

# KERTAUS

## KERTAUSTEHTÄVIÄ

- K1. a)** Kun suoran  $s$  pisteen  $x$ -koordinaatti kasvaa yhdellä, pisteen  $y$ -koordinaatti kasvaa kahdella. Suoran  $s$  kulmakerroin on siis 2.

Kun suoran  $t$  pisteen  $x$ -koordinaatti kasvaa kahdella, pisteen  $y$ -koordinaatti pienenee kolmella. Suoran  $t$  kulmakerroin on siis

$$k = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Kun suoran  $u$  pisteen  $x$ -koordinaatti kasvaa yhdellä, pisteen  $y$ -koordinaatti ei muutu, joten  $y$ -koordinaatin muutos on 0. Suoran  $u$  kulmakerroin on siis

$$k = \frac{0}{1} = 0.$$

Suora  $v$  on  $y$ -akselin suuntainen, joten sillä ei ole kulmakerrointa.

Vastaus:  $s$ : 2,  $t$ :  $-\frac{3}{2}$ ,  $u$ : 0 ja  $v$ : ei kulmakerrointa

- b)** Jos suora ei ole  $y$ -akselin suuntainen, suoran yhtälö on muotoa  $y = kx + b$ , jossa  $k$  on kulmakerroin ja  $b$  vakiotermi. Vakiotermi nähdään suoran  $y$ -akselin leikkauspisteestä.

Suora  $s$  leikkaa  $y$ -akselin pisteessä  $(0, 3)$ , joten sen vakiotermi on 3. Suoran  $s$  yhtälö on siis  $y = 2x + 3$ .

Suora  $t$  leikkaa  $y$ -akselin pisteessä  $(0, -1)$ , joten sen vakiotermi on  $-1$ .

Suoran  $t$  yhtälö on siis  $y = -\frac{3}{2}x - 1$ .

Suora  $u$  leikkaa  $y$ -akselin pisteessä  $(0, 2)$ , joten sen vakiotermi on 2. Suoran  $u$  yhtälö on siis  $y = 0x + 2$  eli  $y = 2$ .

Suora  $v$  on  $y$ -akselin suuntainen, joten sen yhtälöä ei voida esittää muodossa  $y = kx + b$ . Jokaisen suoran  $v$  pisteen  $x$ -koordinaatti on 1, joten suoran yhtälö on  $x = 1$ .

$$\text{Vastaus: } s: y = 2x + 3, t: y = -\frac{3}{2}x - 1, u: y = 2 \text{ ja } v: x = 1$$

**K2.** Lasketaan suorien kulmakertoimet sijoittamalla pisteiden koordinaatit

$$\text{kaavaan } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

- a)** Suora kulkee pisteiden  $(0, 0)$  ja  $(1, -4)$  kautta, joten  $x_1 = 0, y_1 = 0, x_2 = 1$  ja  $y_2 = -4$ .

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - 0}{1 - 0} = \frac{-4}{1} = -4$$

$$\text{Vastaus: } k = -4$$

- b)** Suora kulkee pisteiden  $(3, 5)$  ja  $(4, 5)$  kautta, joten  $x_1 = 3, y_1 = 5, x_2 = 4$  ja  $y_2 = 5$ .

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 5}{4 - 3} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{Vastaus: } k = 0$$

- c)** Suora kulkee pisteiden  $(-1, 5)$  ja  $(-1, 3)$  kautta, joten  $x_1 = -1, y_1 = 5, x_2 = -1$  ja  $y_2 = 3$ .

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 5}{-1 - (-1)} = \frac{-2}{0}$$

Nollalla ei voi jakaa, joten suoralla ei ole kulmakerrointa.

$$\text{Vastaus: ei kulmakerrointa}$$

d) Suora kulkee pisteiden  $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$  ja  $\left(-\frac{5}{12}, \frac{5}{3}\right)$  kautta, joten

$$x_1 = \frac{1}{2}, y_1 = \frac{3}{4}, x_2 = -\frac{5}{12} \text{ ja } y_2 = \frac{5}{3}.$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\overset{4)}{5} - \overset{3)}{3}}{-\frac{5}{12} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{20}{12} - \frac{9}{12}}{-\frac{5}{12} - \frac{6}{12}} = \frac{\frac{11}{12}}{-\frac{11}{12}} = -1$$

Vastaus:  $k = -1$

**K3.** Jos suora ei ole y-akselin suuntainen, suoran yhtälö on muotoa  $y = kx + b$ , jossa  $k$  on kulmakerroin ja  $b$  vakiotermi. Suoran pisteet toteuttavat suoran yhtälön, joten yhtälöön voidaan sijoittaa minkä tahansa suoralla olevan pisteen koordinaatit.

a) Suoran kulmakerroin  $k = -4$ , joten suoran yhtälö on muotoa  $y = -4x + b$ . Koska piste  $(1, 2)$  on suoralla, sen koordinaatit  $x = 1$  ja  $y = 2$  toteuttavat suoran yhtälön. Sijoitetaan koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi  $b$ .

$$y = -4x + b$$

$$2 = -4 \cdot 1 + b$$

$$2 = -4 + b$$

$$2 + 4 = b$$

$$b = 6$$

Vastaus:  $y = -4x + 6$

- b)** Lasketaan suoran kulmakerroin  $k$  sijoittamalla  $x_1 = 2$ ,  $y_1 = -3$ ,  $x_2 = 1$  ja

$$y_2 = 4 \text{ kulmakertoimen kaavaan } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - (-3)}{1 - 2} = \frac{7}{-1} = -7$$

Suoran yhtälö on muotoa  $y = -7x + b$ . Sijoitetaan pisteen  $(1, 4)$  koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi  $b$ .

$$4 = -7 \cdot 1 + b$$

$$4 = -7 + b$$

$$4 + 7 = b$$

$$b = 11$$

Suoran yhtälö on  $y = -7x + 11$ .

Vastaus:  $y = -7x + 11$

- c)** Koska suora on yhdensuuntainen suoran  $y = 3x - 4$  kanssa, kysytyn suoran kulmakerroin  $k = 3$ .

Suoran yhtälö on muotoa  $y = 3x + b$ . Sijoitetaan pisteen  $(3, 3)$  koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi  $b$ .

$$3 = 3 \cdot 3 + b$$

$$3 = 9 + b$$

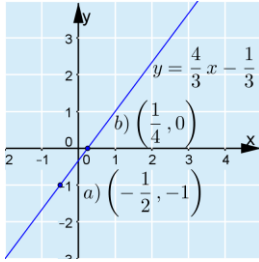
$$3 - 9 = b$$

$$b = -6$$

Suoran yhtälö on  $y = 3x - 6$ .

Vastaus:  $y = 3x - 6$

- K4.** Piirretään suora  $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ . Sijoitetaan piste  $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$  koordinaatistoon ja määritetään suoran ja  $x$ -akselin leikkauspiste.



- a)** Jos piste  $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$  on suoralla  $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ , sen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön. Lasketaan  $x$ -koordinaattia  $-\frac{1}{2}$  vastaava  $y$ -koordinaatti.

$$y = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = -1$$

$y$ -koordinaatti on  $-1$ , joten piste  $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$  on suoralla.

Vastaus: on

- b) Suora leikkaa  $x$ -akselin pisteessä, jonka  $y$ -koordinaatti on 0. Sijoitetaan  $y = 0$  suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä  $x$ -koordinaatti.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3}x &= -\frac{1}{3} && \parallel \cdot 3 \\ -4x &= -1 && \parallel : (-4) \\ x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Suora leikkaa  $x$ -akselin pisteessä  $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ .

Vastaus:  $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$

- K5.** a) Funktion lausekkeessa  $39x + 13$  luku 39 kerrotaan maton pituudella  $x$ , joten luku 39 on maton metrihinta (€/kg).

Vastaus: metrihintaa 39 €/m

- b)  $f(1,8) = 39 \cdot 1,8 + 13 = 83,2$

Tulos  $f(1,8) = 83,2$  tarkoittaa, että 1,8 metriä pitkä matto maksaa 83,20 euroa.

Vastaus:  $f(1,8) = 83,2$ . 1,8 m pitkä matto maksaa 83,20 €.

- c) Ratkaistaan muuttuja  $x$  yhtälöstä  $f(x) = 122,20$ .

$$\begin{aligned} 39x + 13 &= 122,20 \\ 39x &= 109,20 && \parallel : 39 \\ x &= 2,80 \end{aligned}$$

Tulos tarkoittaa, että 122,20 €:lla saa 2,80 metriä pitkän maton.

Vastaus:  $x = 2,80$ . 122,20 eurolla saa 2,80 m pitkän maton.

**K6.** Auto A kuluttaa bensiiniä  $\frac{5,01}{100 \text{ km}} = 0,05 \frac{\text{l}}{\text{km}}$ . Bensiinilitran hinta on 1,80 €, joten autolla A bensiinikulut yhtä kilometriä kohti ovat

$$1,80 \text{ €} \cdot 0,05 = 0,09 \text{ €}.$$

Auto B kuluttaa bensiiniä  $\frac{8,31}{100 \text{ km}} = 0,083 \frac{\text{l}}{\text{km}}$ . Autolla B bensiinikulut yhtä kilometriä kohti ovat

$$1,90 \text{ €} \cdot 0,083 = 0,1494 \text{ €}.$$

Jos Kristian ajaa  $x$  kilometriä vuodessa autolla A 10 vuoden ajan, niin bensiinikulut ovat euroina  $10 \cdot x \cdot 0,09 = 0,9x$ .

Vastaavat kulut autolla B ovat  $10 \cdot x \cdot 0,1494 = 1,494x$ .

Kun lisätään kuluihin auton ostohinta, auton A kulut ovat yhteensä 12 000 + 0,9x ja auton B kulut 6000 + 1,494x.

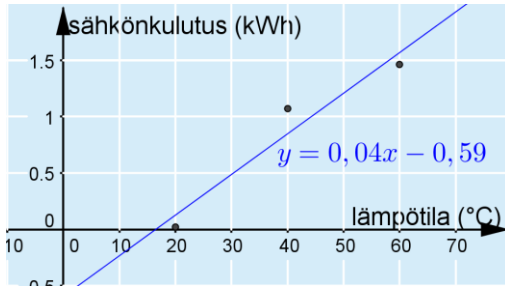
Merkitään autojen kulut yhtä suuriksi ja ratkaistaan yhtälöstä kilometrien määrä  $x$ .

$$\begin{aligned} 12000 + 0,9x &= 6000 + 1,494x \\ 0,9x - 1,494x &= 6000 - 12000 \\ -0,594 &= -6000 && \parallel : (-0,594) \\ x &= 10101,010\dots \\ x &\approx 10\,000 \end{aligned}$$

Auto A kannattaa valita, jos vuosittainen kilometrimäärä on vähintään 10 000 km.

Vastaus: vähintään 10 000 km

- K7. a)** Sovitetaan pisteisiin  $(20; 0,02)$ ,  $(40; 1,07)$  ja  $(60; 1,46)$  suora.



Lineaarinen malli on  $y = 0,04x - 0,59$ , jossa  $x$  on lämpötila.

Vastaus:  $y = 0,04x - 0,59$

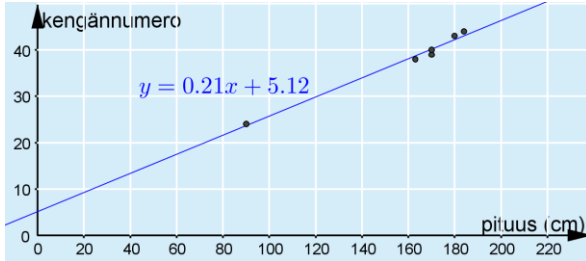
- b)** Sijoitetaan  $x = 95$  ohjelmalla saatuun suoran yhtälöön, jolloin  $y = 2,83$ .

Sähköä kuluisi 2,83 kWh 95 °C:n pesuohjelmalla.

Vastaus: 2,83 kWh

- c)** Veden kiehumispiste on 100 °C, joten nestemäisen veden lämpötila ei voi nousta 110 °C:n lämpötilaan. Tällaista pesuohjelmaa ei siis voi olla, joten malli ei ole käyttökelpoinen, kun  $x > 100$ .

Vastaus: ei voi

**K8.** Sovitetaan aineistoon lineaarinen malli.

Suoran yhtälö on  $y = 0,21x + 5,12$ , jossa  $x$  on henkilön pituus senttimetreinä ja  $y$  kengännumero.

- a) Sijoitetaan  $x = 200$  ohjelmalla saatuun suoran yhtälöön, jolloin  $y = 46,348\dots \approx 46$ .

200 cm pitkän henkilön kengännumero on 46.

Vastaus: 46

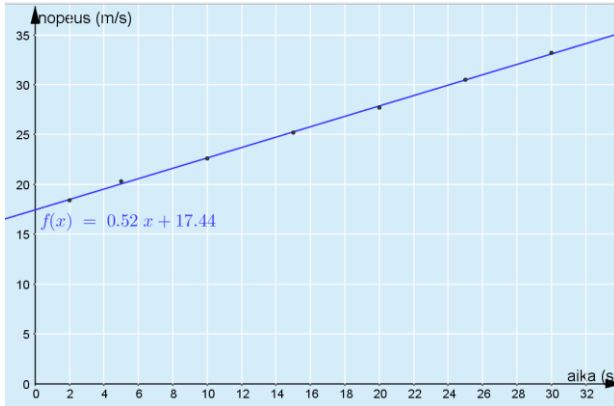
- b) Sijoitetaan  $x = 50$  ohjelmalla saatuun suoran yhtälöön, jolloin  $y = 15,428\dots \approx 15$

Mallin mukaan 50 cm pitkän vastasyntyneen kengännumero on 15.

Vastaus: 15

- c) Sijoitetaan oma pituus senttimetreinä ohjelmalla saatuun suoran yhtälöön muuttujan  $x$  paikalle. Verrataan saatua tulosta todelliseen kengännumeroon.

Vastaus: –

**K9.** Sovitetaan aineistoon lineaarinen malli.

Malliksi saadaan  $f(x) = 0,52x + 17,44$ .

Kulmakerroin 0,52 ilmaisee, että nopeus kasvaa 0,52 m/s aina, kun aikaa kuluu yksi sekunti. Vakiotermi 17,44 ilmaisee, että nopeus on 17,44 m/s ajanhetkellä 0 s.

Vastaus:  $f(x) = 0,52x + 17,44$ , kulmakerroin ilmaisee, että nopeus kasvaa 0,52 m/s aina, kun aikaa kuluu yksi sekunti, vakiotermi ilmaisee, että nopeus on 17,44 m/s ajanhetkellä 0 s.

**K10. a)** Sievennetään lauseke samankantaisten potenssien tulon avulla.

$$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$$

Vastaus: 32

**b)** Sievennetään lauseke samankantaisten potenssien osamäärän avulla.

$$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2 = 9$$

Vastaus: 9

- c) Sievennetään osoittaja tulon potenssin avulla.

$$\frac{2^5 \cdot 5^5}{10^4} = \frac{(2 \cdot 5)^5}{10^4} = \frac{10^5}{10^4}$$

Samankantaisten potenssien osamäärän avulla saadaan

$$\frac{10^5}{10^4} = 10^{5-4} = 10^1 = 10.$$

Vastaus: 10

- d) Sievennetään lauseke.

$$3 \cdot 3^3 - (2^3)^2 = 3^{1+3} - 2^{3 \cdot 2} = 3^4 - 2^6 = 81 - 64 = 17$$

Vastaus: 17

- K11.** a) Kirjoitetaan yhtälön molemmat puolet kantaluvun 4 potensseina ja ratkaistaan yhtälö.

$$4^x = 64$$

$$4^x = 4^3$$

$$x = 3$$

Vastaus:  $x = 3$

- b) Muokataan yhtälöä ensin siten, että yhtälön vasemmalla puolella on vain eksponenttilauseke. Ratkaistaan sitten yhtälö samankantaisten potenssien avulla.

$$6 \cdot 3^x = 54 \quad || :6$$

$$3^x = 9$$

$$3^x = 3^2$$

$$x = 2$$

Vastaus:  $x = 2$

- c) Ratkaistaan yhtälö potenssien laskusääntöjen avulla.

$$\begin{aligned}\frac{5^x}{25} &= 125 \\ \frac{5^x}{5^2} &= 5^3 \\ 5^{x-2} &= 5^3 \\ x-2 &= 3 \\ x &= 5\end{aligned}$$

Vastaus:  $x = 5$

- d) Kirjoitetaan yhtälön molemmat puolet kantaluvun 2 potensseina ja ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned}8 \cdot 2^x &= 4 \\ 2^3 \cdot 2^x &= 2^2 \\ 2^{3+x} &= 2^2 \\ 3+x &= 2 \\ x &= -1\end{aligned}$$

Vastaus:  $x = -1$

**K12. a)** Ratkaistaan yhtälö logaritmia käyttäen.

$$5^x = 15$$

$$x = \log_5 15$$

$$x = 1,682\dots$$

$$x \approx 1,68$$

Vastaus:  $x = \log_5 15 \approx 1,68$

**b)** Muokataan yhtälöä ensin siten, että yhtälön vasemmalla puolella on vain eksponenttilauseke. Ratkaistaan sitten yhtälö logaritmia käyttäen.

$$3^x + 9 = 25$$

$$3^x = 16$$

$$x = \log_3 16$$

$$x = 2,523\dots$$

$$x \approx 2,52$$

Vastaus:  $x = \log_3 16 \approx 2,52$

**c)** Muokataan yhtälöä ensin siten, että yhtälön vasemmalla puolella on vain eksponenttilauseke. Ratkaistaan sitten yhtälö logaritmia käyttäen.

$$3 \cdot 2^x = 36 \quad || :3$$

$$2^x = 12$$

$$x = \log_2 12$$

$$x = 3,584\dots$$

$$x \approx 3,58$$

Vastaus:  $x = \log_2 12 \approx 3,58$

- d) Muokataan yhtälön oikeata puolta ja ratkaistaan sitten yhtälö logaritmin avulla.

$$4^x = (3^2)^4$$

$$4^x = 3^{2 \cdot 4}$$

$$4^x = 3^8$$

$$4^x = 6561$$

$$x = \log_4 6561$$

$$x = 6,339\dots$$

$$x \approx 6,34$$

Vastaus:  $x = \log_4 6561 \approx 6,34$

- K13.** a)  $\sqrt[4]{16} = 4$ , koska  $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$  ja  $4 \geq 0$ .

Vastaus: 4

- b)  $\sqrt[4]{16} = 2$ , koska  $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$  ja  $2 \geq 0$ .

Vastaus: 2

- c)  $\sqrt[3]{27} = 3$ , koska  $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ .  
 $\sqrt[5]{1} = 1$ , koska  $1^5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ .

Siis  $\sqrt[3]{27} + \sqrt[5]{1} = 3 + 1 = 4$ .

Vastaus: 4

- d)  $\sqrt[4]{81} = 3$ , koska  $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$  ja  $3 \geq 0$ .  
 $\sqrt[6]{0} = 0$ , koska  $0^6 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$  ja  $0 \geq 0$ .

Siis  $\sqrt[4]{81} - \sqrt[6]{0} = 3 + 0 = 3$ .

Vastaus: 3

- K14. a)** Etsitään lukuja, joiden toinen potenssi on 49.

$$x^2 = 49$$

$$x = \pm\sqrt{49}$$

$$x = \pm 7$$

Vastaus:  $x = \pm 7$

- b)** Etsitään luku, jonka viides potenssi on  $-32$ .

$$x^5 = -32$$

$$x = \sqrt[5]{-32}$$

$$x = -2$$

Vastaus:  $x = -2$

- c)** Muokataan yhtälö muotoon, jossa vasemmalla puolella on ainoastaan potenssimerkintä.

$$2x^3 = 250 \quad ||: 2$$

$$x^3 = 125$$

$$x = \sqrt[3]{125}$$

$$x = 5$$

Vastaus:  $x = 5$

- d)** Muokataan yhtälö muotoon, jossa vasemmalla puolella on ainoastaan potenssimerkintä.

$$x^4 + 5 = 86$$

$$x^4 = 81$$

$$x = \pm\sqrt[4]{81}$$

$$x = \pm 3$$

Vastaus:  $x = \pm 3$

- K15. a)** Muokataan yhtälö muotoon, jossa vasemmalla puolella on ainoastaan potenssimerkintä.

$$\begin{aligned} -2x^3 + 4 &= 56 \\ -2x^3 &= 52 && \quad ||: (-2) \\ x^3 &= -26 \\ x &= \sqrt[3]{-26} \\ x &= -2,962\dots \\ x &\approx -3,0 \end{aligned}$$

Vastaus:  $x = \sqrt[3]{-26} \approx -3,0$

- b)** Muokataan yhtälö muotoon, jossa vasemmalla puolella on ainoastaan potenssimerkintä.

$$\begin{aligned} 4(x^6 - 3) &= 80 && \quad ||: 4 \\ x^6 - 3 &= 20 \\ x^6 &= 23 \\ x &= \pm\sqrt[6]{23} \\ x &= \pm 1,686\dots \\ x &\approx \pm 1,7 \end{aligned}$$

Vastaus:  $x = \pm\sqrt[6]{23} \approx \pm 1,7$

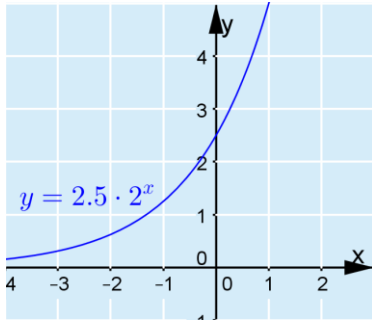
- c)** Muokataan yhtälö muotoon, jossa vasemmalla puolella on ainoastaan potenssimerkintä.

$$\begin{aligned} x^6 + 123 &= -5x^6 - 890 \\ 6x^6 &= -1013 && \quad ||: 6 \\ x^6 &= -\frac{1013}{6} \end{aligned}$$

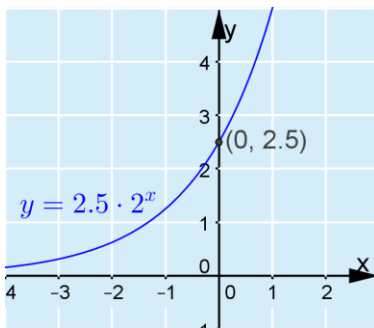
Luvun parillinen potenssi ei voi olla negatiivinen, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Vastaus: ei ratkaisua

**K16.** Piirretään funktion  $f(x) = 2,5 \cdot 2^x$  kuvaaja.



- a) Kuvan perusteella funktion  $f$  kuvaaja leikkaa y-akselin pisteessä  $(0; 2,5)$ .

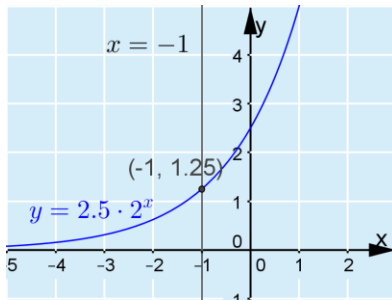


Tarkistetaan sijoittamalla  $x = 0$  funktion  $f$  lausekkeeseen.

$$y = f(0) = 2,5 \cdot 2^0 = 2,5$$

Vastaus:  $(0; 2,5)$

- b) Määritetään funktion  $f$  kuvaajan ja suoran  $x = -1$  leikkauspiste. Leikkauspisteen  $y$ -koordinaatti on kysytty funktion arvo.

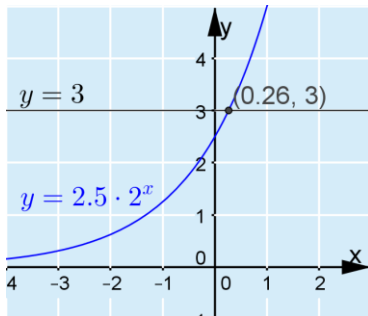


Leikkauspiste on  $(-1; 1,25)$ .

Tarkistetaan sijoittamalla  $x = -1$  funktion  $f$  lausekkeeseen.  
 $y = f(-1) = 2,5 \cdot 2^{-1} = 1,25$

Vastaus:  $f(-1) = 1,25$

- c) Määritetään suoran  $y = 3$  ja funktion  $f$  kuvaajan leikkauspiste. Leikkauspisteen  $x$ -koordinaatti on kysytty muuttujan  $x$  arvo.



Tarkistetaan yhtälön avulla.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 \\ 2,5 \cdot 2^x &= 3 && \parallel: 2,5 \\ 2^x &= 1,2 \\ x &= \log_2 1,2 \\ x &= 0,263\dots \\ x &\approx 0,26 \end{aligned}$$

Kysytty muuttujan arvo on  $x = \log_2 1,2 \approx 0,26$ .

Vastaus:  $x = \log_2 1,2 \approx 0,26$

**K17.** Bakteerien määrä 2,6-kertaistuu aina yhtä pitkässä ajassa, joten bakteerikannan kasvu on eksponentiaalista. Eksponentiaalisen mallin muutoskerroin  $q = 2,6$ . Bakteereita on nyt 5000, joten alkuperäinen arvo  $a = 5000$ . Bakteerien määrä noudattaa siis mallia  $f(x) = 5000 \cdot 2,6^x$ , jossa  $x$  on aika tunteina.

a) Lasketaan funktion  $f$  arvo kohdassa  $x = 9$ .

$$f(9) = 5000 \cdot 2,6^9 = 27147518,39 \approx 2,7 \cdot 10^7$$

Bakteereita on noin  $2,7 \cdot 10^7$  yhdeksän tunnin kuluttua.

Vastaus:  $2,7 \cdot 10^7$  kpl

b) Lasketaan funktion  $f$  arvo kohdassa  $x = -7$ .

$$f(-7) = 5000 \cdot 2,6^{-7} = 6,225\dots \approx 6$$

Bakteereita oli 6 seitsemän tuntia sitten.

Vastaus: 6 kpl

- c) Muodostetaan yhtälö miljoonan bakteerin määrälle ja ratkaistaan siitä kysytty aika  $x$ .

$$f(x) = 1000000$$

$$5000 \cdot 2,6^x = 1000000 \quad || : 5000$$

$$2,6^x = 200$$

$$x = \log_{2,6} 200$$

$$x = 5,545\dots$$

$$x \approx 6$$

Bakteerien määrä ylittää miljoonan noin 6 tunnin kuluttua.

Vastaus: 6 tunnin kuluttua

- K18. a)** Koska ilmanpaine alenee yhtä monta prosenttia joka kilometrillä, ilmanpaineen aleneminen on eksponentiaalista.

Kun nousee kilometri ylöspäin, ilmanpaine on  $100\% - 13,3\% = 86,7\%$  alkuperäisestä, joten ilmanpaine muuttuu joka kilometrillä  $0,867$ -kertaiseksi. Muutoskerroin  $q = 0,867$  ja alkuperäinen arvo  $a = 1,01$  (baaria). Ilmanpaine noudattaa siis mallia  $f(x) = 1,01 \cdot 0,867^x$ , jossa  $x$  on korkeus kilometreinä.

Ilmanpaineen laskemiseksi on muutettava tunturin korkeus kilometreiksi:  
 $1324 \text{ m} = 1,324 \text{ km}$ .

Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 1,324$ .

$$f(1,324) = 1,01 \cdot 0,867^{1,324} = 0,8361\dots \approx 0,836$$

Ilmanpaine Haltin huipulla on  $0,836$  baaria.

Vastaus:  $0,836$  baaria

- b)** Muodostetaan yhtälö Taivaskeron huipulla mitatulle ilmanpaineelle ja ratkaistaan siitä korkeus  $x$ .

$$f(x) = 0,8999$$

$$1,01 \cdot 0,867^x = 0,8999 \quad \| : 1,01$$

$$0,867^x = 0,8909\dots$$

$$x = \log_{0,867}(0,8909\dots)$$

$$x = 0,8087\dots$$

$$x \approx 0,809$$

Taivaskeron huipun korkeus on  $0,809 \text{ km}$  eli  $809 \text{ m}$ .

Vastaus:  $809 \text{ m}$

**K19.** Kalakanta kasvaa vuosittain aina yhtä monta prosenttia, joten kasvu on eksponentiaalista. Merkitään alkuperäistä kalakantaa kirjaimella  $a$  ( $> 0$ ).

Seuraavan vuoden kalakanta on  $100\% + 11\% = 111\%$  tarkasteltavan vuoden kalakannasta, joten kalakanta kasvaa joka vuosi 1,11-kertaiseksi. Muutoskerroin on siten  $q = 1,11$ .

Kalakannan suuruus noudattaa siis mallia  $f(x) = a \cdot 1,11^x$ , jossa  $x$  on kulunut aika vuosina.

Kun kalakanta on kaksinkertaistunut, sen suuruus on  $2a$ . Muodostetaan yhtälö kalakannan suuruudelle ja ratkaistaan siitä vuosien määrä  $x$ .

$$\begin{aligned}f(x) &= 2a \\a \cdot 1,11^x &= 2a \quad || :a \\1,11^x &= 2 \\x &= \log_{1,11} 2 \\x &= 6,641\dots \\x &\approx 7\end{aligned}$$

Kalakannan kaksinkertaistumiseen kuluu aikaa noin 7 vuotta.

Vastaus: 7 vuoden kuluttua

**K20.** Ihmisen luuston soluista uusiutuu 5 % joka vuosi, joten muutos on eksponentiaalista. Merkitään luuston solujen alkuperäistä määrää kirjaimella  $a$  ( $> 0$ ).

Soluista jää uusiutumatta 95 % joka vuosi, joten uusiutumattomien solujen määrä tulee joka vuosi 0,95-kertaiseksi. Muutoskerroin on siten  $q = 0,95$ .

Uusiutumattomien solujen määrä noudattaa siis mallia  $f(x) = a \cdot 0,95^x$ , jossa  $x$  on kulunut aika vuosina.

Kun soluista on uusiutunut 90 %, soluista on uusiutumatta 10 % eli  $0,10a$ . Muodostetaan yhtälö uusiutumattomien solujen määrälle ja ratkaistaan siitä vuosien määrä  $x$ .

$$\begin{aligned}f(x) &= 0,10a \\ a \cdot 0,95^x &= 0,10a \quad || : a \\ 0,95^x &= 0,10 \\ x &= \log_{0,95} 0,10 \\ x &= 44,890\dots \\ x &\approx 45\end{aligned}$$

Kestää noin 45 vuotta, että 90 % soluista on uusiutunut.

Vastaus: 45 vuotta

- K21.** Säteilyn määrä vähenee puoleen aina yhtä pitkässä ajassa, joten väheneminen on eksponentiaalista. Puoliintumisaika on 36 vuotta, joten  $x$  vuodessa puoliintumisia tapahtuu  $\frac{x}{36}$  kpl. Muutoskerroin  $q$  on puoliintumisaajan avulla ilmoitettuna 0,5.

Alkuperäisen arvon ja muutoksien jälkeen saavutetun arvon tulee olla samassa yksikössä. Muunnetaan 50 Sv/h päivän säteilyksi:

$$50 \frac{\text{Sv}}{\text{h}} = 50 \cdot 24 \frac{\text{Sv}}{\text{d}} = 1200 \frac{\text{Sv}}{\text{d}}.$$

Säteilyn määrä päivässä noudattaa siis mallia  $f(x) = 1200 \cdot 0,5^{\frac{x}{36}}$ , jossa  $x$  on aika vuosina.

Muodostetaan yhtälö säteilyn määrälle ja ratkaistaan siitä aika  $x$ .

$$f(x) = 0,0027$$

$$1200 \cdot 0,5^{\frac{x}{36}} = 0,0027 \quad \parallel : 1200$$

$$0,5^{\frac{x}{36}} = 0,00000225$$

$$\frac{x}{36} = \log_{0,5} 0,00000225 \quad \parallel \cdot 36$$

$$x = 36 \cdot \log_{0,5} 0,00000225$$

$$x = 675,419\dots$$

$$x \approx 680$$

Aikaa kuluu noin 680 vuotta.

Vastaus: 680 vuotta

- K22.** Merkitään talletuksesta kulunutta aikaa vuosina kirjaimella  $x$ . Tilillä oleva pääoma kasvaa eksponentiaalisesti, joten pääoma noudattaa mallia  $f(x) = a \cdot q^x$ . Talletettu summa on 1000 euroa, joten alkuperäinen arvo  $a = 1000$ .

Muuttujan arvolla  $x = 18$  funktio  $f$  saa arvon 3000. Ratkaistaan yhtälöstä  $f(18) = 3000$  muutoskerroin  $q$ .

$$\begin{aligned} 1000 \cdot q^{18} &= 3000 && \quad || : 1000 \\ q^{18} &= 3 \\ q &= \sqrt[18]{3} \text{ tai } q = -\sqrt[18]{3} \\ q &= 1,06293\dots \text{ tai } q = -1,06293\dots \\ q &\approx 1,063 \text{ tai } q \approx -1,063 \end{aligned}$$

Muutuskertoimen tulee olla positiivinen, joten pääoman tulee 1,063-kertaistua jokaisen vuoden aikana. Pääoman tilillä tulee kasvaa noin 6,3 % vuodessa.

Vastaus: 6,3 %

- K23.** Keskimääräisellä kasvuprosentilla tarkoitetaan prosentuaalista muutosta, joka olisi tapahtunut vuosittain, jos hinta olisi noussut joka vuosi yhtä monta prosenttia. Tällainen kasvu on eksponentiaalista. Kuukausikortin hinta noudattaa siis mallia  $f(x) = a \cdot q^x$ , jossa alkuperäinen arvo  $a = 29$  ja  $x$  vuodesta 2009 kulunut aika vuosina.

Vuodesta 2009 vuoteen 2020 oli kulunut  $2020 - 2009 = 11$  vuotta. Hinta 11 vuoden kuluttua oli 49 €. Ratkaistaan yhtälöstä  $f(11) = 49$  muutoskerroin  $q$ .

$$\begin{aligned} 29 \cdot q^{11} &= 49 && \quad || : 29 \\ q^{11} &= \frac{49}{29} \\ q &= \sqrt[11]{\frac{49}{29}} \\ q &= 1,0488\dots \\ q &\approx 1,049 \end{aligned}$$

Hinta kasvoi noin 1,049-kertaiseksi vuosittain, joten se kasvoi noin 4,9 % vuodessa.

Vastaus: 4,9 %

s

**K24.** Liikevaihto kasvoi joka vuosi yhtä monta prosenttia, joten kasvu oli eksponentiaalista. Liikevaihto noudattaa siis mallia  $f(x) = a \cdot q^x$ , jossa  $x$  on kulunut aika vuosina.

Alkuperäistä liikevaihtoa ei tunneta, joten merkitään sitä kirjaimella  $a$  ( $> 0$ ). Kahdessakymmenessä vuodessa liikevaihto kymmenkertaistui eli kasvoi arvoon  $10a$ . Ratkaistaan yhtälöstä  $f(20) = 10a$  muutoskerroin  $q$ .

$$a \cdot q^{20} = 10a \quad \| : a$$

$$q^{20} = 10$$

$$q = (+) \sqrt[20]{10}$$

$$q = 1,1220\dots$$

$$q \approx 1,122$$

Liikevaihto kasvoi noin 1,122-kertaiseksi jokaisen vuoden aikana, joten liikevaihto kasvoi noin 12,2 % vuodessa.

Vastaus: 12,2 %

- K25. a)** Olkoon osakkeen arvo alussa  $a$ . Ensimmäisen muutoksen jälkeen arvo oli pienentynyt 35 %, joten siitä oli jäljellä 65 %. Osakkeen arvo oli siis muuttunut 0,65-kertaiseksi eli arvoon  $0,65a$ . Kaikki muutokset voidaan laskea vastaavalla tavalla, joten osakkeen arvo neljän päivän jälkeen oli
- $$0,65 \cdot 0,81 \cdot 0,91 \cdot 0,99a = 0,474\dots a \approx 0,47a.$$

Osakkeen arvo muuttui kokonaisuudessaan noin 0,47-kertaiseksi, joten se aleni  $100 \% - 47 \% = 53 \%$ .

Vastaus: 53 %

- b)** Keskimääräisellä muutosprosentilla tarkoitetaan prosentuaalista muutosta, joka olisi tapahtunut päivittäin, jos arvo olisi muuttunut joka päivä yhtä monta prosenttia. Tällainen muutos on eksponentiaalista. Osakkeen arvo noudattaa siis mallia  $f(x) = a \cdot q^x$ , jossa  $x$  on kulunut aika vuorokausina.

Osakkeen alkuperäistä arvoa ei tunneta, joten merkitään sitä kirjaimella  $a$  ( $> 0$ ). Edellisen kohdan perusteella osakkeen arvo oli  $0,474\dots a$ , kun aikaa oli kulunut neljä vuorokautta. Ratkaistaan yhtälöstä  $f(4) = 0,474\dots a$  muutoskerroin  $q$ .

$$\begin{aligned} a \cdot q^4 &= 0,474\dots a && \quad || : a \\ q^4 &= 0,474\dots \\ q &= (+)\sqrt[4]{0,474\dots} \\ q &= 0,829\dots \\ q &\approx 0,83 \end{aligned}$$

Osakkeen arvo muuttui vuorokaudessa keskimäärin noin 0,83-kertaiseksi, joten arvo laski  $100 \% - 83 \% = 17 \%$  vuorokaudessa.

Vastaus: 17 %

**K26.** Lineaarisen mallin mukaan  $y = kx + b$ , jossa  $x$  on aika vuosina ja  $y$  lintujen määrä parvessa. Vuodessa populaatio oli kasvanut  $203 - 194 = 9$  yksilöä, joten suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9}{1} = 9.$$

Sijoitetaan vuosien määrä  $x = 0$  ja vastaava lintujen määrä  $y = 194$  suoran yhtälöön  $y = 9x + b$ . Ratkaistaan saadusta yhtälöstä vakiotermei  $b$ .

$$194 = 9 \cdot 0 + b$$

$$b = 194$$

Lineaarinen malli havainnoille on siis  $y = 9x + 194$ .

Eksponentiaalisen mallin mukaan  $y = a \cdot q^x$ , jossa  $x$  on aika vuosina ja  $y$  lintujen määrä parvessa. Populaatio kasvoi vuodessa 194 linnusta 203 lintuun, joten muutoskerroin  $q = \frac{203}{194}$ . Alkuperäinen lintujen määrä  $a$  on ensimmäisessä laskennassa havaittu määrä eli  $a = 194$ .

Eksponentiaalinen malli havainnoille on siten  $y = 194 \cdot \left(\frac{203}{194}\right)^x$ .

Lasketaan ennusteet lintujen määrälle viiden vuoden kuluttua ensimmäisestä laskennasta.

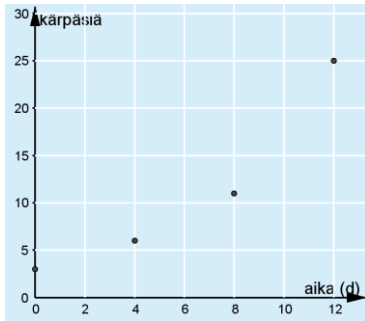
Lineaarinen malli:  $y = 9 \cdot 5 + 194 = 239$

Eksponentiaalinen malli:  $y = 194 \cdot \left(\frac{203}{194}\right)^5 = 243,373\dots$

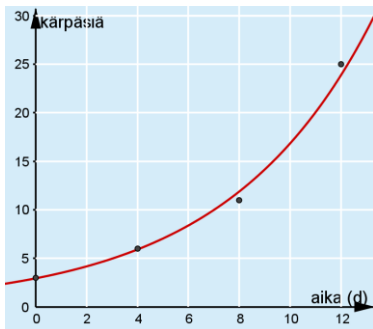
Havaittu arvo oli 230 lintua, joten lineaarinen malli antoi tarkemman ennusteen lintupopulaation kehityksestä.

Vastaus:  $y = 9x + 194$  ja  $y = 194 \cdot \left(\frac{203}{194}\right)^x$ , lineaarinen

- K27.** Merkitään biojätteen hävittämisestä kulunutta aikaa vuorokausina kirjaimella  $x$  ja kärpästen määrää kirjaimella  $y$ .



Kärpästen määrä näyttäisi suurin piirtein kaksinkertaistuvan neljän päivän välein, joten kasvu on likimain eksponentiaalista. Sovitetaan pisteisiin eksponentiaalinen malli.



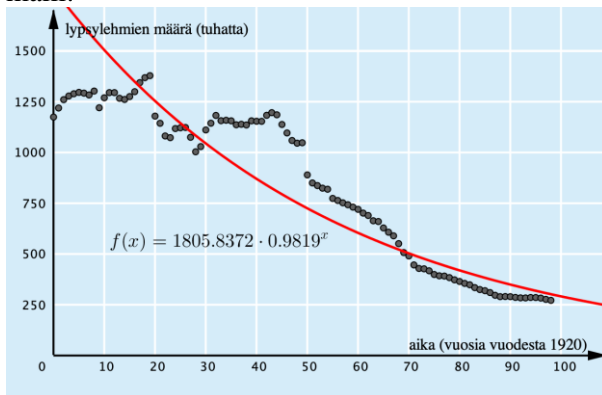
Ohjelma antaa funktioksi  $f(x) = 2,95 \cdot 1,19^x$ .

Sijoitetaan  $x = 30$  ohjelmalla saatuun funktion lausekkeeseen, jolloin  $f(30) = 548,365\dots \approx 550$ .

Kuukauden kuluttua biojätteen hävittämisestä kärpäsiä on noin 550.

Vastaus:  $f(x) = 2,95 \cdot 1,19^x$ , 550 kärpästä

- K28. a)** Kopioidaan tiedot ohjelmaan ja sovitetaan niihin eksponentiaalinen malli.



Eksponentiaalisiksi malliksi saadaan  $f(x) = 1805,8372 \cdot 0,9819^x$ .

Mallin mukaan lypsylehmien määrä muuttuu vuosittain 0,9819-kertaiseksi, joten lypsylehmien määrä vähenee keskimäärin  $100\% - 98,19\% = 1,81\% \approx 2\%$  vuosittain.

Vastaus: 2 %

- b)** Tutkitaan, minä vuonna lypsylehmien määrä alittaa 200 000. Muodostetaan yhtälö  $1805,8372 \cdot 0,9819^x = 200$  ja ratkaistaan siitä aika  $x$ . Ohjelmalla ratkaisuksi saadaan  $x = 120,465\dots \approx 120$ .

Mallin mukaan lypsylehmien määrä alittaa 200 000 vuonna  $1920 + 120 = 2040$ .

Vastaus: vuonna 2040