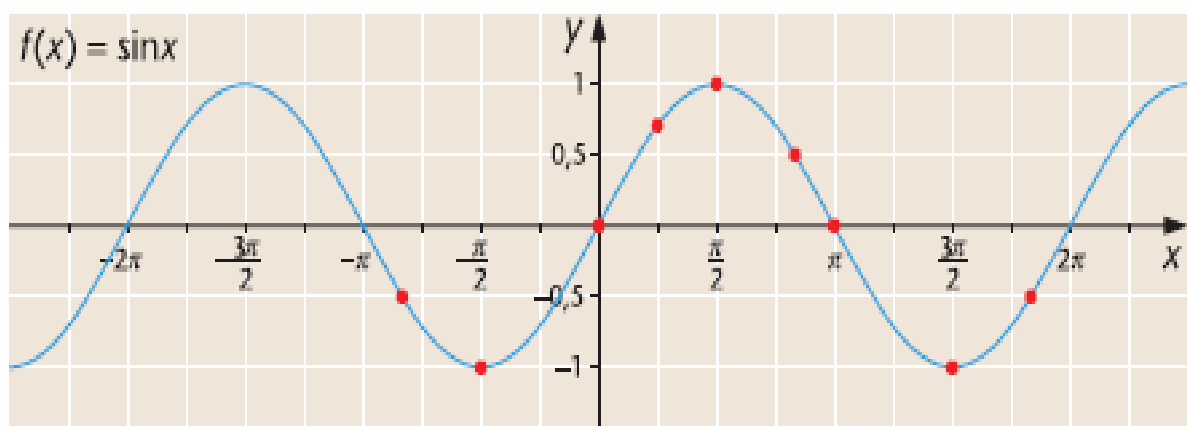




Funktio $f(x) = \sin x$

- Tutkitaan funktiota $f(x) = \sin x$ laskemalla ensin funktiolle muutamia arvoja.
- Piirretään arvojen avulla kuvaaja.
- Sinin arvot toistuvat määrätyn jakson välein, eli sini on **jaksollinen funktio**.
- jaksona 2π
- Sinifunktio $f(x) = \sin x$ saa arvoja välillä $[-1, 1]$.

x	$f(x) = \sin x$
0	$f(0) = \sin 0 = 0$
$\frac{\pi}{4}$	$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707\dots$
$\frac{\pi}{2}$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$
$-\frac{\pi}{2}$	$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$
$\frac{5\pi}{6}$	$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$
$-\frac{5\pi}{6}$	$f\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$
π	$f(\pi) = \sin \pi = 0$
$\frac{3\pi}{2}$	$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$
$\frac{11\pi}{6}$	$f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sin\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$





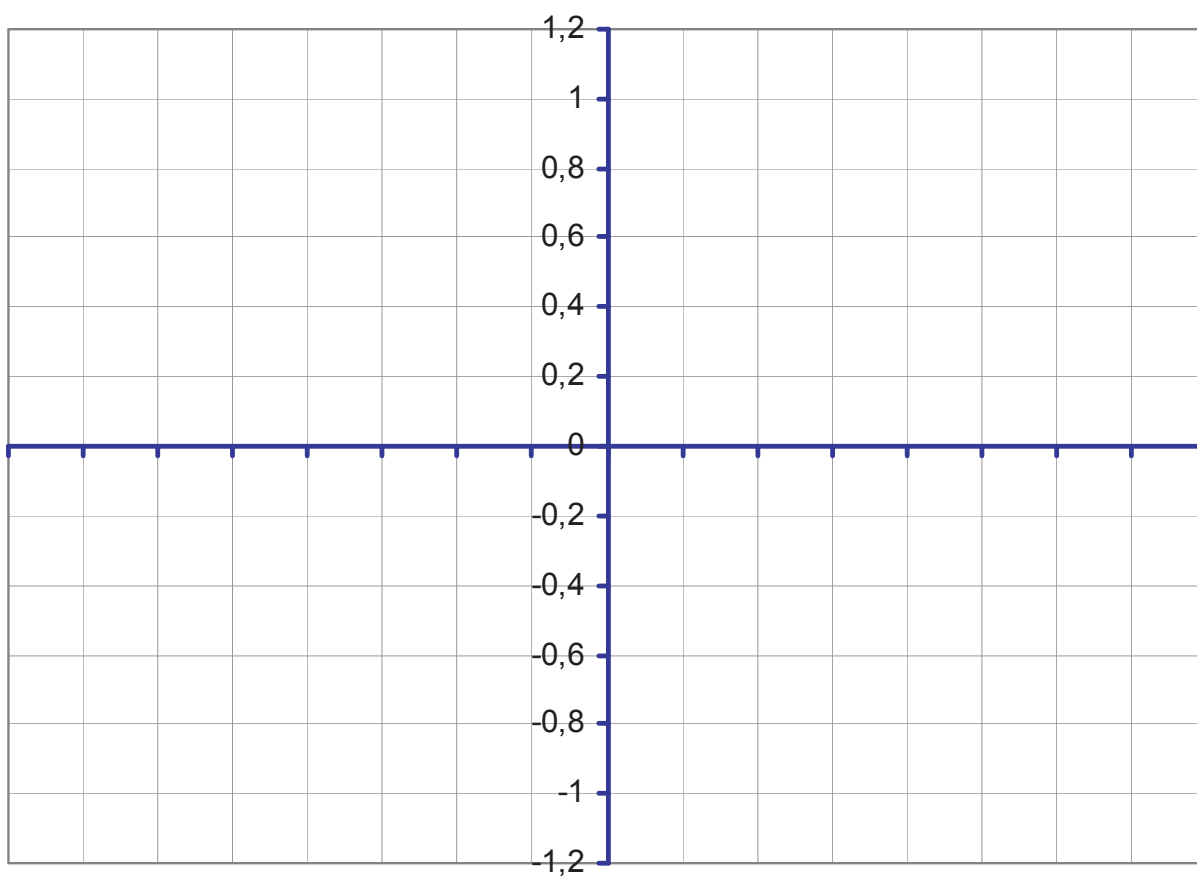
Funktio $f(x) = \cos x$

- Tutkitaan funktiota $f(x) = \cos x$ laskemalla ensin funktiolle muutamia arvoja:

x	$f(x) = \cos x$
0	
$\frac{\pi}{4}$	
$\frac{\pi}{2}$	
$-\frac{\pi}{2}$	
$\frac{5\pi}{6}$	
$-\frac{5\pi}{6}$	
π	
$\frac{3\pi}{2}$	
$\frac{11\pi}{6}$	



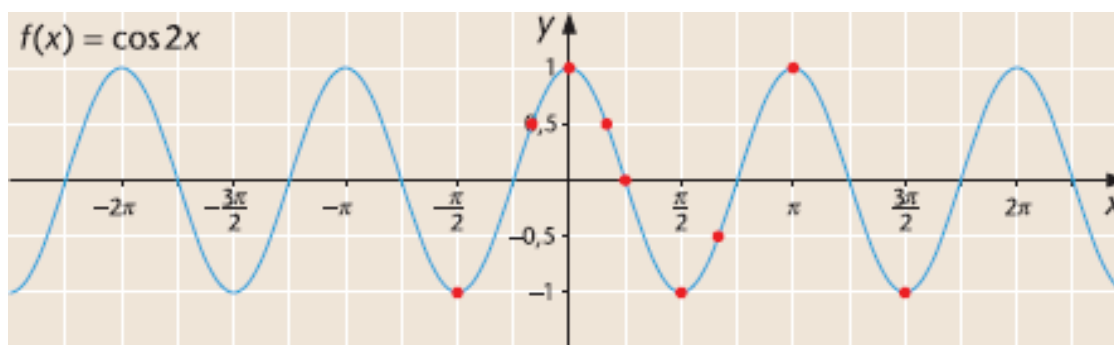
- Lisää arvoja voi etsiä vaikkapa taulukkokirjasta.
- Piirretään pisteiden avulla funktion kuvaaja.



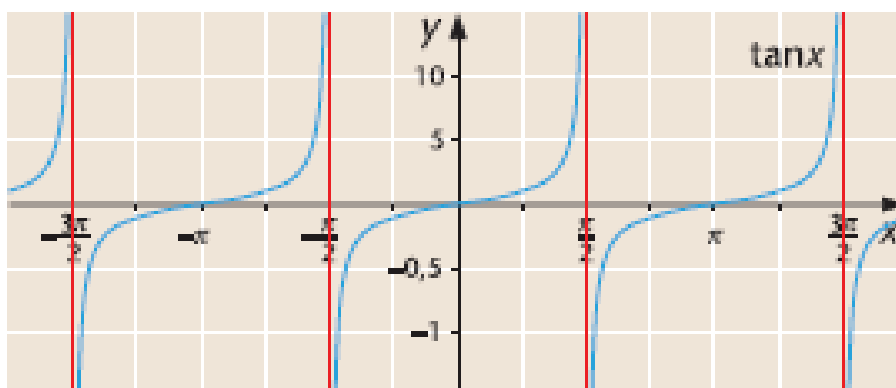


Muita trigonometrisia funktioita

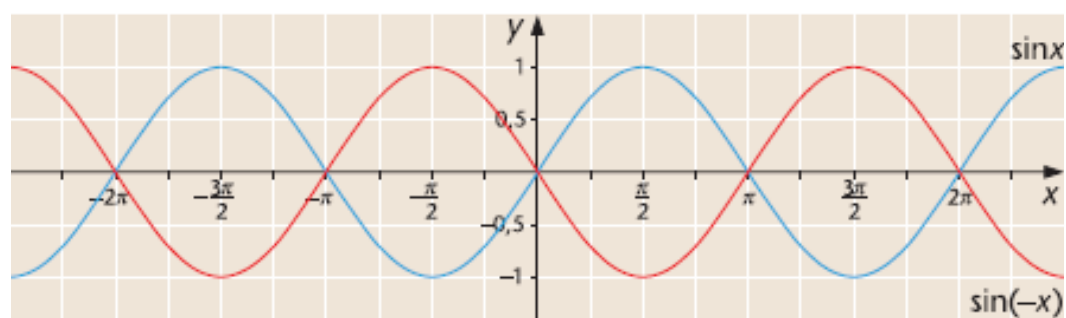
◆ $f(x) = \cos 2x$



◆ $f(x) = \tan x$



◆ $f(x) = \sin x$ ja $g(x) = \sin(-x)$



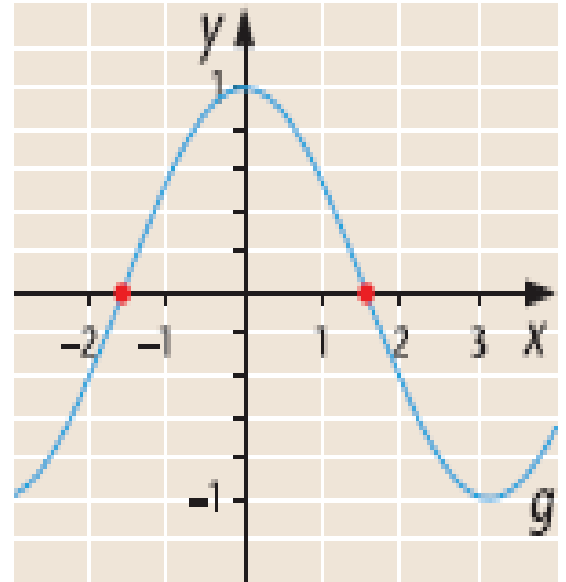


Nollakohtien määrittäminen graafisesti ja algebrallisesti

Esimerkki 1

Määritä kuvaajan avulla funktion g nollakohdat välillä $[-\pi, \pi]$. Anna nollakohdat yhden desimaalin tarkkuudella.

Ratkaisu:



Esimerkki 2

Määritä funktion $f(x) = 2\sin x - 0,3$ nollakohdat kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

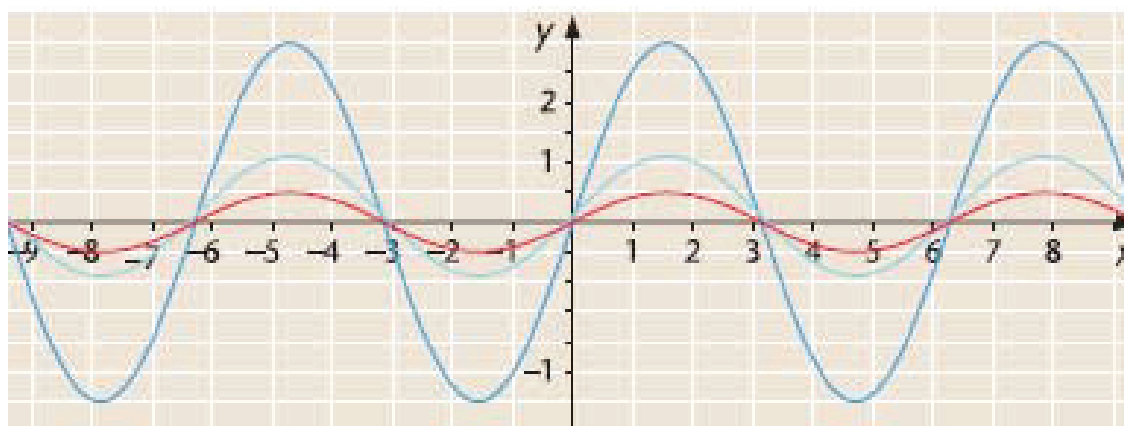


Joitakin tehtäviä oppikirjasta

Tehtävä 96

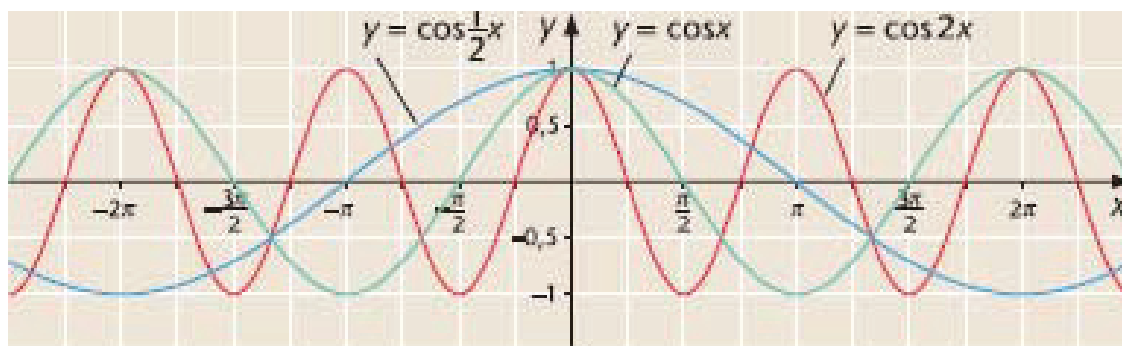
Kuvassa on esitetty funktioiden $f(x) = 0,5 \sin x$, $g(x) = \sin x$ ja $k(x) = 3 \sin x$ kuvaajat.

- Yhdistä funktio oikeaan kuvaajaan.
- Funktio g saa kaikki arvot välillä $[-1, 1]$. Määritä kahden muun funktion saamat arvot.



Tehtävä 97

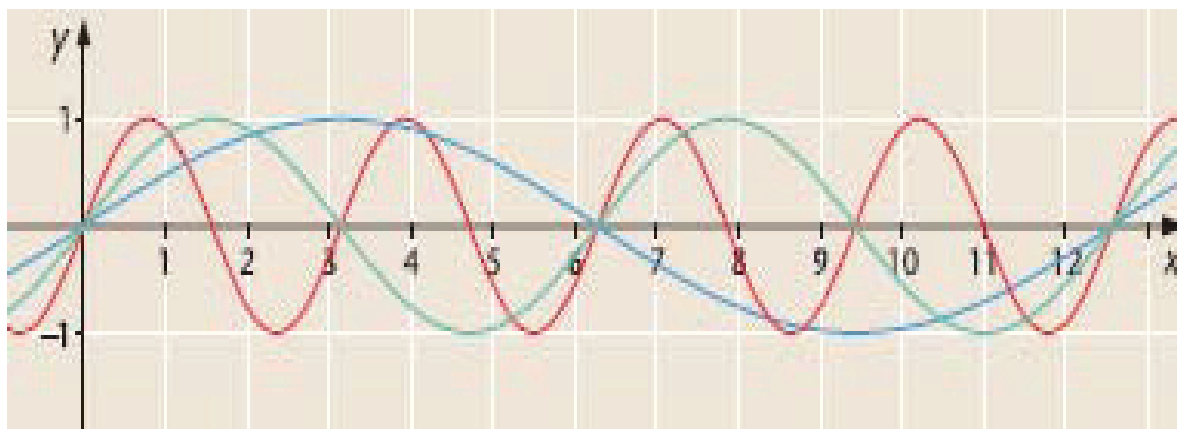
Kuvassa on esitetty funktioiden $\cos 0,5x$, $\cos x$ ja $\cos 2x$ kuvaajat. Päätele kuvien avulla funktioiden $\cos 0,5x$ ja $\cos 2x$ jaksojen pituus. Päätele edelleen funktion $\cos 4x$ jakson pituus.



**Tehtävä 101**

Kuvassa on esitetty funktion $f(x) = \sin kx$ kuvaajia, kun $k = 0,5$, $k = 1$ ja $k = 2$.

- Yhdistä k :n arvo ja oikea kuvaaja.
- Millainen vaikutus k :n arvolla on funktion f ?

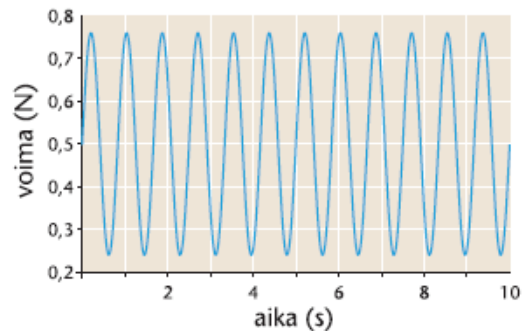




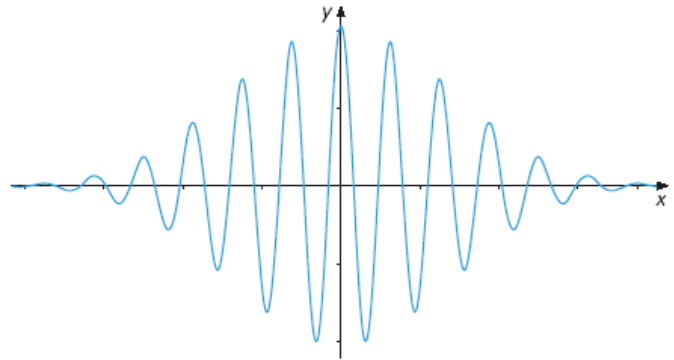
Sovelluksia

Trigonometrisilla funktioilla mallinnetaan jaksollisia ilmiöitä.

Harmoninen värähtely



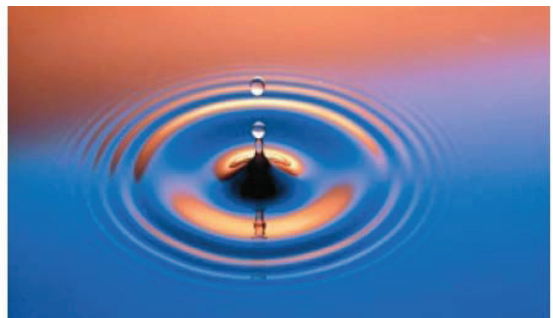
Kvanttimekaniikka, aaltofunktio



Vuorovesi-ilmiö



Aaltoliike





Sovellustehtävän ratkaisu

1. Jos kysytään funktion arvoa, muista **katsoa, missä yksikössä kulmat on ilmoitettu** (asteet/radiaanit).
2. Suurimman/pienimmän arvon tutkimisessa käytä hyväksesi tietoa, että **sinin ja kosinin arvot ovat välillä $[-1, 1]$** .

Esimerkki

Yksittäisen aallon korkeutta senttimetreinä eräässä koetilanteessa kuvasi funktio

$f(t) = 1,25\cos(3,2t + \pi/4)$, jossa t on aika sekunteina kokeen alusta lukien.

- a) Laske aallon korkeus, kun aikaa kokeen alusta on kulunut 1,4 sekuntia.
- b) Laske aallon suurin korkeus.
- c) Milloin aikavälillä $0 \leq t \leq 6,0$ s aalto on korkeimmillaan?

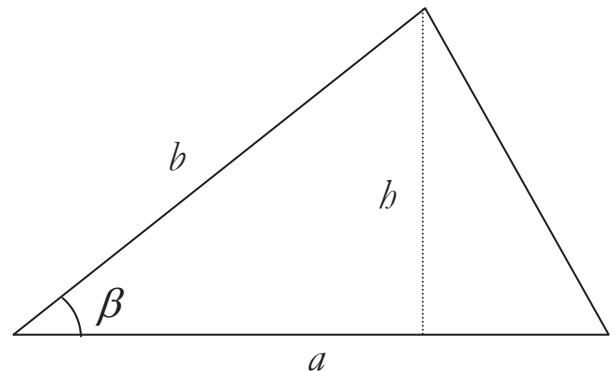
Ratkaisu



Kolmion ja suunnikkaan ala

Pohdinta 1

a) Mittaa viivoittimella kanta a ja korkeus b . Laske niiden avulla kolmion ala kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.



b) Mittaa sivujanan pituus b sekä kulma β . Sijoita mittaustulokset kaavaan

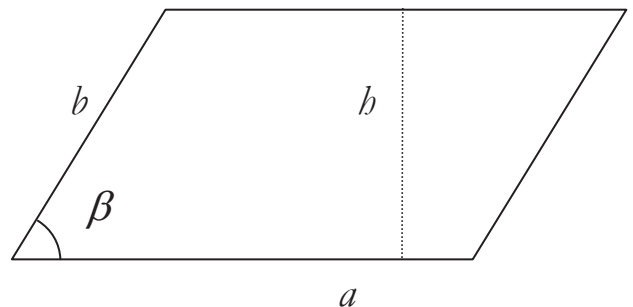
$$\frac{1}{2}ab \sin \beta.$$

Vertaa tätä tulosta kohdan a tulokseen.

Pohdinta 2

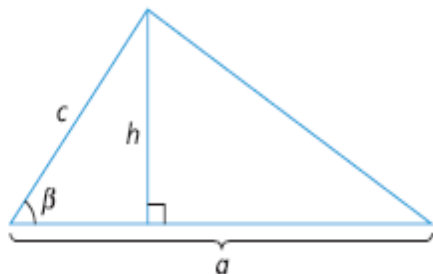
Laske suunnikkaan ala sopivien mittausten avulla. Mittaa lisäksi sivujanan pituus b sekä kulma β . Sijoita tulokset kaavaan

$$ab \sin \beta.$$



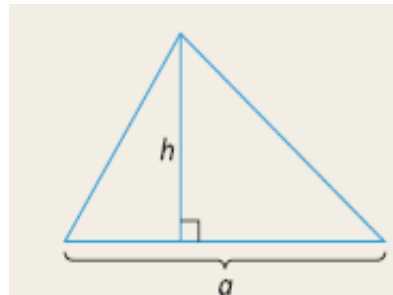


Kolmion ala



$$\sin \beta = \frac{h}{c}$$

$$h = c \sin \beta$$



Kolmion ala

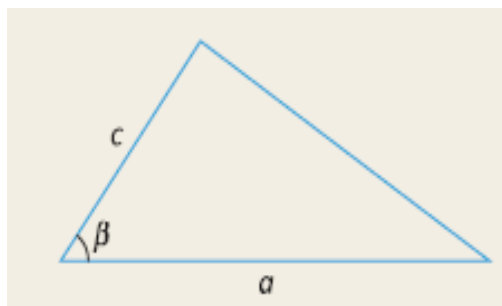
$$A = \frac{1}{2} ab$$

$$A = \frac{1}{2} a \cdot c \sin \beta$$

$$= \frac{1}{2} ac \sin \beta$$

Kolmion ala

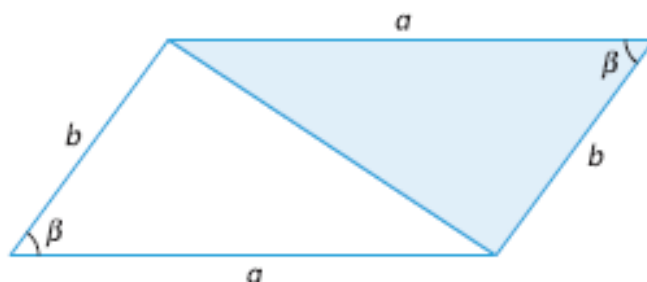
$$A = \frac{1}{2} ac \sin \beta$$





Suunnikkaan ala

- ◆ Suunnikas voidaan jakaa lävistäjällä kahdeksi yhteneväksi kolmioksi.

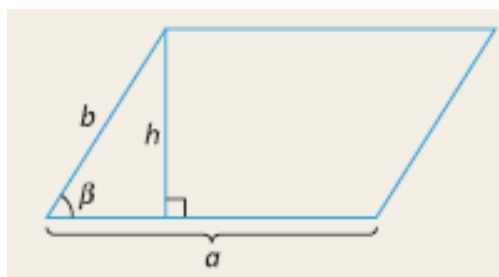


- ◆ Koska kolmion ala on puolet sen kahden sivun ja niiden välisen kulman sinin tulosta,

$$A_{\text{suunnikas}} = 2 \cdot A_{\text{kolmio}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot ab \sin \beta = ab \sin \beta$$

Suunnikkaan ala

$$A = ab \sin \beta$$



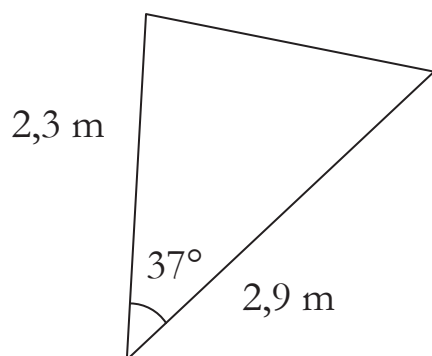


Alojen laskemista

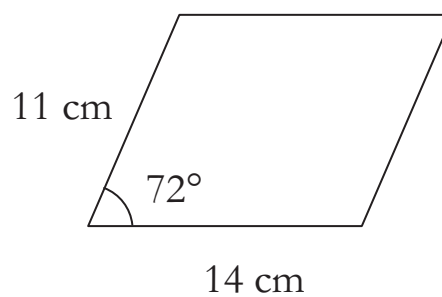
Esimerkki 1

Laske kuvioiden alat.

a)



b)



Ratkaisu:



Kulman ratkaiseminen

Esimerkki

Kolmion kaksi sivua ovat 1,9 dm ja 0,85 dm. Kolmion ala on $0,80 \text{ dm}^2$. Laske annettujen sivujen välinen kulma.

Ratkaisu:

