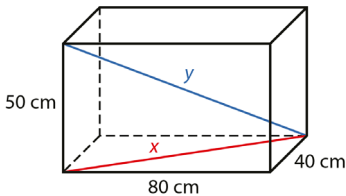


13.1



- a) Lasketaan pohjatahkoon lävistäjän pituus.

$$x^2 = 80^2 + 40^2$$

$$x^2 = 8000$$

$$x = \sqrt{8000} = 89,44... \approx 89 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{8000} = -89,44... \approx -89$$

Pituus on positiivinen luku, joten $x \approx 89$ cm.

- b) Lasketaan avaruuslävistäjän pituus.

$$y^2 = 80^2 + 40^2 + 50^2$$

$$y^2 = 10500$$

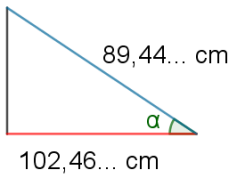
$$y = \sqrt{10500} = 102,46... \approx 100$$

tai

$$y = -\sqrt{10500} = -102,46... \approx -100$$

Pituus on positiivinen luku, joten $y \approx 100$ cm.

- c) Lasketaan avaruuslävistäjän ja pohjan lävistäjän välisen kulman suuruus.



$$\cos \alpha = \frac{89,44...}{102,46...}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{89,44...}{102,46...} \right)$$

$$\alpha = 29,19...^\circ \approx 29^\circ$$

Vastaus

- a) 89 cm b) 100 cm c) 29°

13.2

- a) Suorakulmaisen särmiön tilavuus 216 cm^3 .

Ratkaistaan särmän pituus x .

$$x \cdot x \cdot 8,0 = 216$$

$$x^2 \cdot 8,0 = 216 \quad | :8,0$$

$$x^2 = 27$$

$$x = \sqrt{27} = 5,19... \approx 5,2 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{27} = -5,19... \approx -5,2$$

Pituus on positiivinen luku, joten $x \approx 5,2 \text{ cm}$.

- b) Ratkaistaan särmän pituus x .

$$x^3 = 216$$

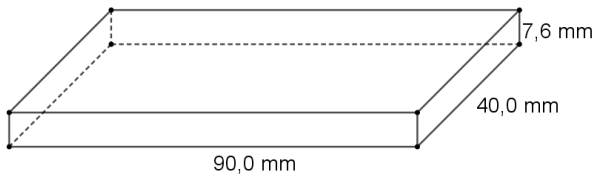
$$x = \sqrt[3]{216} = 6,0 \text{ (cm)}$$

Vastaus

a) $5,2 \text{ cm}$

b) $6,0 \text{ cm}$

13.3



Tutkitaan, onko harkon tiheys yhtä suuri kuin kullan tiheys.
Lasketaan harkon tilavuus.

$$V = 90,0 \cdot 40,0 \cdot 7,6 = 27\,360 \text{ (mm}^3\text{)}$$

Ilmaistaan tilavuus kuutiometreinä.

$$\begin{aligned} 27\,360 \text{ mm}^3 & \qquad \qquad \qquad 1\,000\,000\,000 \text{ mm}^3 = 1 \text{ m}^3 \\ &= 0,000027360 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Lasketaan harkon tiheys.

$$\begin{aligned} & \frac{500,0 \text{ g}}{0,00002736 \text{ m}^3} & \text{tiheys} = \frac{\text{massa}}{\text{tilavuus}} \\ &= \frac{0,5000 \text{ kg}}{0,00002736 \text{ m}^3} \\ &= 18\,274,854... \text{ kg/m}^3 \\ &\approx 18\,300 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

Harkko ei ole puhdasta kultaa, koska sen tiheys on eri suuri kuin kullan tiheys $19\,320 \text{ kg/m}^3$.

Vastaus

Ei ole.

13.4

- a) Oletetaan laatikon olevan suorakulmaisen särmiön muotoinen.

Laatikon seinämän paksuus on 8,0 cm . Lasketaan laatikon sisämitat.

$$\text{Pituus } 80 - 2 \cdot 8 = 64 \text{ (cm)}$$

$$\text{Leveys } 60 - 2 \cdot 8 = 44 \text{ (cm)}$$

$$\text{Korkeus } 40 - 2 \cdot 8 = 24 \text{ (cm)}$$

Lasketaan laatikon vetoisuus.

$$V = abc$$

$$\text{Sijoitetaan } a = 64, b = 44 \text{ ja } c = 24.$$

$$= 64 \cdot 44 \cdot 24$$

$$= 67584 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Ilmaistaan vetoisuus litroina.

$$= 67584 \text{ cm}^3$$

$$1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ dm}^3$$

$$= 67,584 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$$

$$= 67,584 \text{ L}$$

$$\approx 68 \text{ L}$$

- b) Laatikon seinämien tilavuus on tilavuuden ulkomitan ja sisämitan erotus.

$$80 \cdot 60 \cdot 40 - 64 \cdot 44 \cdot 24 = 124416 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Ilmaistaan tilavuus kuutiodesimetreinä.

$$= 124416 \text{ cm}^3$$

$$1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ dm}^3$$

$$= 124,416 \text{ dm}^3$$

Lasketaan laatikon massa.

$$21 \text{ g/dm}^3 \cdot 124,416 \text{ dm}^3$$

$$\text{massa} = \text{tiheys} \cdot \text{tilavuus}$$

$$= 2612,736 \text{ g}$$

$$\approx 2,6 \text{ kg}$$

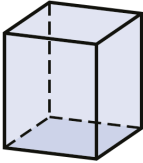
Vastaus

a) 68 L

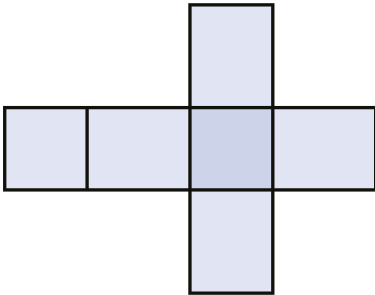
b) 2,6 kg

13.5

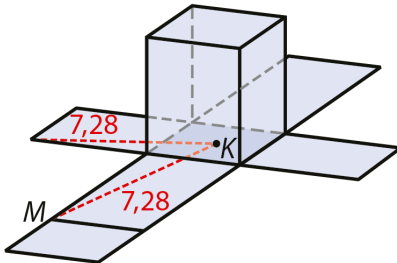
- a) Piirretään 2D-piirtoalueessa pohjatahkoksi neliö, joka sivun pituus on 4. Laajennetaan 3D-piirtoalueessa neliö särmiöksi, jonka korkeus on 5.



- b) Tehdään 3D-piirtoalueessa särmiön tasolevitys.



- c) Piirretään lyhin reitti. Reitti on yhtä pitkä kumpaakin vaihtoehtoista sivutahkoa pitkin.



- d) Lasketaan reitin pituus suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseella.

$$MK^2 = 7^2 + 2^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$MK = \sqrt{53} = 7,28... \text{ tai } x = -\sqrt{53} = -7,28...$$

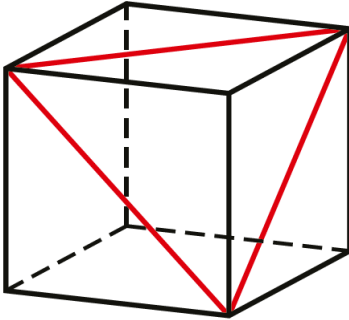
Pituus on positiivinen luku, joten $MK = \sqrt{53} \approx 7,3$.

Vastaus

- d) $\sqrt{53} \approx 7,3$

13.6

- a) Piirretään 2D-piirtoalueessa pohjatahkoksi neliö, jonka sivun pituus on 6. Täydennetään 2D-piirtoalueessa kuutioksi, jonka korkeus on 6.



- b) Piirretään kolmio, joka saadaan, kun kuution yhdestä kärjestä alkavien särmien päätepisteet yhdistetään toisiinsa. Mitataan kulmien suuruudet.

Jokaisen kulman suuruus on 60° .

- c) Koska kolmion jokainen sivu on kuution tahkon lävistäjä, kolmio on tasasivuinen. Lasketaan sivun pituus x Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 6^2 + 6^2$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$x = 6\sqrt{2} \text{ tai } x = -6\sqrt{2}$$

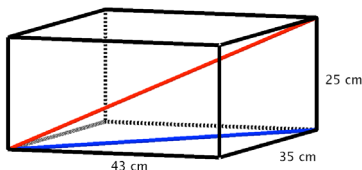
Pituus on positiivinen luku, joten $x = 6\sqrt{2}$.

Vastaus

- b) Jokaisen kulman suuruus on 60° .
c) Jokaisen sivun pituus on $6\sqrt{2}$. Kolmio on tasasivuinen.

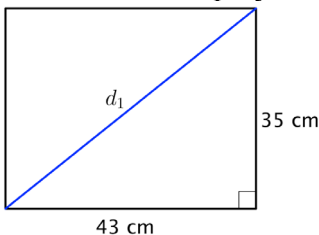
13.7

Piirretään mallikuva säilytyslaatikosta.



Laatikon pohjalle mahtuvan sauvan maksimipituus on pohjan lävistäjän pituus (piirretty sinisellä). Laatikon sisälle mahtuvan sauvan maksimipituus on avaruuslävistäjän pituus (piirretty punaisella).

a) Lasketaan laatikon pohjan lävistäjän pituus Pythagoraan lauseella.



$$d_1^2 = 43^2 + 35^2$$

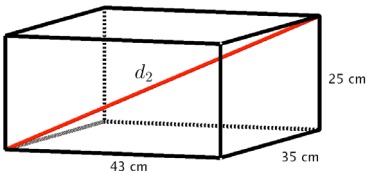
$$d_1^2 = 3074$$

$$d_1 = \pm\sqrt{3074} = \pm 55,443\dots \text{ (cm)}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $d_1 = 55,443\dots$ cm.

Laatikon pohjalle mahtuu siis korkeintaan 55 cm:n pituinen sauva.

b) Lasketaan laatikon avaruuslävistäjän pituus.



$$d_2^2 = 43^2 + 35^2 + 25^2$$

$$d_2^2 = 3699$$

$$d_2 = \pm\sqrt{3699} = \pm 60,819\dots \text{ (cm)}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $d_2 = 60,819\dots$ cm.

Laatikkoon mahtuu siis korkeintaan 60 cm:n pituinen sauva.

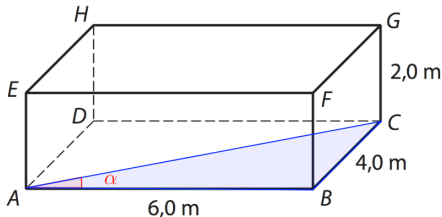
Vastaus

a) 55 cm

b) 60 cm

13.8

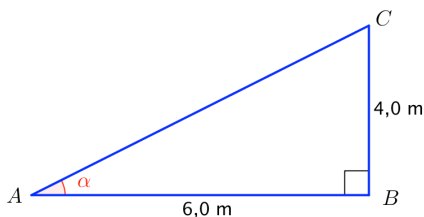
a) Ratkaistaan kulma α suorakulmaisesta kolmiosta ABC .



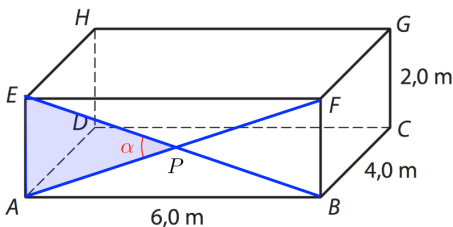
$$\tan \alpha = \frac{4}{6}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{6}\right)$$

$$\alpha = 33,690\dots^\circ \approx 34^\circ$$



b) Ratkaistaan kulma α tasakylkisestä kolmiosta EAP .



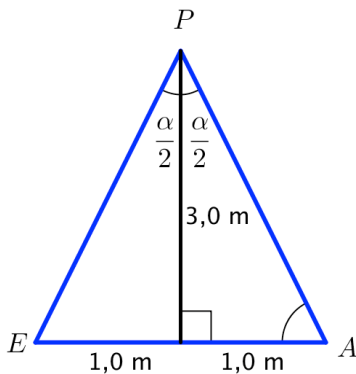
Koska kolmio EAP on tasakylkinen, niin huippukulmasta piirretty kulmanpuolittaja jakaa kolmion kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi.

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$$

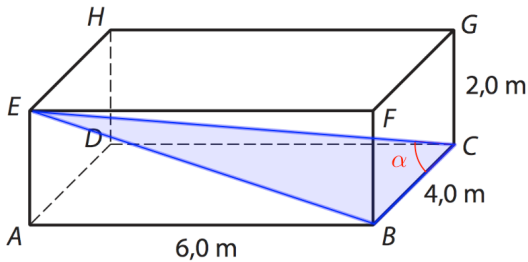
$$\frac{\alpha}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = 18,434\dots^\circ \quad | \cdot 2$$

$$\alpha = 36,869\dots^\circ \approx 37^\circ$$



c) Kysytty kulma voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta EBC .



Lasketaan ensin avaruuslävistäjän EC pituus.

$$EC^2 = 6^2 + 4^2 + 2^2$$

$$EC^2 = 56$$

$$EC = \pm\sqrt{56} = \pm 7,483\dots$$

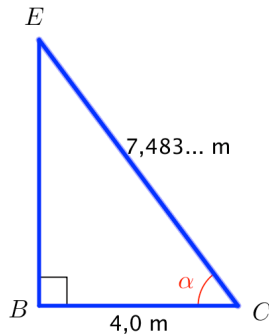
Pituus on positiivinen luku, joten $EC = 7,483\dots$ m .

Ratkaistaan seuraavaksi kulma α .

$$\cos \alpha = \frac{4}{7,483\dots}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{4}{7,483\dots}\right)$$

$$\alpha = 57,688\dots^\circ \approx 58^\circ$$



Vastaus

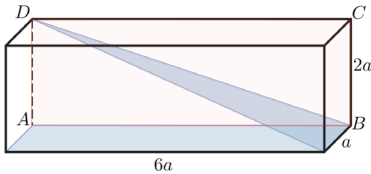
a) 34°

b) 37°

c) 58°

13.9

a)

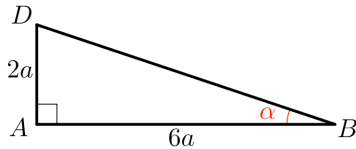


Suorakulmaisen särmiön tahko $ABCD$ on kohtisuorassa molempia tasoja vastaan. Tasojen välinen kulma on tahkon lävistäjän DB ja pohjasärmän AB välinen kulma, joka voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta ABD .

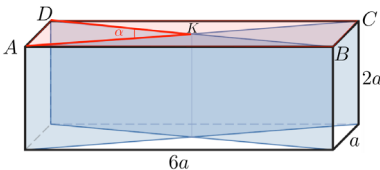
$$\tan \alpha = \frac{2a}{6a} = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\alpha = 18,434...^\circ \approx 18,4^\circ$$



b) Suorakulmaisen särmiön tahko $ABCD$ on kohtisuorassa molempia tasoja vastaan. Tasojen välinen kulma on tahkon $ABCD$ lävistäjien välinen kulma, joka voidaan laskea tasakylkisestä kolmiosta DAK .



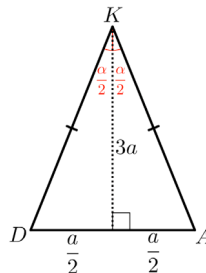
Koska kolmio DAK on tasakylkinen, niin huippukulman puolittaja jakaa kolmion DAK kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi. Ratkaistaan tasojen välinen kulma α .

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{3a} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = 9,462...^\circ \quad | \cdot 2$$

$$\alpha = 18,924...^\circ \approx 18,9^\circ$$



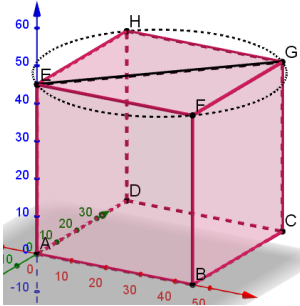
Vastaus

a) $18,4^\circ$

b) $18,9^\circ$

13.10

- a) Kun köysi on kiinnitetty tahkon keskipisteeseen, kuution levein kohta on sivutahkon lävistäjä.



Ratkaistaan lävistäjän pituus Pythagoraan lauseella.

$$EG^2 = 45^2 + 45^2$$

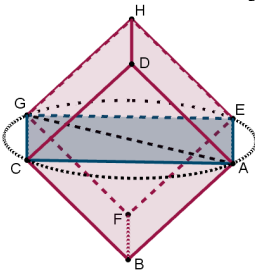
[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$EG = 45\sqrt{2} = 63,63... \approx 64 \text{ tai } EG = -45\sqrt{2} = -63,63... \approx -64$$

Pituus on positiivinen luku, joten $EG \approx 64$ cm.

Reiän halkaisijan tulee olla vähintään 64 cm.

- b) Kun köysi on kiinnitetty särmän keskipisteeseen, kuution levein kohta on sen avaruuslävistäjä.



Ratkaistaan avaruuslävistäjän pituus Pythagoraan lauseella.

$$AG^2 = 45^2 + 45^2 + 45^2$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$AG = 45\sqrt{3} = 77,94... \approx 78 \text{ tai } AG = -45\sqrt{3} = -77,94... \approx -78$$

Pituus on positiivinen luku, joten $AG \approx 78$ cm.

Reiän halkaisijan tulee olla vähintään 78 cm.

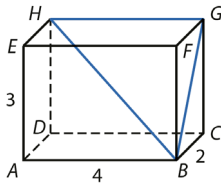
Vastaus

reiän halkaisija vähintään

a) 64 cm

b) 78 cm

13.11



- a) Kolmio BCG on suorakulmainen. Lasketaan sivun BG pituus.

$$BG^2 = 2^2 + 3^2$$

$$BG^2 = 13$$

$$BG = \sqrt{13} \text{ tai } x = -\sqrt{13}$$

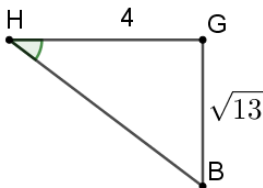
Pituus on positiivinen luku, joten $BG = \sqrt{13}$. Lasketaan avaruuslävistäjän pituus.

$$BH^2 = 4^2 + 3^2 + 2^2$$

$$BH^2 = 29$$

$$BH = \sqrt{29} \text{ tai } BH = -\sqrt{29}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $BH = \sqrt{29}$. Sivun GH pituus on 4.



- b) Kolmio BGH on suorakulmainen. Kulman G suuruus on 90° . Merkitään kulman H suuruutta kirjaimella α .

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{13}}{4} \right)$$

$$\alpha = 42,03...^\circ \approx 42^\circ$$

Kulman B suuruus on

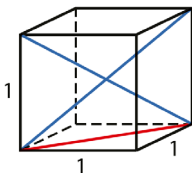
$$180^\circ - 90^\circ - 42,03...^\circ = 47,96... \approx 48^\circ.$$

Vastaus

a) $BG = \sqrt{13}$, $GH = 4$ ja $BH = \sqrt{29}$

b) $\sphericalangle B = 48^\circ$, $\sphericalangle G = 90^\circ$ ja $\sphericalangle H = 42^\circ$

13.12



- a) Lasketaan pohjatahkon lävistäjän pituus x .

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \text{ tai } x = -\sqrt{2}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $x = \sqrt{2}$.

- b) Lasketaan avaruuslävistäjän pituus y .

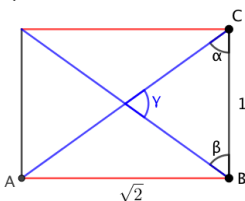
$$y^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2$$

$$y^2 = 3$$

$$y = \sqrt{3} \text{ tai } y = -\sqrt{3}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $y = \sqrt{3}$.

c)



Kolmio ABC on suorakulmainen. Lasketaan kulman α suuruus.

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{1}\right)$$

$$\alpha = 54,735\dots^\circ$$

Symmetrian perusteella $\beta = \alpha = 54,735\dots^\circ$.

Lasketaan avaruuslävistäjien välisen kulman suuruus.

$$\gamma = 180^\circ - 54,735\dots^\circ - 54,735\dots^\circ = 70,528\dots^\circ \approx 71^\circ$$

Vastaus

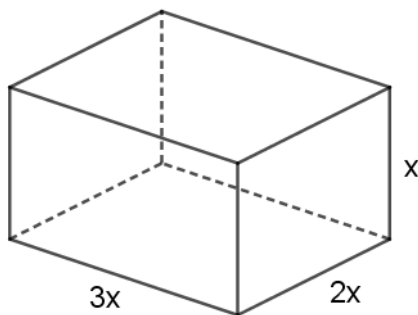
a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3}$

c) 71°

13.13

Merkitään särmien pituuksia x , $2x$ ja $3x$.



Särmiön tilavuus on $1,00 \text{ m}^3$. Ratkaistaan x .

$$3x \cdot 2x \cdot x = 1,00$$

$$6x^3 = 1,00 \quad |:6$$

$$x^3 = \frac{1,00}{6}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1,00}{6}} = 0,55032... \approx 0,55 \text{ (m)}$$

Lasketaan särmien pituudet.

$$x = 0,55032... \text{ (m)}$$

$$2x = 2 \cdot 0,55032... = 1,10064... \approx 1,10 \text{ (m)}$$

$$3x = 3 \cdot 0,55032... = 1,65096... \approx 1,65 \text{ (m)}$$

Vastaus

pituus 1,65 m, leveys 1,10 m ja korkeus 0,55 m

13.14

- a) Oletetaan kassakaapin olevan suorakulmaisen särmiön muotoinen. Lasketaan kassakaapin sisämitat.

$$\text{Pituus: } 350 - 2 \cdot 8,0 = 334 \text{ (mm)}$$

$$\text{Leveys: } 250 - 2 \cdot 8,0 = 234 \text{ (mm)}$$

$$\text{Korkeus: } 190 - 2 \cdot 8,0 = 174 \text{ (mm)}$$

Lasketaan kassakaapin vetoisuus (eli sisätilavuus).

$$V_s = 334 \cdot 234 \cdot 174 = 13\,599\,144 \text{ (mm}^3\text{)}$$

Ilmaistaan vetoisuus litroina.

$$\begin{aligned} 13\,599\,144 \text{ mm}^3 & \qquad \qquad \qquad 1\,000\,000 \text{ mm}^3 = 1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L} \\ &= 13,599\,144 \text{ L} \\ &\approx 14 \text{ L} \end{aligned}$$

- b) Kassakaapin seinämien tilavuus on ulkotilavuuden ja sisätilavuuden erotus.

$$V_m = 350 \cdot 250 \cdot 190 - 13\,599\,144 = 3\,025\,856 \text{ (mm}^3\text{)}$$

Ilmaistaan tilavuus kuutiometreinä.

$$\begin{aligned} 3\,025\,856 \text{ mm}^3 & \qquad \qquad \qquad 1\,000\,000\,000 \text{ mm}^3 = 1 \text{ m}^3 \\ &= 0,003\,025\,856 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Lasketaan kassakaapin seinämien massa.

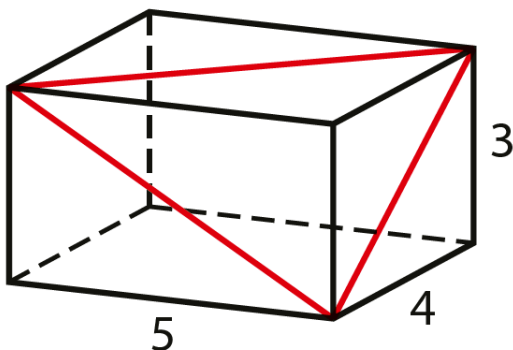
$$\begin{aligned} 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,003\,025\,856 \text{ m}^3 & \qquad \qquad \text{massa} = \text{tiheys} \cdot \text{tilavuus} \\ &= 23,75... \text{ kg} \\ &\approx 24 \text{ kg} \end{aligned}$$

Vastaus

- a) 14 L b) 24 kg

13.15

- a) Piirretään kuva geometriaohjelmalla.



- b) Mitataan kulmien suuruudet geometriaohjelmalla.

Pienin kulma on $48,0^\circ$.

- c) Suorakulmaisen särmiön mittojen perusteella kolmio pisin sivu on sen sivutahkon lävistäjä, jonka pituus on 5 ja leveys 4. Lasketaan sivun pituus x Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 = 5^2 + 4^2$$

$$x^2 = 41$$

$$x = \sqrt{41} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{41}$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x = \sqrt{41}$.

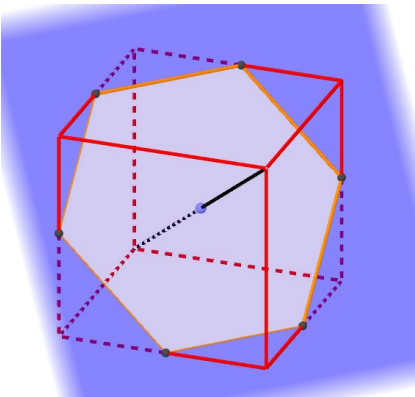
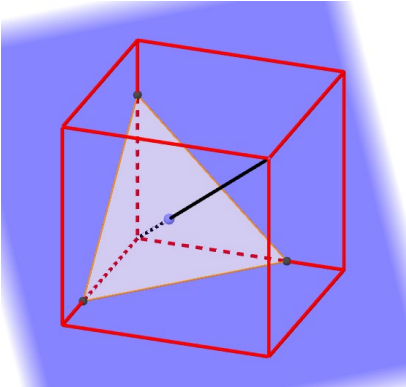
Vastaus

- b) $48,0^\circ$

- c) $\sqrt{41}$

13.16

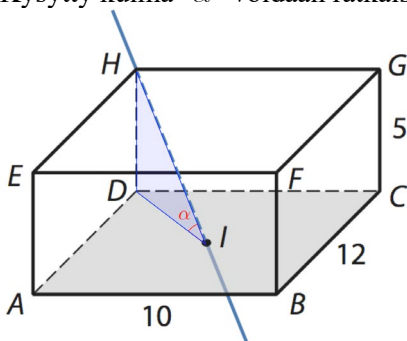
Piirretään geometriaohjelmalla kuutio ja sen sisään yksi avaruuslävistäjä. Asetetaan avaruuslävistäjälle liikuteltava piste ja tähän pisteeseen avaruuslävistäjää vastaan kohtisuora taso.



Vedenpinta on muodoltaan tasasivuinen kolmio kunnes se saavuttaa kolme vierekkäistä kärkeä. Sen jälkeen vedenpinta on kuusikulmio kunnes se saavuttaa seuraavat kolme kärkeä, minkä jälkeen se on jälleen tasasivuinen kolmio.

13.17

Kysytty kulma α voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta DIH .



Lasketaan lävistäjän DB pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$DB^2 = 10^2 + 12^2$$

$$DB = \pm 2\sqrt{61}$$

Pituus on positiivinen luku, joten

$$DB = 2\sqrt{61}.$$

Piste I on pohjatahkon keskipiste.

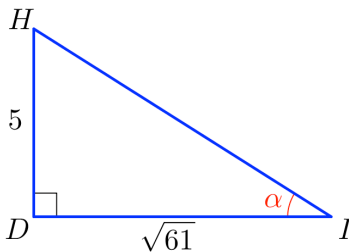
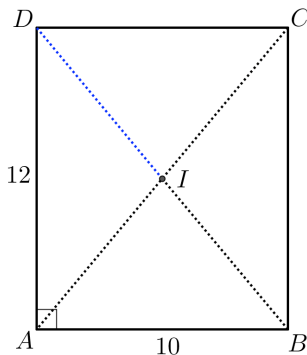
Lasketaan sivun DI pituus.

$$DI = \frac{1}{2}DB = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{61} = \sqrt{61}$$

Ratkaistaan kulman α suuruus suorakulmaisesta kolmiosta DIH .

$$\tan \alpha = \frac{5}{\sqrt{61}}$$

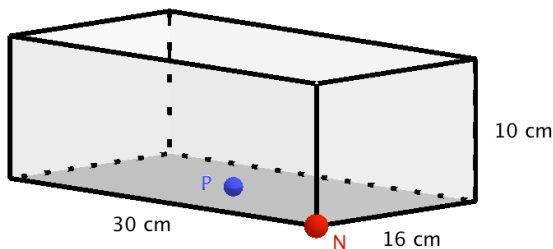
$$\begin{aligned} \alpha &= \tan^{-1} \left(\frac{5}{\sqrt{61}} \right) \\ &= 32,626...^\circ \approx 33^\circ \end{aligned}$$



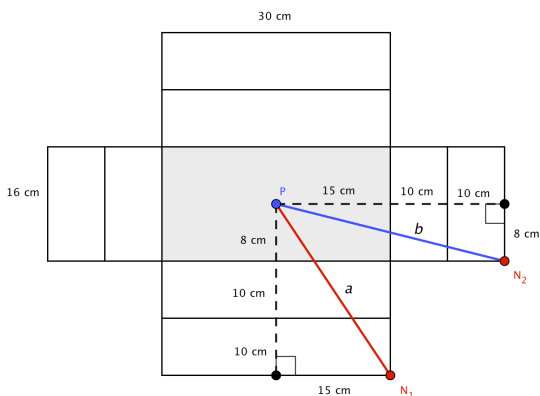
Vastaus

33°

13.18



Piirretään laatikko tasokuviona niin, että reunojen sisä- ja ulkopinnat näkyvät erikseen.



Lyhin reitti on joko punainen PN_1 tai sininen PN_2 .

Lasketaan niiden pituudet ja valitaan lyhyempi.

PN_1 :

PN_2 :

$$a^2 = 28^2 + 15^2$$

$$b^2 = 35^2 + 8^2$$

$$a = (\pm)\sqrt{1009} = (\pm)31,7\dots$$

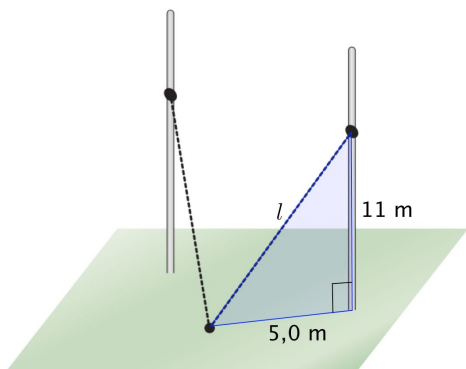
$$b = (\pm)\sqrt{1289} = (\pm)35,9\dots$$

Lyhin reitti on punaisella piirretty PN_1 ja sen pituus on 32 cm.

Vastaus

32 cm

13.19



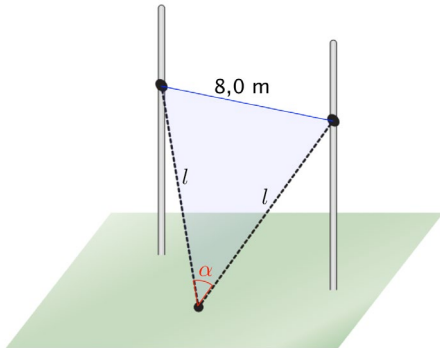
Lasketaan tukivaijerin pituus l .

$$l^2 = 5^2 + 11^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$l = \pm\sqrt{146}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $l = \sqrt{146}$.



Lasketaan vaijereiden välisen kulman suuruus kosinilauseella.

$$8,5^2 = l^2 + l^2 - 2 \cdot l \cdot l \cdot \cos \alpha$$

$$72,25 = 2l^2 - 2l^2 \cos \alpha$$

Sijoitetaan $l^2 = 146$.

$$72,25 = 2 \cdot 146 - 2 \cdot 146 \cos \alpha$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\alpha = 41,186...^\circ \approx 41^\circ$$

Vastaus

41°

13.20

Lasketaan kolmion ABC sivujen pituudet kuvaan piirrettyjen suorakulmaisten kolmioiden avulla.

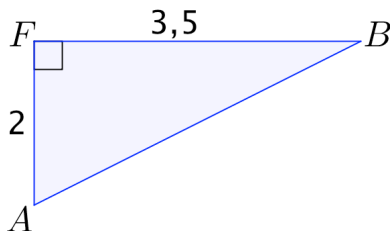
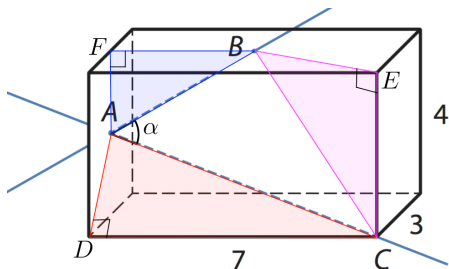
Kysytty kulma α voidaan määrittää sen jälkeen kosinilauseella.

Lasketaan sivun AB pituus.

$$AB^2 = 2^2 + 3,5^2$$

$$AB^2 = 16,25$$

$$AB = \pm\sqrt{16,25}$$



Pituus on positiivinen luku, joten $AB = \sqrt{16,25}$.

Yhtälö voidaan ratkaista myös CAS-laskimella, jolloin saadaan $AB = 4,031\dots$

Sivun AC pituus saadaan suorakulmaisesta kolmiosta ACD .

Sivun AD pituus on puolet päätytahkon lävistäjästä. Koska päätytahkon sivut ovat 3 ja 4, sen lävistäjän pituus on

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

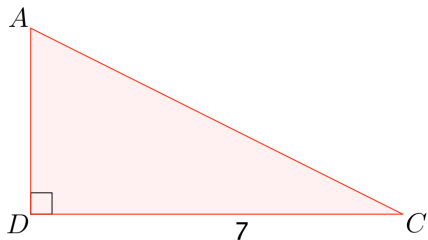
$$\text{Siis } AD = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Lasketaan sivun AC pituus.

$$AC^2 = 2,5^2 + 7^2$$

$$AC^2 = 55,25$$

$$AC = \pm\sqrt{55,25}$$



Pituus on positiivinen luku, joten $AC = \sqrt{55,25}$.

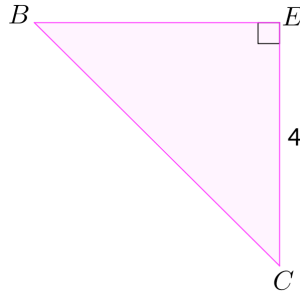
Yhtälö voidaan ratkaista myös CAS-laskimella, jolloin saadaan $AC = 7,433\dots$.

Sivun BC pituus saadaan suorakulmaisesta kolmiosta BEC .

Sivun BE pituus on puolet ylätahkon lävistäjästä. Koska ylätahkon sivut ovat 7 ja 3, sen lävistäjän pituus on

$$\sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{58}.$$

$$\text{Siis } BE = \frac{\sqrt{58}}{2}.$$



Laskea sivun BC pituus.

$$BC^2 = \left(\frac{\sqrt{58}}{2}\right)^2 + 4^2$$

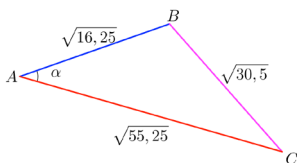
$$BC^2 = 30,5$$

$$BC = \pm\sqrt{30,5}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $BC = \sqrt{30,5}$.

Yhtälö voidaan ratkaista myös CAS-laskimella, jolloin saadaan $BC = 5,522\dots$.

Lasketaan kulman α suuruus kolmiosta ABC kosinilauseella.



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \alpha$$

$$30,5 = 16,25 + 55,25 - 2 \cdot \sqrt{16,25} \sqrt{55,25} \cos \alpha \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$\alpha = 46,830\dots^\circ \approx 47^\circ$$

Vastaus

47°

13.21

Kysytty kulma α voidaan määrittää suorakulmaisesta kolmiosta ACG .

Merkitään kuution särmän pituutta kirjaimella a . Tällöin pohjan lävistäjän pituus on

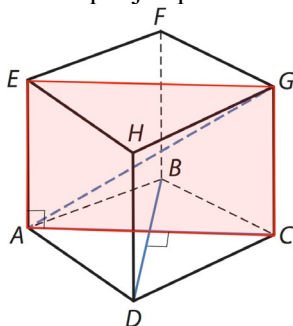
$$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

Lasketaan kulman α suuruus.

$$\tan \alpha = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{a}{a\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 35,264\dots^\circ \approx 35,3^\circ$$

Avaruuslävistäjä AG on kuution kärkipisteiden A , C , G ja E kautta kulkevassa tasossa. Tämä taso on kohtisuorassa pohjaa $ADCB$ vastaan ja leikkaa pohjan pitkin lävistäjää AC .

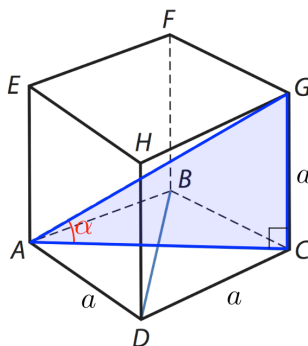


Koska pohja on neliö, sen lävistäjät AC ja BD ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Täten taso on kohtisuorassa lävistäjää BD vastaan. Siis tasossa kulkevan lävistäjän AG ja pohjan lävistäjän BD suuntien välinen kulma on 90° .

Vastaus

$$\sphericalangle(AG, AC) = 35,3^\circ$$

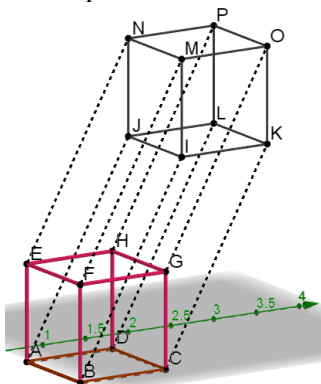
$$\sphericalangle(AG, BD) = 90^\circ$$



13.22

Kun kuutio liikkuu yksikön verran neljänteen ulottuvuuteen, jokainen

- kärki piirtää yksikön pituisen särmän
- särmä piirtää neliönmuotoisen tahkon
- tahko piirtää kuutionmuotoisen hypertahkon.



- Siirtymässä syntyy 8 uutta särmää, jokaisella on yksi uusi päätepiste, joten hyperkuutiossa on 16 kärkeä.
- Kuutiossa on 12 särmää, siirtymässä syntyy 8 uutta särmää, joiden loppupisteiden yhdistämiseen tarvitaan 12 särmää. Hyperkuutiossa on siis 32 särmää.
- Kuutiossa on 12 särmää, jokainen niistä piirtää uuden neliönmuotoisen tahkon, joten hyperkuutiossa on 24 tahkoa.
- Kuutiossa on 8 tahkoa, jokainen niistä piirtää uuden kuutionmuotoisen hypertahkon, joten hyperkuutiossa on 8 hypertahkoa.
- Hyperkuution lävistäjä on hypotenuusa suorakulmaisessa kolmiossa, jonka kateetit ovat kuution avaruuslävistäjä ja hyperkuution särmä. Lasketaan lävistäjän pituus d Pythagoraan lauseella neljässä ulottuvuudessa.

$$d = \sqrt{1^2 + 1^1 + 1^2 + 1^2} = 2$$

Vastaus

- | | | |
|-------|-------|-------|
| a) 16 | b) 32 | c) 24 |
| d) 8 | e) 2 | |