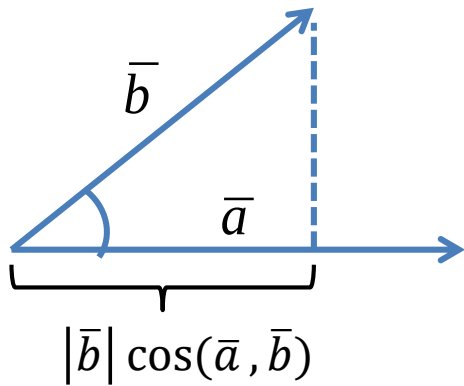


Vektorien välinen kulma

- Vektorien pistetulo voidaan tulkita geometrisesti vektorien pituuksien ja vektorien välisen kulman kosinin avulla: (ks. oppikirja s. 102)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) \quad \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$$



Lasketaan ensin kumman tahansa vektorin pituus ja toisesta vektorista ensimmäisen vektorin suuntaisen komponentin (ns. *projektion*) pituus ja kerrotaan nämä keskenään.

- Pistetulon avulla voidaan laskea vektorien välisen kulman kosini ja siten myös vektorien välinen kulma:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Esimerkki: Lasketaan vektorien $\vec{a} = 7\vec{i} + 2\vec{j}$ ja $\vec{b} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$ välinen kulma asteen tarkkuudella:

Vektorien välisen kulman kosini on

$$\begin{aligned}\cos(\vec{a}, \vec{b}) &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\&= \frac{(7\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot (-3\vec{i} + 5\vec{j})}{\sqrt{7^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 5^2}} \\&= \frac{7 \cdot (-3) + 2 \cdot 5}{\sqrt{49 + 4} \cdot \sqrt{9 + 25}} \\&= \frac{-21 + 10}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{34}} = \frac{-11}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{34}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& -11/(\text{sqrt}(53)*\text{sqrt}(34)) \\& = -0,25912856608735001937\end{aligned}$$

Vektorien välinen kulma on

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos \frac{-11}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{34}} \approx 105^\circ$$

$$\begin{aligned}& \arccos(\text{ans}) \\& = 105,01836063115066661945\end{aligned}$$

t. 344, s. 109

Merkitään kärkipisteet

$$O = (0, 0, 0)$$

$$A = (1, 1, 0)$$

$$B = (1, 0, 1)$$

$$C = (0, 1, 1)$$

Muodostetaan sivusärmien vektorit (6 kpl)

$$\overrightarrow{OA} = \bar{i} + \bar{j}$$

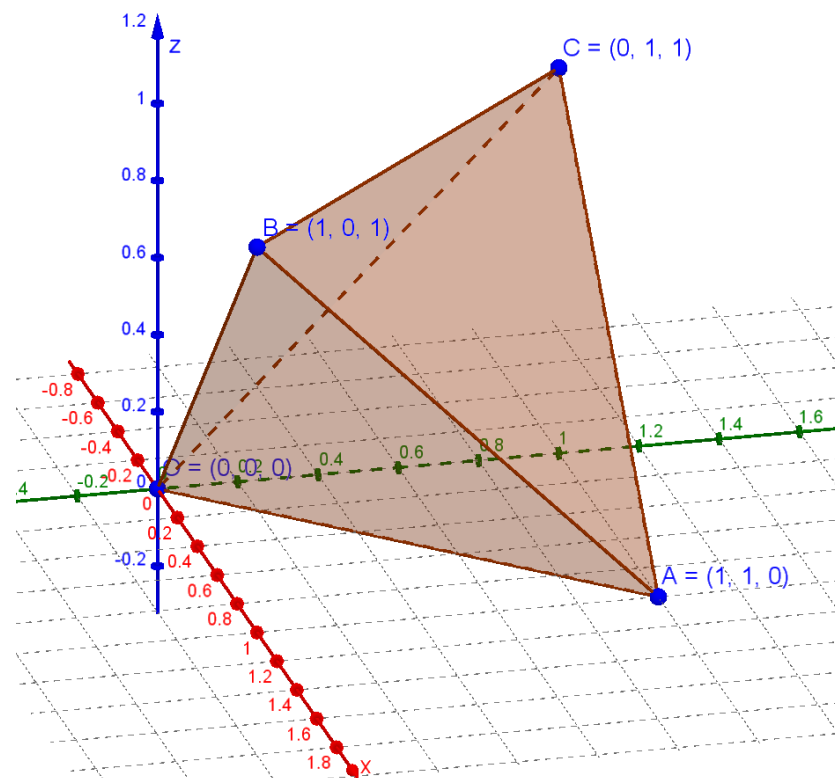
$$\overrightarrow{AB} = -\bar{j} + \bar{k}$$

$$\overrightarrow{OB} = \bar{i} + \bar{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = -\bar{i} + \bar{k}$$

$$\overrightarrow{OC} = \bar{j} + \bar{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = -\bar{i} + \bar{j}$$



Kaikissa vektoreissa on kaksi komponenttia, joiden kertoimet ovat 1 tai -1 . Kaikkien vektorien pituus on siis $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Kaikki särmät ovat siis yhtä pitkiä, joten tahkot ovat tasasivuisia kolmioita.

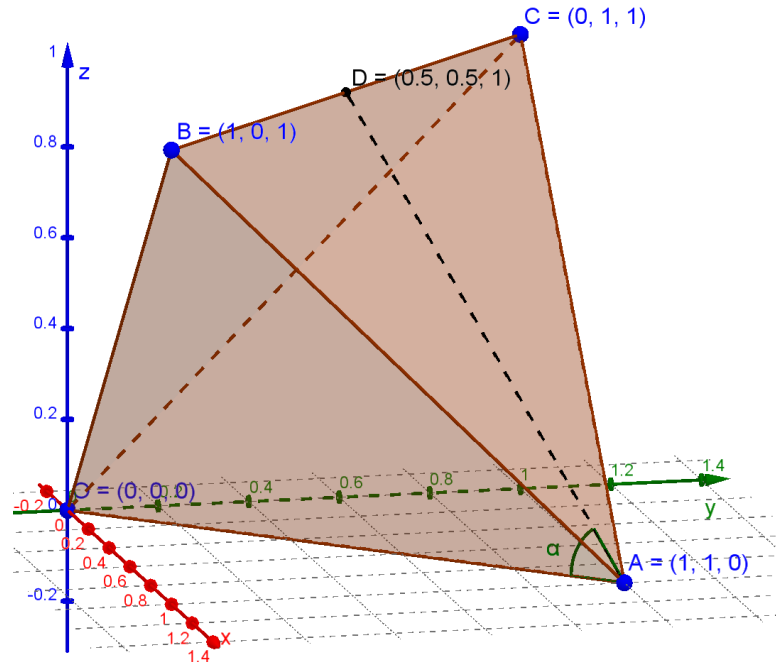
Monitahokas on siis säännöllinen tetraedri.

Särmän ja tahkon välinen kulma on särmävektorin $\overline{OA}$ ja tahkon korkeusjanan AD välinen kulma.

(Toisin sanoen AD on särmän *projektio* tahkolle.)

Korkeusjana AD puolittaa sivusärmän BC :

$$D = \left(\frac{1+0}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{1+1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right)$$



Kysytty kulma α on siis vektorien $\overline{AO}$ ja $\overline{AD}$ välinen kulma.

$$\overline{AO} = -\overline{OA} = -\bar{i} - \bar{j} \qquad \overline{AD} = \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \bar{i} + \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \bar{j} + \bar{k} = -\frac{1}{2} \bar{i} - \frac{1}{2} \bar{j} + \bar{k}$$

Lasketaan kulman α kosini
CAS-laskimella (Esimerkiksi
GeoGebran Kulma-toiminto):

$$\alpha \approx 54,7^\circ$$

Kulman laskeminen ”perinteisesti”:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AO} \cdot \overline{AD}}{|\overline{AO}| |\overline{AD}|} = \frac{-1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot 1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 54,74^\circ$$