

13. Liikemäärä ja impulssi

Tehtävät

Harjoittele

Tehtävä 13.1.

Väittämät b), c) ja f) ovat oikein.

Korjaukset väittämiin:

- a) Liike-energia on skalaarisuure eli liike-energialla ei ole suuntaa.
- d) Jos kappaleen vauhti kaksinkertaistuu, kappaleen liikemäärän suuruus kaksinkertaistuu, mutta kappaleen liike-energia nelinkertaistuu.
- e) Impulssiperiaatteen mukaan kappaleeseen vaikuttavan voiman suunta on sama kuin kappaleen liikemäärän muutoksen suunta. Liikemäärän suunta voi olla siis lopussa eri kuin siihen vaikuttavan impulssin suunta.

Tehtävä 13.2

a) Koiran massa $m_1 = 25 \text{ kg}$

Koiran nopeus $v_1 = 3,4 \text{ m/s}$

Koiran liikemäärä on

$$p_1 = m_1 v_1 = 25 \text{ kg} \cdot 3,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 85 \frac{\text{kgm}}{\text{s}}.$$

b) Kissan massa $m_2 = 5,2 \text{ kg}$

Kissan liikemäärä on $p_2 = m_2 v_2$. Kissalla on sama liikemäärä kuin koiralla, kissan nopeuden pitäisi olla

$$p_2 = p_1$$

$$m_2 v_2 = m_1 v_1$$

$$v_2 = \frac{p_2}{m_2} = \frac{m_1 v_1}{m_2} = \frac{25 \text{ kg} \cdot 3,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5,2 \text{ kg}} = 16,346 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Tehtävä 13.3.

a) Matkustajalaivan massa $m = 63\,000\text{ t} = 63 \cdot 10^6\text{ kg}$

Matkustajalaivan nopeus

$$v = 21\text{ kn} = 21 \cdot 0,5144\text{ m/s} = 10,8024\text{ m/s}$$

Matkustajalaivan liikemäärä on

$$p = mv = 63 \cdot 10^6\text{ kg} \cdot 10,8024\frac{\text{m}}{\text{s}} = 6,805512 \cdot 10^8\frac{\text{kgm}}{\text{s}} \approx 6,8 \cdot 10^8\frac{\text{kgm}}{\text{s}}.$$

b) Liikettä vastustavien voimien suuruus

$$F = 2,4\text{ MN} = 2,4 \cdot 10^6\text{ N}$$

Matkustajalaiva pysähtyy, joten matkustajalaivan

liikemäärän muutos on $\Delta p = -6,805512 \cdot 10^8\frac{\text{kgm}}{\text{s}}.$

Impulssiperiaatteen mukaan

$$\bar{I} = \Delta \bar{p}$$

$$\bar{F} \Delta t = \Delta \bar{p}$$

Kun valitaan laivan liikkeen suunta positiiviseksi, saadaan a-kohdan tulosta käyttämällä

$$-F \Delta t = \Delta p$$

$$\Delta t = \frac{\Delta p}{-F} = \frac{-6,805512 \cdot 10^8\frac{\text{kgm}}{\text{s}}}{-2,4 \cdot 10^6\text{ N}} = 283,563\text{ s} = 4\text{ min}43,565\text{ s} \approx 4\text{ min}40\text{ s}.$$

Tehtävä 13.4.

Kiekon massa $m = 160 \text{ g} = 0,16 \text{ kg}$

Kiekon nopeus alussa $v_1 = 45 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Voiman vaikutusaika $\Delta t = 41 \text{ ms} = 0,041 \text{ s}$

Kiekon nopeus lopussa on $v_2 = 0$, joten liikemäärän muutos on $\Delta p = -mv_1$.

Kiekko osuu räpylään nopeudella $\bar{v}_1$. Räpylä kohdistaa kiekkoon voiman $\bar{F}$ ja aiheuttaa siten impulssin $\bar{I}$. Impulssi pysäyttää kiekon.

Impulssiperiaatteen mukaan

$$\bar{I} = \Delta \bar{p}$$

$$\bar{F} \Delta t = m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1.$$

Koska kiekon nopeus lopussa on nolla, on

$$\bar{F} \Delta t = -m\bar{v}_1$$

Kun kiekon lentosuunta valitaan positiiviseksi, saadaan

$$-\bar{F} \Delta t = -m\bar{v}_1$$

Ratkaistaan yhtälöstä kiekon pysäyttämiseen tarvittava voima

$$F = \frac{mv_1}{\Delta t} = \frac{0,16 \text{ kg} \cdot 45 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,041 \text{ s}} = 175,60976 \text{ N} \approx 180 \text{ N}.$$

Tehtävä 13.5.

Kun kuljetettavaan esineeseen aiheutuu ulkoisten voimien aiheuttamia impulsseja, pehmusteet pidentävät esineen liikemäärän muutokseen kuluvaan aikaan.

Impulssiperiaatteen mukaan liikemäärän muutos on yhtä suuri kuin kappaleeseen voiman aiheuttama impulssi.

$\Delta p = I$ ja $I = F\Delta t$. Kun voiman vaikutusaika pitenee, esineeseen vaikuttava keskimääräinen voima pienenee. Tällöin esine ei vaurioidu.

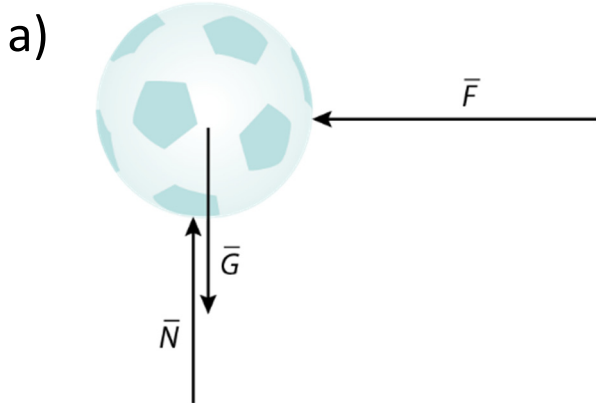
Tehtävä 13.6.

Jalkapallon nopeus alussa $v_1 = 3,2 \text{ m/s}$

Jalkapallon nopeus lopussa $v_2 = 11,8 \text{ m/s}$

Voiman vaikutusaika $\Delta t = 21 \text{ ms}$

Jalkapallon massa $m = 0,427 \text{ kg}$



$\vec{G}$ = pallon paino

$\vec{F}$ = jalan palloon kohdistama voima

$\vec{N}$ = maanpinnan tukivoima

b) Pallon liikemäärän muutos

$$\Delta p = m\Delta v = 0,427 \text{ kg} \cdot (11,8 \text{ m/s} + 3,2 \text{ m/s}) = 6,405 \text{ kgm/s} \approx 6,4 \text{ kgm/s}.$$

c) Impulssiperiaatteen mukaan jalan palloon kohdistamaksi keskimääräiseksi voimaksi saadaan

$$I = \Delta p$$

$$F\Delta t = m\Delta v$$

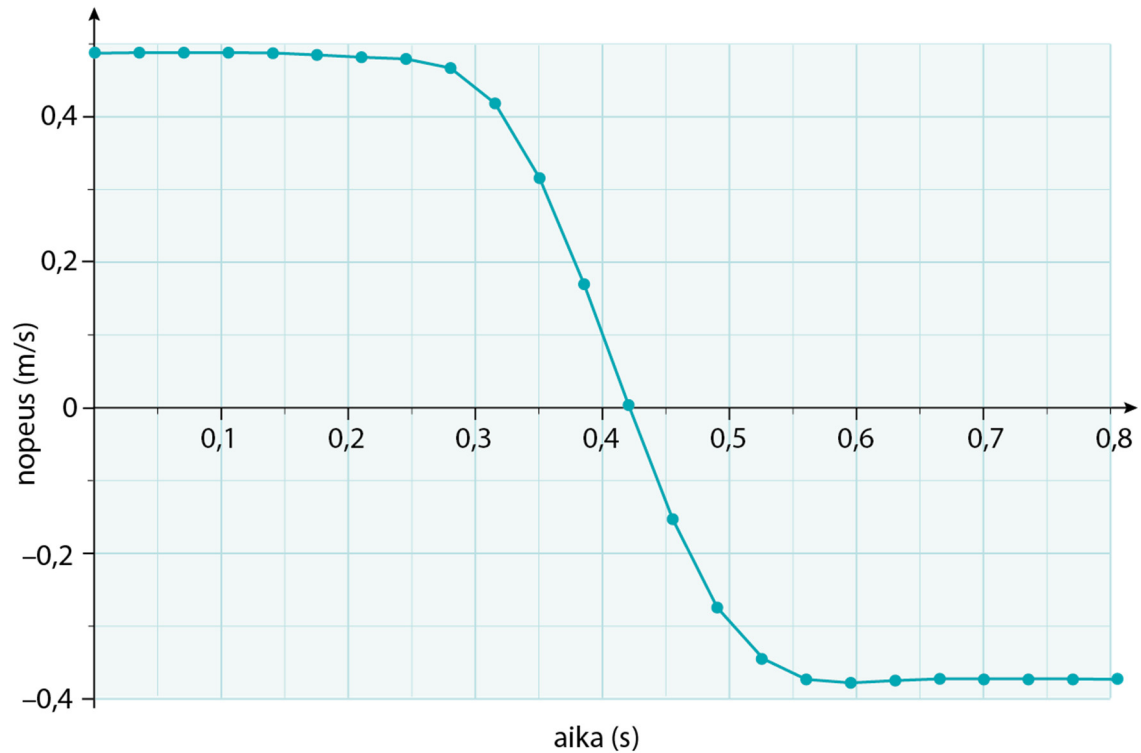
$$F = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = \frac{0,427 \text{ kg} \cdot (11,8 \text{ m/s} + 3,2 \text{ m/s})}{21 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 305 \text{ N} \approx 310 \text{ N}.$$

Tehtävä 13.7.

- a) Kun tennispallo osuu seinään tai pressuun, aiheuttaa seinä ja pressu tennispalloon voiman. Kun pallon osuu pressuun, on pallon törmäysaika huomattavasti pidempi kuin kiviseinään osuessa. Seinän ja pressun voiman impulssi aiheuttaa pallon liikemäärän muutoksen. Mitä suurempi on pallon ja seinän tai pressun vaikutusaika, sitä pienempi on voima. Tällöin pressun palloon kohdistama voima on pienempi kuin kiviseinän palloon kohdistama voima, joten turkoosi matalampi käyrä esittää pallon osumista pressuun ja vihreä korkeampi käyrä osumista seinään.
- b) Impulssiperiaatteen mukaan impulssi aiheuttaa liikemäärän muutoksen $I = \Delta p$. Impulssi saadaan (t, F) -koordinaatiston kuvaajan ja t -akselin rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta. Koska kiviseinän aiheuttaman impulssi on suurempi kuin pressun, on kiviseinän aiheuttama liikemäärän muutos suurempi kuin pressun.

Tehtävä 13.8.

a)



b) Määritetään kuvaajasta nopeus ennen törmäystä ja törmäyksen jälkeen. Nopeus ennen törmäystä on $v_1 = 0,484 \text{ m/s}$ ja jälkeen törmäyksen $v_2 = -0,367 \text{ m/s}$.

Vaunun liikemäärän muutos on

$$\begin{aligned}\Delta p &= m\Delta v = 0,291 \text{ kg} \cdot (0,367 \text{ m/s} + 0,484 \text{ m/s}) \\ &= 0,247641 \text{ kgm/s} \approx 0,248 \text{ kgm/s}.\end{aligned}$$

c) Törmäysaika oli $\Delta t = 0,595 \text{ s} - 0,21 \text{ s} = 0,385 \text{ s}$.

Impulssiperiaatteen mukaan saadaan voima, joka kohdistui vaunuun

$$I = \Delta p$$

$$F\Delta t = m\Delta v$$

$$F = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = \frac{0,291 \text{ kg} \cdot (0,367 \text{ m/s} + 0,484 \text{ m/s})}{0,385 \text{ s}} = 0,6432 \text{ N} \approx 0,643 \text{ N}.$$

Tehtävä 13.9.

Opiskelijan massa ja tuolin massa $m = 76 \text{ kg}$

Impulssiperiaatteen mukaan voimalevyn tukivoiman opiskelijaan aiheuttama impulssi on yhtä suuri kuin opiskelijan ja tuolin liikemäärän muutos.

$$\bar{I} = \Delta \bar{p}$$

$$\bar{F} \Delta t = \Delta m \bar{v}$$

$$\bar{F} \Delta t = m \bar{v}_2 - m \bar{v}_1.$$

Alussa opiskelija ja tuoli oli paikoillaan $v_1 = 0$. Sovitaan positiiviseksi suunnaksi voiman ja opiskelijan liikkeen suunta ja saadaan

$$F \Delta t = m v_2.$$

Voiman aiheuttama impulssi saadaan (t, F) -koordinaatiston fysikaalisesta pinta-alasta, $I = F \Delta t = 130,4 \text{ Ns}$. Opiskelijan ja tuolin nopeudeksi saadaan

$$v_2 = \frac{F \Delta t}{m} = \frac{130,4 \text{ Ns}}{76 \text{ kg}} = 1,715789 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 1,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Sovella

Tehtävä 13.10.

a) Pingispallon massa $m_1 = 2,7 \text{ g} = 0,0027 \text{ kg}$

Golfpallon massa $m_2 = 45 \text{ g} = 0,045 \text{ kg}$

Pingispallon nopeus $v_1 = 30 \text{ m/s}$

Pingispallon liikemäärä on $p_1 = m_1 v_1$ ja golfpallon liikemäärä $p_2 = m_2 v_2$.

Merkitään pallojen liikemäärä yhtä suuriksi ja ratkaistaan golfpallon nopeus.

$$p_1 = p_2$$

$$m_1 v_1 = m_2 v_2$$

$$v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2} = \frac{0,0027 \text{ kg} \cdot 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,045 \text{ kg}} = 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) Pingispallon liike-energia on

$$E_{k1} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,0027 \text{ kg} \cdot \left(30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 1,215 \text{ J} \approx 1,2 \text{ J}.$$

Golfpallon liike-energia on

$$E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,045 \text{ kg} \cdot \left(1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 0,0729 \text{ J} \approx 73 \text{ mJ}.$$

Pingispallolla on merkittävästi suurempi nopeus ja liike-energia kuin golfpallolla, joten pingispallon osuma on kivuliaampi. Tosin pingispallonkin liike-energia on melko pieni.

Tehtävä 13.11.

- a) Nurmikko on pehmeämpää kuin asfaltti. Kun harrastaja putoaa nurmikolle tai asfaltille, hänen liikemääränsä muuttuu yhtä paljon. Impulssiperiaatteen mukaan nurmikon tai asfaltin harrastajaan kohdistama tukivoima muuttaa harrastajan liikemäärää. Saadaan

$$I = \Delta p$$

$$F\Delta t = \Delta p.$$

Koska nurmikko on pehmeämpää, impulssin voiman vaikutusaika on pidempi ja näin ollen voima on pienempi.

- b) Törmäyksessä liikemäärä muuttuu. Turvatyynyn päähän kohdistama voima aiheuttaa päähän impulssin, joka muuttaa pään liikemäärää.

Impulssiperiaatteen mukaan

$$I = \Delta p$$

$$F\Delta t = \Delta p.$$

Turvatyyny pidentää törmäysaikaa, ja näin ollen voima on pienempi.

- c) Valtamerilaivalla on suuri liikemäärä. Valtamerilaivan liikkeen pysäyttää väliaineen vastus ja moottorit. Jos valtamerilaivan liikemäärän muutos haluttaisiin nopeasti, täytyisi laivan moottorien aiheuttaman liikettä hidastavan voiman olla erittäin suuri. Tämä vaatisi isot moottorit hidastamaan laivan liikettä. Ne olisivat kalliita valmistaa ja myös kalliita sekä ympäristölle haitallisia käyttää.
- d) Kun pikajuoksija juoksee 60 m matkan, on hänellä liikemäärää juoksun lopussa. Liikemäärä pitää saada nolleen ennen seinää, jos seinän edessä ei olisi patjaa. Tällöin juoksijan jalkoihin kohdistuisi suuria voimia ja nämä voimat saattaisi vahingoittaa juoksijan jalkojen rakenteita. On siis juoksijan kehon kannalta parempi aiheuttaa liikemäärän muutos pehmeällä patjalla, sillä tällöin patjan juoksijaan kohdistama voima on pieni voiman vaikutusajan ollessa pitkä.

Tehtävä 13.12.

Puhelimen etäisyys lattiasta $h = 1,1 \text{ m}$

Puhelimen massa $m = 0,225 \text{ kg}$

Puhelimen nopeus lattialle törmäämisen jälkeen

$$v_2 = 0,17 \text{ m/s}$$

a) Tarkastellaan tilanne mekaniikan energiaperiaatteella.

Puhelimen potentiaalienergia muuntuu puhelimen liike-energiaksi, sillä alussa puhelin oli paikoillaan. Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi lattia.

$$E_p = E_k$$

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2} \cancel{m}v^2$$

$$gh = \frac{1}{2}v^2.$$

Puhelin osuu lattiaan nopeudella

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,1 \text{ m}} = 4,6456 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 4,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) Puhelimen ja lattian törmäysaika $t = 14 \text{ ms}$

Kun puhelin osuu lattiaan, puhelimella on liikemäärää. Lattian tukivoima aiheuttaa puhelimelle impulssin ja muuttaa puhelimen liikesuuntaa. Impulssiperiaatteella ennen ja jälkeen törmäyksen

$$\bar{I} = \Delta \bar{p}$$

$$\bar{F} \Delta t = \Delta m \bar{v}.$$

Sovitaan positiiviseksi suunnaksi suunta ylöspäin. Lattian puhelimeen kohdistama keskimääräinen voima F on

$$F \Delta t = mv_2 - (-mv_1)$$

$$F = \frac{mv_2 + mv_1}{\Delta t} = \frac{m(v_2 + \sqrt{2gh})}{\Delta t}$$

$$F = \frac{0,225 \text{ kg} \cdot (0,17 \frac{\text{m}}{\text{s}} + \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,1 \text{ m}})}{14 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 77,394 \text{ N} \approx 77 \text{ N}.$$

c) Puhelimen suojakuoret on tehty yleensä pehmeästä ja joustavasta materiaalista. Joustava materiaali pidentää törmäyksen kestoaikaa, jolloin impulssin mukaan voima pienenee, sillä $I = F \Delta t$. Puhelin ei rikkoudu yhtä helposti, kun käytetään suojakuoria.

Tehtävä 13.13.

Juomatölkin massa $m = 0,346 \text{ kg}$

Auton ja juomatölkin nopeus $v = \frac{96 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}$

a) Koska juomatölkki on auton kyydissä, on juomatölkin nopeus sama kuin auton nopeus.

Juomatölkin liikemäärä

$$p = mv = 0,346 \text{ kg} \cdot \frac{96 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} = 9,222 \text{ kgm/s} \approx 9,2 \text{ kgm/s}.$$

b) Juomatölkin törmäysaika $t = 36 \text{ ms}$

Juomatölkin liikemäärä lopussa on nolla, koska juomatölkki pysähtyy. Impulssiperiaatteen mukaan impulssi aiheuttaa liikemäärän muutoksen. Koska lopussa liikemäärä on nolla, on impulssi yhtä suuri kuin tölkin liikemäärä ennen törmäystä.

Impulssiperiaatteesta

$$I = p_{\text{alussa}}$$

$$Ft = mv.$$

Matkustajan tölkkiin kohdistama tukivoima pysäyttää tölkin ja tämä voima on yhtä suuri kuin juomatölkin matkustajaan kohdistama voima.

Juomatölkki kohdistaa matkustajaan voiman

$$F = \frac{mv}{t} = \frac{0,346 \text{ kg} \cdot \frac{96 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}}{36 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 256,296 \text{ N} \approx 260 \text{ N}.$$

- c) Törmäyspainolla tarkoitetaan voimaa, joka pienentäisi ihmisen liikemäärän nolnaan törmäyksessä. Jos tarkastellaan b-kohdan mukaisesti ihmisen törmäysaika yhtä suurena kuin tölkin törmäysaika $t = 36 \text{ ms}$, on impulssiperiaatteen mukaan törmäyspaine

$$Ft = mv$$

$$F = \frac{mv}{t}.$$

Sijoitetaan nopeus ja törmäysaika voiman yhtälöön.

$$F = \frac{mv}{t} = m \cdot \frac{40 \text{ m}}{36 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 308,64 \cdot m \approx 310 \cdot m.$$

Jos ihmisen pysähtymisaika olisi sama kuin tölkillä olisi törmäyspaine 310- kertainen. Todellisuudessa ihminen pysähtyy lähes kymmenen kertaa pidemmässä ajassa kuin tölkki, joten törmäyspaine on luokkaa 40- kertainen.

Tehtävä 13.14.

Luun murtumiseen tarvittava voima pinta-alaa kohden

$$F_A = 1,01 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$$

käden pinta-ala $A = 3,6 \text{ cm}^2$

maalarin massa $m = 84 \text{ kg}$

a) Käteen kohdistuva voima, jotta luu murtuisi on

$$F = F_A A = 1,01 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 36360 \text{ N} \approx 36 \text{ kN}.$$

b) Törmäyksen kesto $t = 17,2 \text{ ms}$

Törmäyksen jälkeen maalarin nopeus on nolla.

Impulssiperiaatteen mukaan voiman aiheuttama impulssi on tällöin yhtä suuri kuin maalarin liikemäärä ennen törmäystä.

Suurin nopeus, jotta luu ei murru on impulssiperiaatteella ja a-kohdan mukaan

$$I = mv$$

$$Ft = mv$$

$$v = \frac{Ft}{m} = \frac{36360 \text{ N} \cdot 17,2 \cdot 10^{-3} \text{ s}}{84 \text{ kg}} = 7,445 \text{ m/s} \approx 7,4 \text{ m/s}.$$

- c) Tarkastellaan maalarin putoamista mekaanisen energian säilymisperiaatteella ja asetetaan maanpinta potentiaalienergian nollassoksi. Maalarin potentiaalienergia muuntuu maalarin liike-energiaksi

$$E_p = E_k$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$gh = \frac{1}{2}v^2.$$

Maalari voi pudota korkeudelta

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(7,445 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} = 2,825 \text{ m} \approx 2,8 \text{ m}.$$

Tehtävä 13.15.

- a) Kappaleen liikemäärä on $p = mv$ ja kappaleen liike-energia on $E_k = \frac{1}{2}mv^2$.

Yleisemmin kappaleen liike-energia voidaan kirjoittaa muodossa

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2 v^2}{m} = \frac{1}{2} \frac{(mv)^2}{m} = \frac{p^2}{2m}.$$

Jos kappaleiden liikemäärät ovat samat, niin erimassaisilla kappaleilla on eri suuret liike-energiat. Mitä suurempi kappaleen massa on, sitä pienempi on kappaleen liike-energia.

- b) a-kohdassa saadun liike-energian ja liikemäärän välinen riippuvuus on

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2 v^2}{m} = \frac{p^2}{2m}.$$

Kappaleen liikemäärä ja liike-energia eivät ole suoraan verrannollisia. Sen sijaan kappaleen liike-energia on suoraan verrannollinen kappaleen liikemäärän neliöön

$$E_k \sim p^2.$$

Tehtävä 13.16.

Kuorma-auton nopeus alussa $v_1 = 78 \text{ km/h} = \frac{78 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}$

Kuorma-auton nopeus jarrutuksen jälkeen on $v_2 = 0 \text{ m/s}$

Kuorma-auton jarrutusmatka $s = 61 \text{ m}$

Sidontaliinan niemellislujuus $F_1 = 20 \text{ kN}$

- a) Kuorma-auton on jarrutuksen aikana tasaisesti hidastuvassa liikkeessä, jolloin jarrutusmatkalle ja nopeudelle on voimassa jarrutuksen jälkeen

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$$

$$0 = v_0 - a t.$$

Ratkaistaan alemmasta yhtälöstä hidastuvuus $a = \frac{v_0}{t}$ ja sijoitetaan se ylempään yhtälöön. Jarrutusajaksi saadaan

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} \frac{v_0}{t} t^2$$

$$s = \frac{1}{2} v_0 t$$

$$t = \frac{2s}{v_0} = \frac{2 \cdot 61 \text{ m}}{\frac{78 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}} = 5,630769 \text{ s} \approx 5,6 \text{ s}.$$

- b) Liina aiheuttaa voiman, joka on vain 35 % liinan nimellislujuudesta. Kuorma on sidottu kahdella liinalla, jolloin kuorman eteenpäin liikkumisen estävä voima suurimmillaan on

$$F = 2 \cdot 0,35 \cdot F_1 = 2 \cdot 0,35 \cdot 20000 \text{ N} = 14\,000 \text{ N} = 14 \text{ kN}.$$

- c) TAPA 1.

Tarkastellaan jarrutusta impulssiperiaatteella. Kuorman liikemäärän muutos jarrutuksen aikana on yhtä suuri kuin sidontaliinoiden kuormaan kohdistaman voiman impulssi. Jarrutuksen jälkeen nopeus on nolla, joten impulssi on yhtä suuri kuin kuorman liikemäärä alussa. Impulssiperiaatteella

$$I = mv_0$$

$$Ft = mv_0$$

$$m = \frac{Ft}{v_0}.$$

a-kohdan mukaan kuorman hidastumisaika on $t = \frac{2s}{v_0}$.

Kuorman massaksi saadaan

$$m = \frac{F \frac{2s}{v_0}}{v_0} = \frac{2Fs}{v_0^2} = \frac{2 \cdot 14\,000 \text{ N} \cdot 61 \text{ m}}{\left(\frac{78 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}\right)^2} = 3638,3 \text{ kg} \approx 3600 \text{ kg}.$$

TAPA 2.

Newtonin II lain mukaan liinat aiheuttavat kuormalle hidastuvuuden. a-kohdan mukaan kuorman

hidastumisaika on $t = \frac{2s}{v_0}$ ja loppunopeus $0 = v_0 - at$.

Sijoitetaan hidastumisaika loppunopeuden yhtälöön ja ratkaistaan hidastuvuus

$$0 = v_0 - a \frac{2s}{v_0}$$

$$a = \frac{v_0^2}{2s}.$$

Newtonin II lain mukaan sidontaliinat aiheuttavat kuorman hidastuvan liikkeen

$$F = ma$$

$$F = m \frac{v_0^2}{2s}.$$

Kuorman massa voi olla

$$m = \frac{2Fs}{v_0^2} = \frac{2 \cdot 14\,000 \text{ N} \cdot 61 \text{ m}}{\left(\frac{78 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} \right)^2} = 3638,3 \text{ kg} \approx 3600 \text{ kg}.$$

Tehtävä 13.17.

- a) Vesimelonit pudotetaan yhtä korkealta. Molemmilla meloneilla on yhtä suuri potentiaalienergia. Potentiaalienergia muuntuu melonin liike-energiaksi, jolloin mekaniikan energiaperiaatteen mukaan molemmilla meloneilla on yhtä suuri nopeus, kun ne osuvat lattiaan.
- b) Ilman kypärää lattiaan osunut meloni hajosi, mutta pyöräilykypärän sisällä oleva vesimeloni ei hajonnut.

c) Liikkuvalla vesimelonilla on liikemäärää, mutta osuman jälkeen paikallaan olevalla melonilla liikemäärä on nolla. Vesimelonin liikemäärä muuttuu ja liikemäärän muutos aiheutuu lattian tukivoiman vesimeloniin aiheuttamasta impulssista. Impulssiperiaatteen mukaan $I = \Delta p$ eli $F\Delta t = \Delta mv$. Ennen osumaa molempien vesimelonien nopeus oli yhtä suuri ja osuman jälkeen ne olivat paikoillaan. Molempien vesimelonien liikemäärä muuttui yhtä paljon, kun kypärän massa on merkityksetön.

Pyöräilykypärä on tehty joustavasta materiaalista, mikä pidentää pyöräilykypärän sisällä olevan vesimelonin törmäysaikaa. Kun voiman vaikutusaika pitenee, impulssiperiaatteen mukaan törmäyksessä vesimeloniin kohdistuva voima pienenee. Pyöräilykypärän sisällä olevaan vesimeloniin siis kohdistuu pienempi voima kuin vesimeloniin, joka ei ole kypärän sisällä.

Vesimelonin pinnan tukivoima kestää tämän pienemmän voiman, ja siksi se ei halkea. Tämä on juuri pyöräilykypärän tarkoitus. Kun polkupyöräilijän pää osuu kovaan pintaan, pyöräilykypärä pidentää voiman vaikutusaikaa. Näin päähän kohdistuva voima pienenee, mikä vähentää vammojen vakavuutta.

Tehtävä 13.18.

- a) Newtonin II laki ilmenee mittauksessa siinä, että kappaleiden nopeudet muuttuvat ja kappaleet ovat tällöin kiihtyvässä liikkeessä voiman vaikutuksesta.

Newtonin III laki ilmenee törmäyshetkellä, jolloin vaunut aiheuttavat joka hetki toisiinsa yhtä suuret, mutta vastakkaissuuntaiset voimat.

Newtonin I laki ilmenee ennen törmäystä ja törmäyksen jälkeen, sillä tällöin kappaleet etenevät vakionopeuksilla, kun niihin ei vaikuta liikkeen suunnassa voimia.

b) Nopeuden kuvaajan perusteella vaunuun 1 vaikuttava impulssi on $I_1 = 0,3098 \text{ Ns}$ ja vaunuun 2 vaikuttava impulssi $I_2 = 0,3005 \text{ Ns}$. Vaunun 1 nopeuden muutos nopeuden kuvaajan perusteella on

$$\Delta v_1 = 0,04 \text{ m/s} - (-0,36 \text{ m/s}) = 0,40 \text{ m/s}.$$

Vaunun 2 nopeuden muutos $\Delta v_2 = (0,67 + 0,39) \text{ m/s} = 1,06 \text{ m/s}$.

Tarkastellaan törmäyksiä impulssiperiaatteella

$$I_1 = m_1 \Delta v_1 \text{ ja}$$

$$I_2 = m_2 \Delta v_2.$$

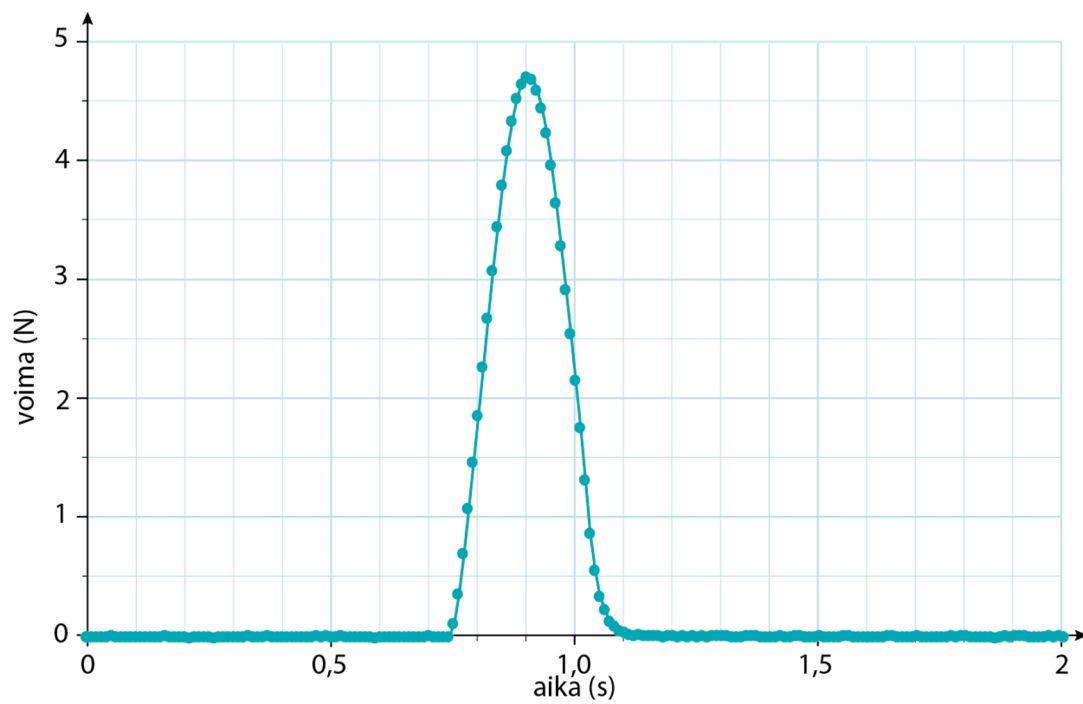
Vaunujen massat ovat

$$m_1 = \frac{I_1}{\Delta v_1} = \frac{0,3098 \text{ Ns}}{0,40 \text{ m/s}} = 0,7745 \text{ g} \approx 770 \text{ g}$$

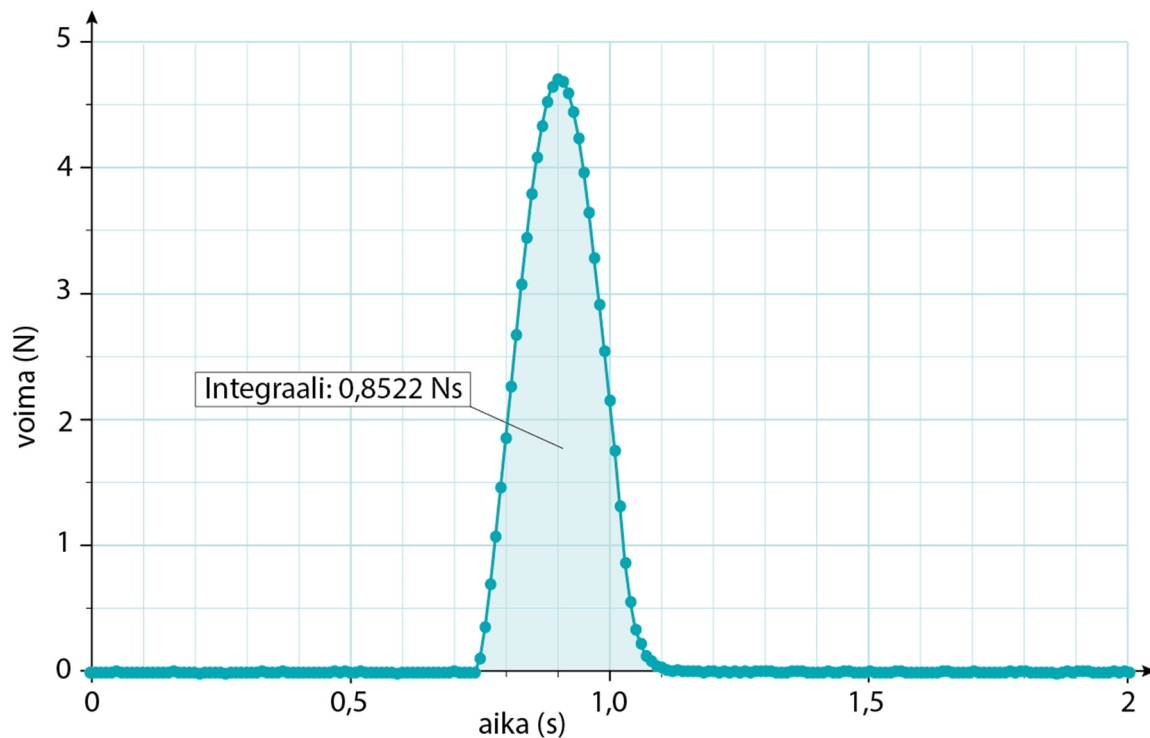
$$m_2 = \frac{I_2}{\Delta v_2} = \frac{0,3005 \text{ Ns}}{1,06 \text{ m/s}} = 0,283 \text{ g} \approx 280 \text{ g}.$$

Tehtävä 13.19.

a)



- b) Seinän tukivoiman vaunuun aiheuttama impulssi saadaan (t, F) -koordinaatiston ja kuvaajan rajoittaman alueen fysikaalisena pinta-alana. Määritetään fysikaalinen pinta-ala.



Seinän tukivoiman vaunuun aiheuttama impulssi on $I = 0,8522 \text{ Ns} \approx 0,85 \text{ Ns}$.

c) Vaunun massa $m = 0,790 \text{ kg}$

Vaunun nopeus ennen törmäystä $v_1 = 0,56 \text{ m/s}$

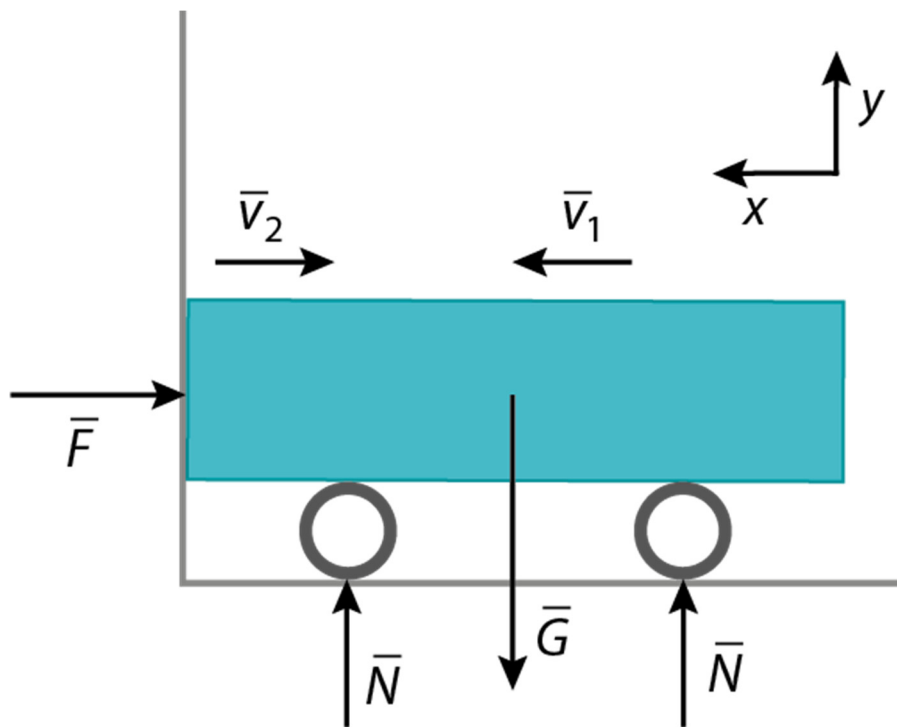
Kun vaunu törmää seinään, seinän vaunuun kohdistama tukivoima aiheuttaa vaunuun impulssin, joka muuttaa vaunun liikemäärää. Impulssiperiaatteen mukaan

$$\bar{I} = \Delta \bar{p}$$

$$\bar{F} \Delta t = \Delta m \bar{v}$$

$$\bar{F} \Delta t = m \bar{v}_2 - m \bar{v}_1.$$

Valitaan vaunun alkuperäinen suunta positiiviseksi suunnaksi, jolloin



$\bar{F}$ = seinän vaunuun kohdistama voima

$\bar{G}$ = vaunun paino

$\bar{N}$ = lattian vaunuun kohdistama tukivoima

$$-F\Delta t = -mv_2 - mv_1$$

$$F\Delta t = mv_2 + mv_1.$$

Vaunun nopeus törmäyksen jälkeen

$$v_2 = \frac{F\Delta t - mv_1}{m} = \frac{0,8522 \text{ Ns} - 0,790 \text{ kg} \cdot 0,56 \text{ m/s}}{0,790 \text{ kg}} = 0,51873 \text{ m/s} \approx 0,52 \text{ m/s}.$$

Syvennä

Tehtävä 13.21.

- a) Rakettimoottorissa hapetinaine kulkee raketin mukana. Suihkumoottori käyttää hapettimena ilmassa olevaa happea.

- b) Kun rakettipolttoaine palaa, muodostuu uusia molekyylejä. Uusien molekyylien muodostumisessa sisäenergia pienenee. Sisäenergian muutoksessa vapautunut energia lämmittää ympäröivää polttoainetta ja kaasua.

c) Kaasusuihkun nopeus $v_k = 2\,400\text{ m/s}$

Raketin massa alussa M

Massan muutos aikayksikössä $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{100}{s} \frac{M}{s}$

Impulssiperiaatteen mukaan $\bar{I} = \bar{F}\Delta t = \Delta\bar{p}$.

Rakettia työntävän voiman impulssi muuttaa raketin liikemäärää.

Aikavälillä Δt raketin liikemäärän muutos Δp_r on yhtä suuri kuin kaasun liikemäärän muutos, $\Delta p_k = m\Delta v_k$, joten

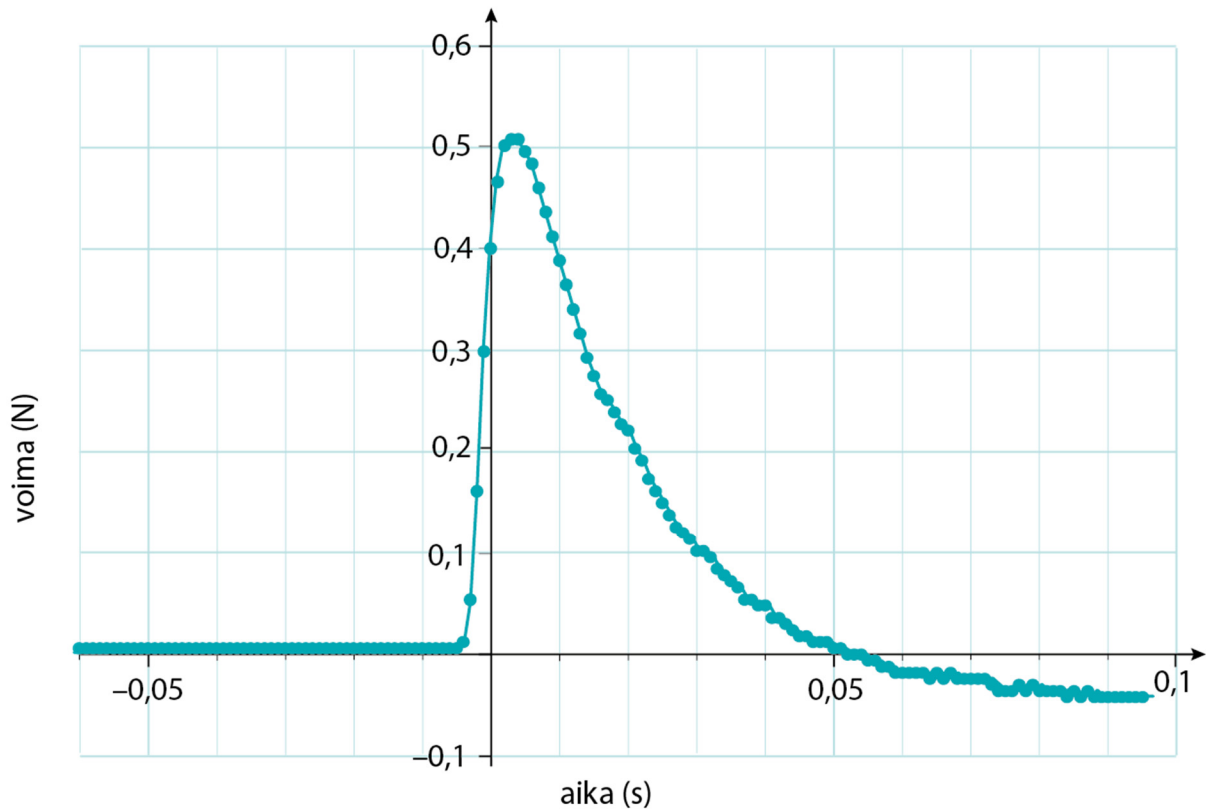
$$F = \frac{\Delta p_r}{\Delta t} = \frac{\Delta m v_k}{\Delta t}.$$

Newtonin II lain mukaan $\sum \bar{F} = m\bar{a}$, joten raketin kiihtyvyys on työntävän voiman ja raketin massan M suhde

$$a = \frac{F}{M} = \frac{\Delta m v_k}{M \Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \frac{v_k}{M} = \frac{100}{s} \cdot \frac{2400 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{M} = 24 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Tehtävä 13.22.

a)

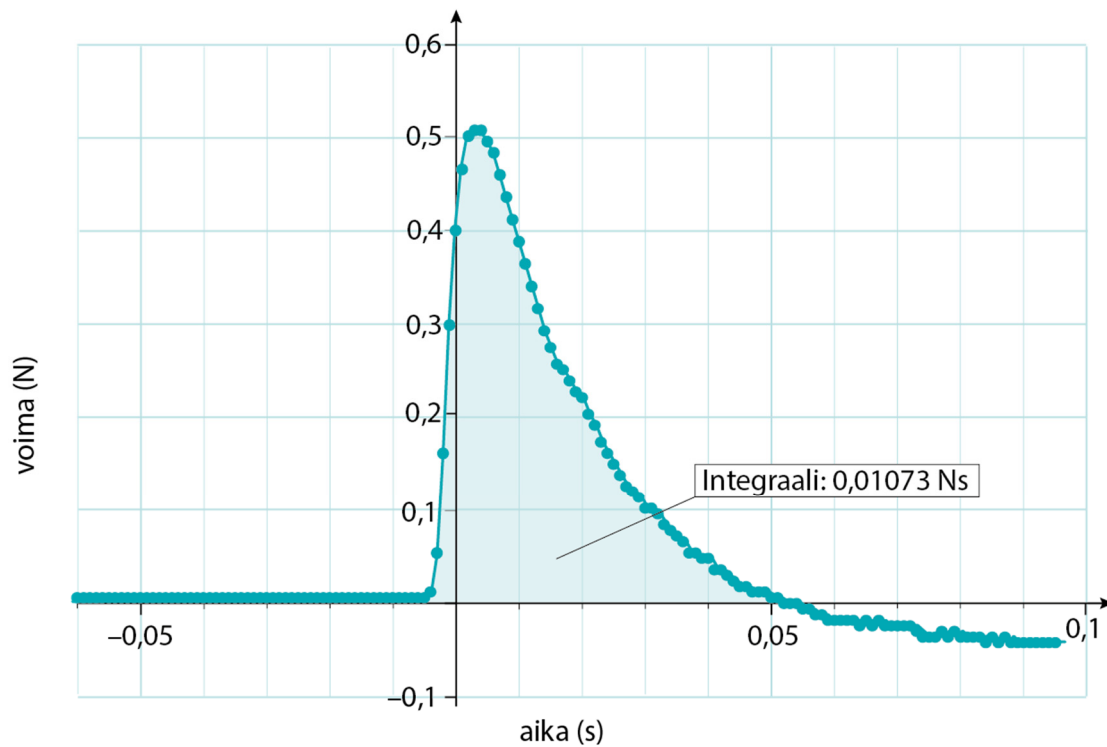


(akselit oikein päin 2 p, mittauspisteet kuvaajassa 1 p, kuvaaja riittävän iso 1 p)

b) Lelun hyppykorkeus videolta määritettynä oli

$$h = 43,5 \text{ cm} - 9,5 \text{ cm} = 34 \text{ cm. (1 p)}$$

- c) Leluun kohdistuva impulssi saadaan (t, F) -koordinaatiston kuvaajan ja akselien rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta. (1 p) Määritetään pinta-ala.



(pinta-alan määrittäminen 1 p)

Leluun kohdistuva impulssi on
 $I = 0,01073 \text{ Ns} \approx 0,0107 \text{ Ns}$. (1 p)

d) Tarkastellaan lelun hyppyä impulssiperiaatteella. Leluun kiinnitetyn jousen leluun kohdistama impulssi on yhtä suuri kuin lelun liikemäärän muutos.

$$\bar{I} = \Delta \bar{p}$$

$$\bar{F} \Delta t = \Delta m \bar{v}$$

$$\bar{F} \Delta t = m \bar{v}_2 - m \bar{v}_1.$$

TAI

$$I = \Delta p$$

$$F \Delta t = \Delta mv$$

$$F \Delta t = mv_2 - mv_1.$$

(2 p., myös v_1 voidaan merkitä nolllaksi, jos se on sanallisesti perusteltu, jolloin $F \Delta t = mv$.)

Lelun nopeus alussa on nolla, joten lelun lähtönopeudeksi saadaan

$$F \Delta t = mv_2$$

$$v_2 = \frac{F \Delta t}{m} = \frac{0,01073 \text{ Ns}}{0,0042 \text{ kg}} = 2,55476 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

(kaava oikein 1 p, tulos oikein kahden tai kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella 1 p)

- e) Nalle lähtee d-kohdan nopeudella ja liikkeen ylimmässä kohdassa nallen nopeus on nolla. Tarkastellaan nallen nousukorkeutta mekaniikan energiaperiaatteella. Sovitaan nallen potentiaalienergian nollassoksi paikka, jossa nalle irtoaa jousesta.

$$E_{\text{pa}} + E_{\text{ka}} = E_{\text{pl}} + E_{\text{kl}}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$\frac{1}{2}v^2 = gh.$$

(1 p)

Nallen korkeuden muutos

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(2,55476 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} = 0,33266 \text{ m} \approx 33 \text{ cm. (1 p)}$$

Videon perusteella nallen korkeuden muutos on 34 cm.

Erot mittaustuloksissa johtuvat siitä, että videolta lelun nousukorkeuden määrittäminen on epätarkkaa. Myös voima-anturin nollaus ei ole ihan onnistunut.

Mittauksessa olisi voinut olla hieman enemmän mittauspisteitä, jolloin kuvaajan pinta-ala olisi ollut tarkempi. (1 p)