

3.1 Korkoa korolle

3.1 Koronkorko

Koronkorko

$$K_n = K \cdot q^n$$

missä K_n on kasvanut pääoma,

K alkupääoma, q korkokerroin ($= 1 + \text{korkokanta}$) ja n korkokausien (vuosien) lukumäärä

ESIM1

Tilille talletetaan vuoden alussa 500 euroa. Kuinka suureksi pääoma kasvaa 1, 2, ..., n vuodessa, jos tilin nettokorkokanta on 0,6 %?

$$K = 500$$

$$i = 0,006$$

$$q = 1 + 0,006 = 1,006$$

1 vuodessa:

$$K_n = 500 \cdot 1,006$$

2 vuodessa:

$$K_n = 500 \cdot 1,006 \cdot 1,006 = 500 \cdot 1,006^2$$

n vuodessa:

$$K_n = 500 \cdot 1,006^n$$

ESIM2

Tilille talletetaan vuoden alussa 500 euroa.

a) Kuinka suureksi pääoma kasvaa seitsemässä vuodessa, jos tilin nettokorkokanta on 0,6 %?

$$K_n = ?, \quad K = 500, \quad q = 1,006, \quad n = 7$$

$$K_n = K \cdot q^n = 500 \cdot 1,006^7 = 521,381802... \approx 521,38 \text{ euroa.}$$

$$\begin{aligned} &500 * 1,006^7 \\ &= 521,38180276 \end{aligned}$$

b) Kuinka monta prosenttia pääoman pitäisi vuosittain kasvaa, jotta se kasvaisi seitsemässä vuodessa 600 euroon?

$$K_n = 600, \quad K = 500, \quad q = ? , \quad n = 7$$

$$K_n = K \cdot q^n$$

$$600 = 500 \cdot q^7 \quad || :500$$

$$\frac{600}{500} = q^7$$

$$q = \sqrt[7]{\frac{600}{500}} = 1,02638809 \approx 1,026$$

$$\begin{aligned} & (600/500)^{(1/7)} \\ & = 1,02638809625703 \end{aligned}$$

V: Prosentin pitäisi olla 2,6 % (eli nettokorkokanta on 2,6 %).

(korkokanta i on:

$$0,70 \cdot i = 0,026388...$$

$$i = \frac{0,026388...}{0,70} = 0,037697... \approx 3,77 \%$$

)

c) Kuinka monen vuoden kuluttua pääoma on kaksinkertaistunut, jos tilin nettokorkokanta on 5 %?

$$K_n = 1000, \quad K = 500, \quad q = 1,05 , \quad n = ?$$

$$K_n = K \cdot q^n$$

$$1000 = 500 \cdot 1,05^n$$

$$\frac{1000}{500} = 1,05^n$$

$$1,05^n = 2 \quad || \log_{1,05} ()$$

$$n = \log_{1,05}(2) = 14,206699... \approx 14,2$$

$$\begin{aligned} & \log(1,05; 2) \\ & = 14,20669908289047413032 \end{aligned}$$

V: 15 vuotta

TAI Geogebrailla:

$$K_n = 1000, \quad K = 500, \quad q = 1,05, \quad n = ?$$

$$K_n = K \cdot q^n$$

4	$1000 = 500 \cdot 1.05^n$
	✓ $1000 = 500 \cdot 1.05^n$
	\$4
5	Ratkaise:
☐	$\left\{ n = \frac{-\ln(2)}{2 \ln(2) - \ln(21) + \ln(5)} \right\}$
6	\$5
☐	$\approx \{n = 14.20669908289\}$

V: 15 vuotta

Toistuvat talletukset

ESIM5. Heini syntyi 1. tammikuuta. Isä talletti tyttären tilille heti 1000 euroa ja tekee uuden samansuuruisen talletuksen jokaisen vuoden alussa. Viimeisen talletuksen hän tekee, kun Heini täyttää 18 vuotta. Kuinka paljon tilillä on rahaa viimeisen talletuksen jälkeen? Tilin nettokorkokanta on 1,4 %.

Eka talletus on tilillä 18 vuotta: $K_n = K \cdot q^n = 1000 \cdot 1,014^{18}$

toka talletus on tilillä 17 vuotta: $K_n = K \cdot q^n = 1000 \cdot 1,014^{17}$

...

vika talletus on tilillä 0 vuotta: $K_n = K \cdot q^n = 1000 \cdot 1,014^0$

$$\begin{aligned} &1000 \cdot 1,014^{18} + 1000 \cdot 1,014^{17} + 1000 \cdot 1,014^{16} + \\ &1000 \cdot 1,014^{15} + 1000 \cdot 1,014^{14} + 1000 \cdot 1,014^{13} + \\ &1000 \cdot 1,014^{12} + 1000 \cdot 1,014^{11} + 1000 \cdot 1,014^{10} + \\ &1000 \cdot 1,014^9 + 1000 \cdot 1,014^8 + 1000 \cdot 1,014^7 + 1000 \cdot 1,014^6 + \\ &1000 \cdot 1,014^5 + 1000 \cdot 1,014^4 + 1000 \cdot 1,014^3 + 1000 \cdot 1,014^2 + \\ &1000 \cdot 1,014^1 + 1000 \cdot 1,014^0 \\ &= 21595,02142499265256296529 \end{aligned}$$

TAI:

Korot muodostavat geometrisen lukujonon, joten niiden summa on:

$$S = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} = \frac{1000 \cdot 1,014^{18} \cdot (1 - 0,9861932^{19})}{1 - 0,9861932}$$

$$= 21595,00377...$$

$$(q = 1000 \cdot 1,014^{17} / (1000 \cdot 1,014^{18}) = 0,98619329388560157791$$

TAI Libreoffice Calcilla:

	A	B	C
1	Talletus	talletusaika	korko
2	1000	18	1284,349408
3	1000	17	1266,616773
4	1000	16	1249,128968
5	1000	15	1231,882611
6	1000	14	1214,87437
7	1000	13	1198,100957
8	1000	12	1181,559129
9	1000	11	1165,245689
10	1000	10	1149,157484
11	1000	9	1133,291405
12	1000	8	1117,644383
13	1000	7	1102,213396
14	1000	6	1086,995459
15	1000	5	1071,987633
16	1000	4	1057,187014
17	1000	3	1042,590744
18	1000	2	1028,196
19	1000	1	1014
20	1000	0	1000
21		SUMMA:	21595,02142

	A	B	C
1	Talletus	talletusaika	korko
2	1000	18	=A2*1,014^B2
3	=A2	17	=A3*1,014^B3
4	=A3	16	=A4*1,014^B4
5	=A4	15	=A5*1,014^B5
6	=A5	14	=A6*1,014^B6
7	=A6	13	=A7*1,014^B7
8	=A7	12	=A8*1,014^B8
9	=A8	11	=A9*1,014^B9
10	=A9	10	=A10*1,014^B10
11	=A10	9	=A11*1,014^B11
12	=A11	8	=A12*1,014^B12
13	=A12	7	=A13*1,014^B13
14	=A13	6	=A14*1,014^B14
15	=A14	5	=A15*1,014^B15
16	=A15	4	=A16*1,014^B16
17	=A16	3	=A17*1,014^B17
18	=A17	2	=A18*1,014^B18
19	=A18	1	=A19*1,014^B19
20	=A19	0	=A20*1,014^B20
21		SUMMA:	=SUMMA(C2:C20)

ESIM 6. Talletetaan joka kuukausi 10 e. Kuinka paljon tililtä voi nostaa 18 vuoden kuluttua?

Ratkaisu:

Eka korko, tammikuun talletus:

$$r = kit = 10 \cdot 0,014 \cdot \frac{12}{12}$$

Vika korko:

$$r = kit = 10 \cdot 0,014 \cdot \frac{1}{12}$$

Talletukset ja korot muodostavat **aritmeettisen lukujonon**, jonka summa on:

$$S = \frac{(10 \cdot 0,014 \cdot \frac{12}{12} + 10 \cdot 0,014 \cdot \frac{1}{12})}{2} \cdot 12 = 0,91$$

Vuoden aikana kertyneet korot kertyvät korkoa korolle sen vuoden jälkeen

$$K = 120,91, \quad q = 1,014, \quad n = 17$$

$$K_n = 120,91 \cdot 1,014^{17}$$

$$K_n = 120,91 \cdot 1,014^{16}$$

...

$$K_n = 120,91 \cdot 1,014^0$$

Joka vuoden jälkeen kertyneet muodostavat **geometrisen lukujonon**, jonka summa on

$$S = \frac{120,91 \cdot 1,014^{17} \left(1 - \left(\frac{1}{1,014} \right)^{18} \right)}{\left(1 - \frac{1}{1,014} \right)} = 2455,7633535...$$

$$\approx 2455,76 \text{ euroa}$$

$$\left(q = \frac{120,91 \cdot 1,014^{16}}{120,91 \cdot 1,014^{17}} = \frac{1,014^{16}}{1,014^{17}} = \frac{1}{1,014} \right. \text{ eli korkokertoimen}$$

käänteisluku)

TAI Libreoffice Calcilla:

Yhden vuoden aikana talletetut kymmit kerryttävät korkoa korkokaavat $r = \text{kit}$ mukaan.

Eka talletus 12 kk, vika 1 kk eli $t = \frac{12}{12} \quad \dots \quad t = \frac{1}{12} :$

	A	B	C	D		A	B	C	D
1	Yhden vuoden korot				1	Yhden vuoden korot			
2	talletus k	talletusaika	t	korko r = kit	2	talletus k	talletusaika	t	korko r = kit
3	10	12	1	0,14 €	3	10	12	=B3/12	=A3*0,014*C3
4	10	11	0,916666667	0,13 €	4	=A3	11	=B4/12	=A4*0,014*C4
5	10	10	0,833333333	0,12 €	5	=A4	10	=B5/12	=A5*0,014*C5
6	10	9	0,75	0,11 €	6	=A5	9	=B6/12	=A6*0,014*C6
7	10	8	0,666666667	0,09 €	7	=A6	8	=B7/12	=A7*0,014*C7
8	10	7	0,583333333	0,08 €	8	=A7	7	=B8/12	=A8*0,014*C8
9	10	6	0,5	0,07 €	9	=A8	6	=B9/12	=A9*0,014*C9
10	10	5	0,416666667	0,06 €	10	=A9	5	=B10/12	=A10*0,014*C10
11	10	4	0,333333333	0,05 €	11	=A10	4	=B11/12	=A11*0,014*C11
12	10	3	0,25	0,04 €	12	=A11	3	=B12/12	=A12*0,014*C12
13	10	2	0,166666667	0,02 €	13	=A12	2	=B13/12	=A13*0,014*C13
14	10	1	0,083333333	0,01 €	14	=A13	1	=B14/12	=A14*0,014*C14
15	10	0	0	0,00 €	15	=A14	0	=B15/12	=A15*0,014*C15
16			SUMMA:	0,91 €	16			SUMMA:	=SUMMA(D3:D15)

Tämä raha (120 e + 0,91 e) on tilillä vuoden lopuksi. Se kerryttää loput 17 vuotta korkoa korolle.

Samoin käy toisena vuonna talletettujen kymppien kanssa. Toisen vuoden 120,91 e kerryttää korkoa korolle 16 vuotta.

jne.

Viimeisenä vuonna talletetut kymppit (120,91 e) ehtivät kerryttää korkoa korolle 0 vuotta.

19	talletus	talletusaika	Korko = $K \cdot q^n$
20	120,91	17	153,15 €
21	120,91	16	151,03 €
22	120,91	15	148,95 €
23	120,91	14	146,89 €
24	120,91	13	144,86 €
25	120,91	12	142,86 €
26	120,91	11	140,89 €
27	120,91	10	138,94 €
28	120,91	9	137,03 €
29	120,91	8	135,13 €
30	120,91	7	133,27 €
31	120,91	6	131,43 €
32	120,91	5	129,61 €
33	120,91	4	127,82 €
34	120,91	3	126,06 €
35	120,91	2	124,32 €
36	120,91	1	122,60 €
37	120,91	0	120,91 €
38		SUMMA:	2 455,76 €

19	talletus	talletusaika	Korko = $K \cdot q^n$
20	120,91	17	=A20*1,014^B20
21	=A20	16	=A21*1,014^B21
22	=A21	15	=A22*1,014^B22
23	=A22	14	=A23*1,014^B23
24	=A23	13	=A24*1,014^B24
25	=A24	12	=A25*1,014^B25
26	=A25	11	=A26*1,014^B26
27	=A26	10	=A27*1,014^B27
28	=A27	9	=A28*1,014^B28
29	=A28	8	=A29*1,014^B29
30	=A29	7	=A30*1,014^B30
31	=A30	6	=A31*1,014^B31
32	=A31	5	=A32*1,014^B32
33	=A32	4	=A33*1,014^B33
34	=A33	3	=A34*1,014^B34
35	=A34	2	=A35*1,014^B35
36	=A35	1	=A36*1,014^B36
37	=A36	0	=A37*1,014^B37
38		SUMMA:	=SUMMA(C20:C37)