

Tuntisuunnitelma

Tunnin teema: Lukuteoria ja todistaminen

Oppimistavoitteet:

- Kehittää lukuteoriaan liittyvien käsitteiden (alkuluvut, kongruenssi, jaollisuus, rationaaliluvut) hyödyntämistä ja määritelmiin pohjautuvaa perustelua sekä osoittamista.
- Kehittää perustelua esimerkiksi vastaesimerkin keinoin.
- Kehittää matemaattista ajattelua (tämä sisältöalue on erityisesti eniten matemaattista ajattelua ja ajattelutapaa vaativa).

Tunnin aloitus:

Huomioita

- Kannattaa pohtia, onko tehtävän eri kohtien välillä yhteyttä.
- Kannattaa lähteä liikkeelle pohtimalla, mitä käsitteitä tehtävässä tarvitaan (ja esimerkiksi listata niitä) ja mitä niiden määritelmät ovat.
- Erilaisilla luvuilla testailu voi auttaa hahmottamisessa.
 - Muista kuitenkin riittävät perustelut lopullisissa ratkaisuissa!

Yleisiä havaintoja teeman tehtävistä:

Huomioita/haasteita:

- Tehtävä 1 ja 2A voivat olla haastavia, jos ei ole tehtäviin liittyvää kurssia alla.
- Vastaukset ovat yleensä kokonaislukuja, niin tehtävien hahmottaminen ja oikeiden vastausten löytäminen voi onnistua helpommin.
 - Muistettava, että löytyy kuitenkin riittävät perustelut pisteisiin tai hahmottelun jälkeen ratkaisee muulla tyyllillä kuin hakemalla/löytämällä.
- Termit voivat mennä sekaisin, kun useat voivat kuulostaa samalta. Termeissä on samoja etuliitteitä ja päätteitä, esim. *alkuluku*, *kokonaisluku*, *luku*jono, *rationaaliluku*...
- Riittämättömät perustelut, erityisesti, koska tehtäviin voi huomata jo silmäilemällä sopivat vastaukset.

Oppitunnin sisältö:

Tunnin lopuksi kotivaativan 1 antaminen

- Voi tehdä haluamassaan ympäristössä, kuitenkin ainoastaan A-osassa saatavilla olevia ohjelmistoja käyttäen (<https://www.ylioppilastutkinto.fi/fi/tutkinnon-toimeenpano/kokeen-tekniset-jarjestelyt/koejarjestelman-oheisohjelmat>)

- Palautus peda.nettiin viimeistään perjantaina 14.2. klo 23:59!
 - Mieluusti **Word-** tai **pdf-muodossa!**

Tehtävä 1, K24/10:

10. Tekoäly ja lukuteorian ihmeet 12 p.

Aineisto

10.A Teksti: Lainaus tekoälyltä

Alkulukua q kutsutaan *alkulukukaksoseksi*, jos myös $q + 2$ tai $q - 2$ on alkuluku. Tekoälyltä kysyttiin, kuinka monta alkulukukaksosta on olemassa, ja sen vastaus on tekstissä 10.A. Vastaa aineiston pohjalta seuraaviin osatehtäviin.

1. Anna esimerkki alkuluvusta, joka ei ole alkulukukaksosen. (3 p.)
2. Onko tekoälyn alkulukukaksosen määritelmä yhtäpitävä tehtävän määritelmän kanssa? (3 p.)
3. Onko tekoälyn perustelu alkulukukaksosten lukumäärän äärettömyydelle matemaattisesti pätevä? (6 p.)

10.A Teksti: Lainaus tekoälyltä

Käyttäjän syöttämä kysymys: Kuinka monta alkulukukaksosta on olemassa?

Tekoälyn vastaus: Alkulukukaksosen on alkuluku, jolla on vain yksi positiivinen kokonaisluku sen ja jonkin toisen alkuluvun välissä. Esimerkiksi luvut 3 ja 5 ovat alkulukukaksosia, sillä ne ovat molemmat alkulukuja ja niiden välissä on vain yksi positiivinen kokonaisluku (luku 4). Alkulukukaksosten määrää ei tiedetä tarkasti, mutta niitä uskotaan olevan äärettömän paljon. Tämä johtuu siitä, että on olemassa äärettömän paljon alkulukuja ja minkä tahansa kahden alkuluvun välissä on aina vähintään yksi positiivinen kokonaisluku, joka erottaa ne. Siksi minkä tahansa kahden alkuluvun välissä on ainakin yksi alkulukukaksospari.

Lähde: ChatGPT. chat.openai.com. Viitattu: 5.12.2022. Muokkaus: YTL.

- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
 - tekoälyn teksti koostuu periaatteessa kahdesta osasta
 - mitä tarkoittaa matemaattisesti pätevä (= pystyy osoittamaan päättelyn todeksi)
- minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP ja LHVP)
 - 1. kohdassa ei tarvitse perustella, miksi joku luku on tai ei ole alkuluku (kunhan on löydetty oikeanlaiset luvut ja todettu, että ne ovat/eivät ole alkulukuja)
 - 2. kohdassa esimerkin antaminen ei ole antanut pisteitä
 - (todella tarkat kriteerit,) perustelun lisäksi vaadittu vastaesimerkki
- onko erilaisia ratkaisutapoja?
 - (-3. Kohdassa jonkin tekoälyn epäloogisuuden vahva perustelu antaa 4/6 pistettä)
 - sanallisiin selityksiin on useita tapoja, mutta täysiin pisteisiin on löydettävä oleellinen yhdistelmä väitteitä, jotka koostavat aukottoman päättelyn ja löydettyä perustelu, joka liittyy juuri alkulukukaksospareihin (eli ei mikä tahansa päättelyn epäloogisuus)

- onko jostain ohjelmistosta hyötyä
 - jos haluaa pitkää tekstiä pilkkoa osiin itselle hahmottamiseksi, niin joku valittu tekstieditori (voi esim. alleviivata olennaisia kohtia)
- tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
 - ajatus, että 1 olisi alkuluku (ei vaikuta pisteisiin, jos ei käytetä jatkossa)
 - perusteluissa käytettyihin lukuihin on livahtanut luku, joka ei ole alkuluku, vaikka pitäisi
 - kohdassa 1. annettu vain perustelu toiseen suuntaan (perusteltu esim. vain $q + 2$)
- miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa
 - kannattaa lukea teksti hitaasti ajatuksen kanssa ja miettiä, mitkä kohdat ovat kriittisiä. (paperisessa kokeessa neuvoisin alleviivaamaan)
 - tämän tyyliin tehtäviin kaikkiin kohtiin kannattaa antaa esimerkit tai vastaesimerkit. Niistä ei ole vähennetty pisteitä, mutta niillä voi paikata puutteellista päättelyä saadakseen joitain pisteitä
 - tekoälyn tekstin paikkansapitävyyttä voi testata luvuilla (ristiriidan huomaa jo pienillä luvuilla)

Tehtävä 2A, S23/8 (jos kongruenssi on tuttua):

8. Ison luvun jaollisuus 12 p.

1. Määritä suurin luku $k \in \mathbb{N}$, jolle $1023 \equiv -1 \pmod{2^k}$. (3 p.)

2. Todista, että luku $2^{12345678910} - 1$ on jaollinen luvulla 1023. (9 p.)

- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
 - huomata, että $1023 = 1024 - 1$ ja $2^{10} = 1024$ (kohta 1)
 - huomata, että luvun 2 potenssi on muotoa $(2^{10})^{1234567891}$ (kohta 2)
 - mitä jaollisuus tarkoittaa ja miten se yhdistyy kongruenssiin
- minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP ja LHVP)
 - siirtymiset välivaiheesta toiseen tarvitsevat selityksen, puuttuminen rokotaa pisteitä (muista välivaiheet!)
 - perustelu vaaditaan 1. kohdassa vielä laskun ratkaisun jälkeen (eli miksi laskettu k :n arvo on suurin)
- onko erilaisia ratkaisutapoja?
 - ratkaisun perusrakenne on melko yksikäsitteinen, mutta välivaiheet voivat näyttää eriltä ja esim. kohdassa 1 on erilaisia perusteluita suurimmalle k :n arvolle
- onko jostain ohjelmistosta hyötyä
 - ohjelmointiratkaisu on mahdollinen ainakin 1. kohdassa, kun luvut ovat pieniä. 2.

kohdassa ohjelmointi voi olla haastavaa ja suuruusluokka onkin tehtävään pistetty sellaiseksi, että tietokoneet eivät voi sitä optimoimatta ratkaista
-ohjelmointiratkaisu kuitenkin antaa vain max. 9 pistettä (emme suosittele)

- tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
 - siirrytty seuraavaan vaiheeseen ratkaisussa ilman selitystä
 - 1. kohdassa unohdettu, että on haettu lukua ja tehty vain lasku
 - $\text{mod } 2^k$ ja $\text{mod } 1023$ yhteys voi olla hankala löytää
 - virheet potenssien ja kongruenssien laskusäännöissä
 - sekoitetaan kongruenssimerkki ja yhtäsuuruusmerkki
- miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa
 - mitä kongruenssi tarkoittaa? mitä jaollisuus tarkoittaa?
 - onko kaavakokoelmassa kongruenssin laskusääntöjä? mitä ne ovat?
 - lähde laskemaan luvun 2 potensseja (jos ei tehtävässä pääse alkuun)
 - miten kohdassa 2 voisi löytää yhtäläisyyden kohtaan 1 (luvun 1024)?

Tehtävä 2B, S22/10 (jos kongruenssi ei ole tuttua):

10. Lukupeli 12 p.

Aaro ja Siiri pelaavat itse keksimäänsä lukupeliä. He kirjoittavat vuorotellen paperille jonkin luvun 1, 2, ..., 10. Sellaista lukua ei saa kirjoittaa, joka on paperille jo kirjoitetun luvun tekijä. Pelin häviää se, joka ei voi kirjoittaa uutta lukua paperille.

1. Aaro aloittaa pelin kirjoittamalla paperille luvun 8. Mitkä ovat ne luvut, jotka Siiri voi tämän jälkeen seuraavalla vuorollaan kirjoittaa? (3 p.)
2. Anna esimerkki siitä, miten Aaron luvulla 8 aloittama peli voisi edetä loppuun. Tässä riittää, kun annat kirjoitettavat luvut järjestyksessä ilman perusteluja. (3 p.)
3. Kun Siiri saa aloittaa pelin, hänellä on seuraava strategia:
 - Aloita kirjoittamalla paperille luku 6.
 - Muodosta parit (4, 5), (7, 9) ja (8, 10). Kun vastapelaaja kirjoittaa oman lukunsa, niin kirjoita tämän luvun pari. Jatka näin pelin loppuun asti.

Pelikierron voi siis edetä esimerkiksi näin: *Siiri kirjoittaa luvun 6. Aaro kirjoittaa paperille luvun 7, jolloin Siiri kirjoittaa luvun 9. Aaro kirjoittaa paperille luvun 10, jolloin Siiri kirjoittaa paperille luvun 8 ja voittaa pelin.*

Siiri pelaa strategiansa mukaisesti ja aloittaa pelin kirjoittamalla paperille luvun 6. Aaro kirjoittaa paperille luvun a , sitten Siiri kirjoittaa paperille luvun b , jonka jälkeen Aaro kirjoittaa luvun c . Nyt Siiri kirjoittaa paperille luvun 9, mutta ei vielä voita peliä. Mitkä ovat eri vaihtoehdot luvuiksi a , b ja c ? (6 p.)

- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
 - miten ilmaisee vastauksen, kun on matemaattista tekstiä normitekstin seassa
 - täytyy osata tekijöihin jako ja hahmottaa annetut ohjeet.
- minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP ja LHVP)
 - 1. ja 2. kohtaan vaaditaan vain oikeat vastaukset (Huom! kohdassa 2 riittää yksi oikea

esimerkki pelin kulusta)

- 3. Kohta vaatii myös perustelut mahdollisista luvuista ja mihin näiden valitseminen johtaa (muista käydä läpi kaikki mahdolliset pelattavat luvut ja perustella, miksi ne ovat /eivät ole luvuiksi a, b ja c)

- onko erilaisia ratkaisutapoja?
 - sanalliset perustelut voivat olla luonteeltaan monenlaisia.
- onko jostain ohjelmistosta hyötyä
 - pelin voi periaatteessa ohjelmoida itsekin, mutta pelin säännöt ovat paljon helpommat kuin koodaaminen, joten olisi turhaa työtä ja lisäisi mahdollisia virhekohtia
- tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
 - ohjeenanto on todella pitkä, joten sekaannukset ovat mahdollisia
 - vastausten antamistyyli voi olla sekava, kun on kyseessä hyvin uudentyylinen tehtävä kokelaalle
 - ei käydä kaikkia mahdollisia pelattavia lukuja lävitse
- miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa
 - käy läpi tehtävänanto rauhassa ja esim. kopioi johonkin tekstinkäsittelyohjelmaan sekä tee merkintöjä
 - vähän lukuja ja näin ollen myös mahdollisia pelejä, voi olla kannattavaa käydä kaikki vaihtoehdot lävitse pelaamalla itse
 - luetella kaikki luvut 1–10 ja tehdä niille tekijöihin jako aivan tehtävän alussa

Tehtävä 3, K24/12:

12. Potensseja aritmeettisissa lukujonoissa (12 p.)

1. Olkoon $k > 0$ kokonaisluku. Osoita, että jos päättymätön kasvava aritmeettinen lukujono sisältää luvut k^2 ja k^3 , niin se sisältää luvun k^4 . (6 p.)

2. Osoita, että jos r^2 , r^3 ja r^4 sisältyvät aritmeettiseen lukujonoon, niin r on rationaaliluku. (6 p.)

- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
 - löytää aritmeettisen lukujonon määritelmästä d (lähteä liikkeelle määritelmästä)!
 - selitä käyttämäsi muuttujat (esim. m ja n ovat kokonaislukuja sekä d on aritmeettisen jonon peräkkäisten jäsenten erotus)
- minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP ja LHVP)
 - selkeät viittaukset määritelmiin (mikä määritelmä ja mitä se kertoo)
- onko erilaisia ratkaisutapoja?
 - ei varsinaisesti (määritelmien pohjalta vaihe vaiheelta eteenpäin)
- onko jostain ohjelmistosta hyötyä
 - pelkkä Solve antaa max. 3/6

- tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
 - aritmeettinen ja geometrinen lukujono menee sekaisin (kun käsitellään samojen muuttujien eri potensseja)
 - tehtävää ratkaistaessa esiintyy useita eri kirjainmuuttujia esim. HVP: k , r , d , a , L , m ja s
 - muuttujien selitykset puuttuvat
 - ratkaistaan tehtävä tietyllä k :n tai r :n arvolla
 - oletettu jonossa perustelematta, että k sisältyy siihen tai että k^2 ja k^3 (tai r :n potenssit kohdassa 2) ovat peräkkäiset jäsenet
 - nollalla jakamista ei ole pidetty mielessä
 - 2. Kohdassa jos löytää ratkaisun (joka on oikea ja helppo löytää) ja sitä ei perustele niin max. 1/6p
- miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa
 - mikä on aritmeettisen lukujonon määritelmä? mitä tarkoittaa, että luvut sisältyvät aritmeettiseen lukujonoon?
 - miettiä, että miten yhtälöä saa muokata missäkin kohtaa