

## ALGEBRAN KERTAUS

1) Järjestä luvut pienimmästä suurimpaan.

$$-2, -\frac{8}{3}, -8, -\frac{8}{4}, -908, -\frac{7}{4}, -1, -99, -21672, 1, -9872, -10112.$$


---

2) Kirjoita osoittajaan ja nimittäjään jotkin luvut, joilla yhtälöt ovat voimassa. Keksi kolme eri ratkaisua.

$$\frac{2}{\quad} = \frac{\quad}{5}$$

$$\frac{1}{\quad} = \frac{\quad}{2}$$

$$\frac{\quad}{3} = \frac{3}{\quad}$$

$$\frac{2}{\quad} = \frac{\quad}{5}$$

$$\frac{1}{\quad} = \frac{\quad}{2}$$

$$\frac{\quad}{3} = \frac{3}{\quad}$$

$$\frac{2}{\quad} = \frac{\quad}{5}$$

$$\frac{1}{\quad} = \frac{\quad}{2}$$

$$\frac{\quad}{3} = \frac{3}{\quad}.$$

3) Täydennä puuttuvat luvut:

$$\frac{5}{7} = \frac{15}{\quad} = \frac{\quad}{28} = \frac{35}{\quad} = \frac{\quad}{77}$$

$$\frac{2,4}{3} = \frac{24}{\quad} = \frac{\quad}{15} = \frac{4}{\quad} = \frac{\quad}{10}$$

$$2 = \frac{\quad}{4} = \frac{\quad}{5} = \frac{\quad}{8} = \frac{60}{\quad} = \frac{84}{\quad} = \frac{100}{\quad} = \frac{114}{\quad}.$$

4) Täydennä alla oleva taulukko niin, että päällekkäin ovat yhtä suuret murtoluvut. Valitse luvut näistä luvuista:

$$\frac{20}{30} \quad \frac{24}{10} \quad \frac{16}{40} \quad \frac{6}{15} \quad \frac{108}{15} \quad \frac{42}{36}.$$

$\frac{2}{3}$	$\frac{36}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{20}{30}$					

5) Laske:

$$6\frac{1}{3} - 8 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-3\frac{1}{2} \cdot \left(-1\frac{3}{7}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-2\frac{2}{7} + 4\frac{3}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{4}{7} \cdot (-49) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5\frac{1}{3} - 6\frac{1}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{2}{5} - \frac{4}{5} - \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{5}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1\frac{1}{4} \cdot 2\frac{2}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$0,25 \cdot 1,6 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-3^4 \cdot 2^5 \cdot 2^1 \cdot 7^4 \cdot (-3)^5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Sievennä:

$$-a^4 b^5 b^1 c^4 (-a)^5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

6) Mieti, miten saat laskut helpoiksi, ja laske lausekkeet päässä.

$$3,5 \cdot 6,8 + 3,5 \cdot 3,2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$12,4 \cdot 14,3 - 12,4 \cdot 4,3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1,24 : 4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$18,9 : (4,138 + 2,162) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3,2 : 0,08 + 5,2 \cdot 2,5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\left| -154 + |(-1) \cdot 226 \cdot (-1) - 226| \cdot (-7) \right| = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$15,7 \cdot 3,09x + 15,7 \cdot 2,91x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4,03 \cdot 27,9a^2 - 17,9 \cdot 4,03a^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

★ 7) Ratkaise  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ja  $D$  niin, että yhtälöt ovat voimassa:

$$\frac{x}{3} + 2x^2 + A = 1 - x^2 \quad A = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{x}{B} = \frac{1}{x} \quad B = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{2}{a^2 - 1} = \frac{C}{a + 1} \quad C = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{x^2 + x}{D} = \frac{x + 1}{x^2} \quad D = \underline{\hspace{2cm}}$$

8) Kirjoita lauseke ilman sulkeita.

a)  $m + (a - k - b) = \underline{\hspace{4cm}}$

b)  $m - (a - k - b) = \underline{\hspace{4cm}}$

c)  $a - (b - c) + (m + n) = \underline{\hspace{4cm}}$

d)  $a + (b - (c - d)) = \underline{\hspace{4cm}}$

e)  $x - (y - (p + k)) = \underline{\hspace{4cm}}$

9) Ratkaise  $a$  ja  $b$  niin, että yhtälö on voimassa:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{5} + ax + by = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y.$$

---



---

10) Laske seuraavat tulot ilman laskinta:

$$(3,12 \cdot 10^2) \cdot (1,2 \cdot 10^3) = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$(-0,2 \cdot 10^3) \cdot 0,03 \cdot (-10)^4 = \underline{\hspace{4cm}}$$

11) Kirjoita muodossa  $a \cdot 10^n$ , missä  $1 < a < 10$  ja  $n$  on kokonaisluku:

$$237,3 = \underline{\hspace{2cm}} \qquad 100 \cdot 12,3675 = \underline{\hspace{2cm}}$$

12) Kirjoita luvut ensin saman kymmenen potenssin avulla ja laske yhteen vasta sen jälkeen.

$$43,273 \cdot 10^2 + 0,0472 \cdot 10^5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

13) Kirjoita seuraavat luvut muodossa  $\frac{a}{b}$  tai  $-\frac{a}{b}$ , missä  $a$  ja  $b$  ovat positiivisia kokonaislukuja, ja supista sen jälkeen.

$$\frac{0,028}{-0,21} = \underline{\hspace{2cm}} \qquad \frac{-22,4}{13,44} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{1,75}{2,625} = \underline{\hspace{2cm}} \qquad \frac{0,25}{-0,4375} = \underline{\hspace{2cm}}$$

14) Perustele identtisyys:

a)  $5p - 45 = 5(p - 9)$

---

b)  $-8(3 - x) = 8x - 24$

---

c)  $(a + b) \cdot 1 = a + b$

---

d)  $x(y - 2) - 3y = y(x - 3) - 2x$

---

e)  $2a(b - 5) + b = b(2a + 1) - 10a$

---

- 15) Saata seuraavat osamäärät muotoon  $2^n/3^m$ , missä  $m$  ja  $n$  ovat mahdollisimman pieniä positiivisia kokonaislukuja.

$$\left(\frac{2^2}{3}\right)^3 \cdot \frac{2^3}{3} = \underline{\hspace{2cm}} \qquad \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^4 : \left(\frac{2^4}{3^2}\right)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\left(2^4 : \frac{2^2}{3^3}\right) : \frac{3^5}{2} = \underline{\hspace{2cm}} \qquad (-2)^4 \cdot \left(2^2 : \frac{(-3)^5}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- 16) Yksi litra vettä on massaltaan yksi kilogramma ja 30 grammassa vettä on noin  $10^{24}$  molekyyliä. Montako molekyyliä on litrassa vettä?

\_\_\_\_\_

Entä yhdessä kuutiometrissä vettä?

\_\_\_\_\_

- 17) Millä  $x$ :n arvoilla  $|x| = x$ ? \_\_\_\_\_

Millä  $x$ :n arvoilla  $|x| = -x$ ? \_\_\_\_\_

- 18) a) Ratkaise yhtälöt  $2x - 1 = 0$  ja  $-2x - 1 = 0$ .

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- b) Tutki, minkä merkkisiä arvoja  $y$  saa yhtälöissä  $y = 2x - 1$  ja  $y = -2x - 1$  muuttujan  $x$  eri arvoilla. Voit käyttää apuna lukuosuoraa tai koordinaatistoa.

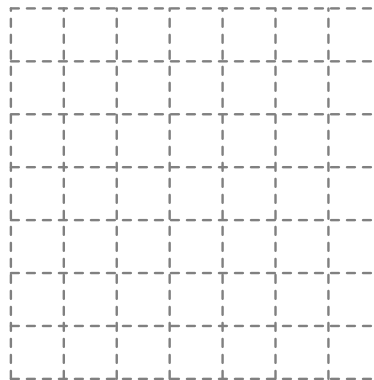
\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



c) Ratkaise epäyhtälöt  $2x - 1 < 0$  ja  $-2x > 1$ .

---



---

19) Ratkaise yhtälö. Muista tarkistaa!

a)  $2x + 14 = -2(x + 7)$

b)  $\frac{3a - (10 + 5a)}{5 - a} = 1$

<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>

Tarkistus:

a) 

---

b) 

---

★ 20) Ratkaise epäyhtälö. Tarkista sijoittamalla  $x$ :n arvoja.

a)  $12x - 1 < 35$  

---

Tarkistus: 

---

b)  $-0,2x + 4 \geq 47$  

---

Tarkistus: 

---

c)  $1,3x \leq 54 + x$  

---

Tarkistus: 

---

21) Mitkä reaalityöt ovat käänteislukuaan suurempia?

---



---

22) Laske:

a) 3 % luvusta 500 

---

      b) 40 % luvusta 15 

---

- 23) Luistimet myytiin 15 % alennuksella, jolloin hinnan alennus oli 7 €. Mikä oli alentamaton hinta?

---



---

- ★ 24) Maan keskimääräinen etäisyys Auringosta on n. 149 500 000 km. Pluton keskimääräinen etäisyys Auringosta on n.  $5900 \cdot 10^6$  km ja Uranuksen n.  $2,88 \cdot 10^9$  km. Oletetaan, että planeetat kiertävät Aurinkoa pitkin samankeskisiä ympyrä ratoja, joiden säteinä ovat edellä mainitut keskimääräiset etäisyydet (todellisuudessa asia ei ole näin yksinkertainen). Jos nämä kaksi planeettaa ja Aurinko ovat samalla suoralla, niin miten kaukana planeetat ovat toisistaan? Havainnollista tilannetta kuvilla.

---



---

- ★ 25) Kertaa tarvittaessa tässä tehtävässä esiintyvien kaavojen havainnollistus pinta-aloilla diplomien VIII tehtäväsivuilla 18–20.

a) Laske:

$$(a + b)^2 = \underline{\hspace{2cm}} \qquad (x + y)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(x + 2y)^2 = \underline{\hspace{2cm}} \qquad (3x - y)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

b) Kirjoita tulomuodossa:

$$a^2 + 2ab + b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$a^2 - b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(1 + a + b)^2 - (a + b)^2 - 1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\left(\frac{a}{3}\right)^2 - b^2 = \underline{\hspace{10cm}}$$

26) Sievennä:

$$(-5)^2 = \underline{\hspace{5cm}} \qquad -5^2 = \underline{\hspace{5cm}}$$

$$3^4 \cdot (-2)^2 = \underline{\hspace{5cm}} \qquad (-3)^2(-2)^3 = \underline{\hspace{5cm}}$$

$$2\frac{1}{3} \cdot 7 = \underline{\hspace{5cm}} \qquad 1,4 \cdot 3\frac{3}{4} = \underline{\hspace{5cm}}$$

★ 27) Laske lausekkeen arvo ilman laskinta. Missä näistä voit käyttää binomikaavaa  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  tai  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  tai neliöiden erotuksen kaavaa  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ?

$$3 \cdot 17 = \underline{\hspace{5cm}} \qquad 5 \cdot 16 = \underline{\hspace{5cm}}$$

$$39^2 = \underline{\hspace{5cm}} \qquad 2^2 + 3^2 + 6^2 = \underline{\hspace{5cm}}$$

$$153 : 17 = \underline{\hspace{5cm}} \qquad 64 : 16 = \underline{\hspace{5cm}}$$

$$41^2 = \underline{\hspace{5cm}} \qquad 39 \cdot 41 = \underline{\hspace{5cm}}$$

★ 28) Sievennä:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \underline{\hspace{5cm}} \qquad \frac{x^2 + x}{x} = \underline{\hspace{5cm}}$$

$$\frac{a^2b + ac}{ad^2 + a^2c} = \underline{\hspace{5cm}} \qquad \left(\frac{x}{2} + 5y\right)^2 = \underline{\hspace{5cm}}$$

$$\frac{c(ax + by)}{c^2(a + b)} = \underline{\hspace{5cm}} \qquad \frac{2a^2}{a} - \frac{a^3}{a(a-1)} = \underline{\hspace{5cm}}$$

$$\frac{a\left(\frac{2}{a} + \frac{5b}{a^2}\right)}{b} = \underline{\hspace{5cm}} \qquad \frac{7^{50}}{14^{50}} = \underline{\hspace{5cm}}$$

$$\frac{\left((a^5)^6\right)^3 \cdot a^6}{a^{69}} = \underline{\hspace{5cm}}$$



29) Tiedetään, että  $uv = 2$ . Laske

$$\frac{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}}{u - v} = \underline{\hspace{10em}}$$

30) Sievennä:

$$2\sqrt{2} + \sqrt{2} = \underline{\hspace{5em}} \qquad \sqrt{6250000} = \underline{\hspace{5em}}$$

$$\sqrt{27} = \underline{\hspace{5em}} \qquad \sqrt{0,0049} = \underline{\hspace{5em}}$$

$$\sqrt{a^3} = \underline{\hspace{5em}} \qquad \sqrt{2(x-2)^2} = \underline{\hspace{5em}}$$

$$\sqrt{(a-b)(a^2-b^2)} = \underline{\hspace{10em}}$$

31) Sievennä, jos mahdollista

$$\sqrt{x^2 + 5} = \underline{\hspace{5em}} \qquad \sqrt{x^2 + 10x + 25} = \underline{\hspace{5em}}$$

★ 32) Etsi sellaiset luvut  $m$  ja  $n$ , että yhtälöparin

$$\begin{cases} (m+n)x - my = 2 \\ mx - (n+1)y = 0 \end{cases}$$

ratkaisu on  $x = 3$  ja  $y = -1$ .

---



---



---

★ 33) Sievennä:

$$\text{a) } \frac{1+x}{x^2-xy} - \frac{1-y}{y^2-xy} - \frac{4}{x^2-y^2} = \underline{\hspace{10em}}$$

---

$$b) \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = \underline{\hspace{2cm}}$$


---

$$c) 1 - \left( \frac{a-1}{2a+2} + \left( \frac{1}{a-1} - \frac{a}{1+a} \right) \right) = \underline{\hspace{2cm}}$$


---

- 34) a) Muodosta kokonaislukukertoiminen toisen asteen polynomiyh-tälö, jonka ratkaisu on  $x = \sqrt{2}$ . Onko muodostamallasi yhtä-löllä muita ratkaisuja?
- 
- 

- ★ b) Muodosta kokonaislukukertoiminen toisen asteen polynomiyh-tälö, jonka toinen ratkaisu on  $x = 1 + \sqrt{2}$ .
- 
- 

- 35) Tässä  $x$  ja  $y$  ovat nollasta eroavia kokonaislukuja. Sievennä:

$$\frac{x^y y^x}{y^y x^x} = \underline{\hspace{2cm}}$$

- ★ 36) Miten lasketaan helposti, että

$$12343212234321 \cdot 24686424468641 - 12343212234320 \\ = 12343212234320 \cdot 24686424468641 + 12343212234321$$


---



---



---

Algebran harrastusta voit jatkaa Markku Halmetojan tekemällä tiedos-tolla Algebraa harrastajalle: Gaussin jalanjäljissä. Se on Solmun diplo-misivulla, myös vastauksia on annettu.