on

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Lause (summa)

Geometrisen jonon ensimmäisten n jäsenen summa on

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Mallintaminen

Seuraus

Geometrista lukujonoa voidaan käyttää kuvaamaan tilanteita, joissa erilliset arvot muuttuvat samassa suhteessa. Näihin lukeutuvat muun muassa:

- *väestönkasvu*
- *korot ja lainat*
- *sähköpiirien resistanssit*
- *yms.*

Huom.

- Jos $0 < q < 1$, niin geometrinen lukujono on laskeva.
- Jos $q < 0$, niin lukujonon peräkkäiset jäsenet ovat erimerkkisiä.