

# Yhtälöparit KPL 10-16

Verrannollisuus koordinaatistossa

Kahden muuttujan yhtälö

Yhtälöpari

Graafinen ratkaiseminen

Algebrallinen ratkaiseminen

Sovelluksia

# Verrannollisuus koordinaatistossa

**Suoraan verrannollisuudessa riippuvuus** suureiden välillä voidaan esittää muodossa  $y = kx$ .

→ kuvaaja on origon kautta kulkeva suora eli vakiotermin on 0

→ vakio  $k$  on verrannollisuuskerroin

→ suureet ovat suoraan verrannolliset, jos niiden *suhde* (osamäärä) pysyy aina *yhtä suurena* eli  $\frac{y}{x}$  on vakio  $k$ .

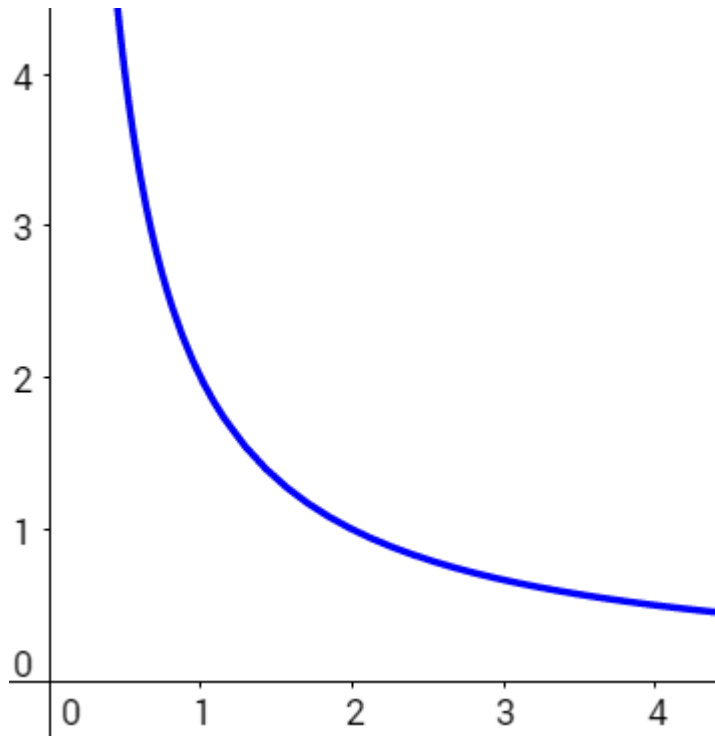
**Käntäen verrannollisuudessa** riippuvuus suureiden välillä voidaan esittää muodossa  $y = \frac{k}{x}$ ,  
jossa  $k \neq 0$  ja  $x \neq 0$ .

→ kuvaaja on hyperbeli

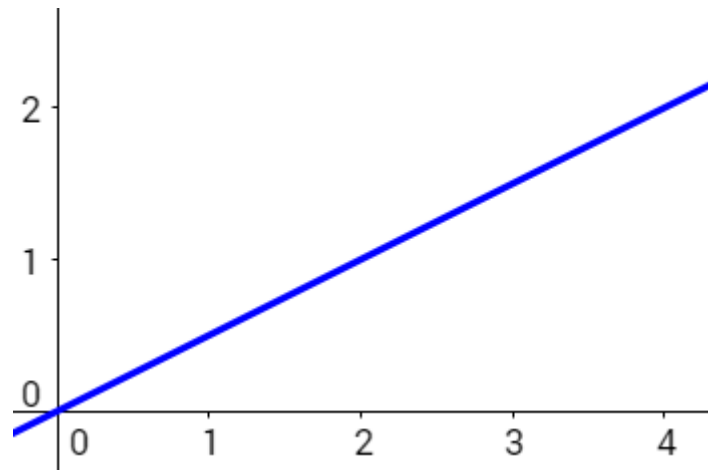
→ vakio  $k$  on verrannollisuuskerroin

→ Kaksi suuretta ovat käntäen verrannolliset, jos niiden *tulo* pysyy *yhtä suurena* eli  $yx = k$

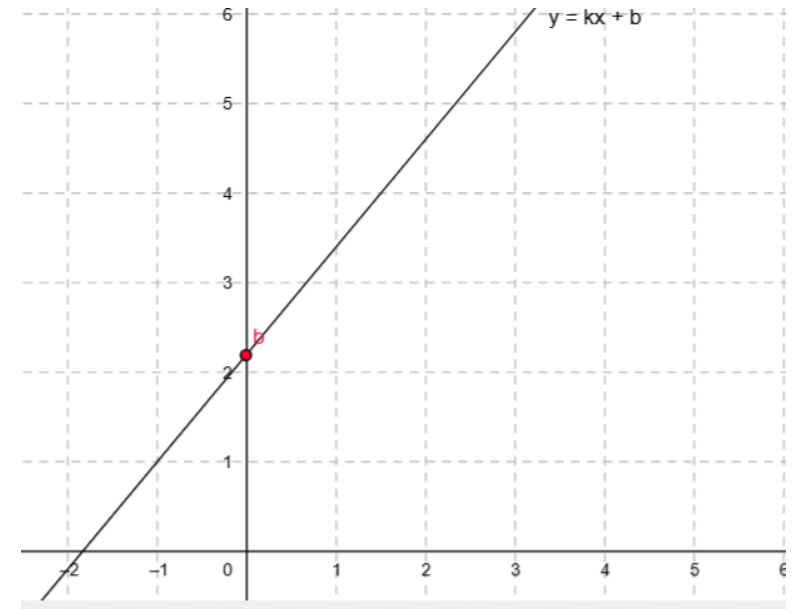
# Onko suureet suoraan verrannollisia, kääntäen verrannollisia vai ei kumpikaan?



a) Kääntäen verrannolliset



b) suoraan verrannolliset



c) ei kumpaakaan

# Kahden muuttujan yhtälö

Kahden muuttujan yhtälössä on kaksi tuntematonta.

Esimerkiksi  $y - 3x = 4$  on kahden muuttujan yhtälö.

Mitkä ovat yhtälön  $y - 3x = 4$  ratkaisuja?

Yhtälö voidaan ratkaista  $y$ :n suhteen, jolloin saadaan suoran yhtälön ratkaistu muoto eli  $y = 3x + 4$ .

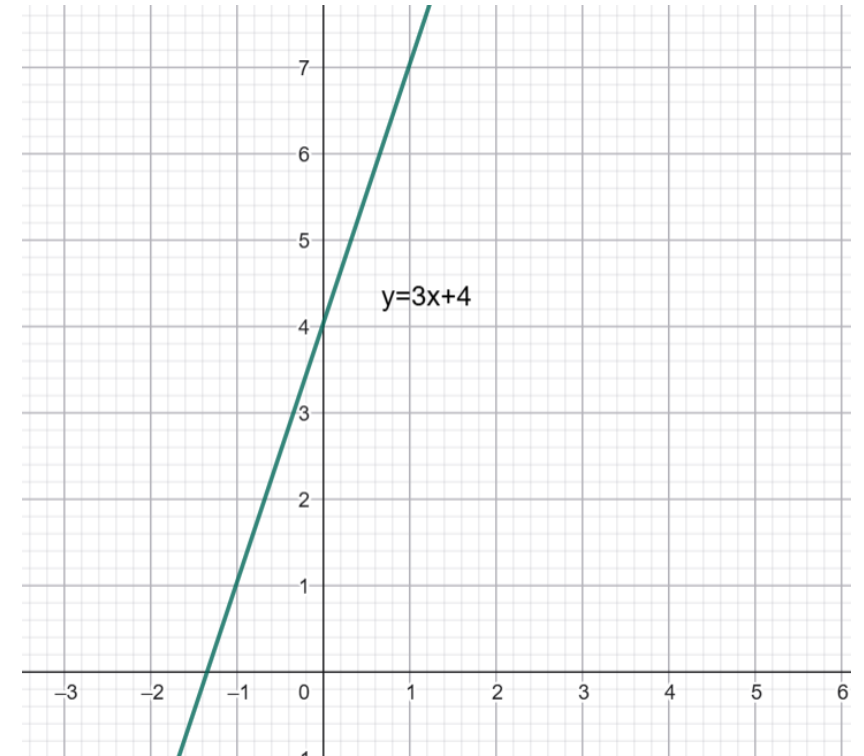
Nyt piirtämällä suoran kuvaaja nähdään, että kaikki suoran pisteet, toteuttavat yhtälön ja ovat sen ratkaisuja.

# Miten piirtää suora $y = 3x + 4$ ?

$$y = kx + b$$

Joko taulukoimalla tai vakiotermin 4 ja kulmakertoimen 3 avulla. Vakiotermi 4 on y-akselin leikkauspiste ja kulmakerroin 3 kertoo, että kun siirtyy yhden x:n oikealle, niin y nousee 3 ylös.

x	$y = 3x + 4$	(x,y)
0	$y = 3 \cdot 0 + 4 = 4$	(0,4)
1	$y = 3 \cdot 1 + 4 = 7$	(1,7)
2	$y = 3 \cdot 2 + 4 = 10$	(2,10)



# Toteuttaako lukupari (1,-2) yhtälön $4x - 2y = 0$ ?

Sijoitetaan  $x = 1$  ja  $y = -2$  yhtälöön ja katsotaan tuleeko tosi.

$$4x - 2y = 0$$

$$4 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) = 0$$

$$4 + 4 = 0$$

$$8 = 0$$

Identtisesti epätosi  $\rightarrow$  ei toteuta.

Vastaus: Yhtälön ratkaisu ei ole piste (1,-2)

# Yhtälöpari

Yhtälöparissa on kaksi yhtälöä, joille etsitään yhteisiä ratkaisuja.

Yhtälöparin ratkaisu on se lukupari  $(x,y)$ , joka toteuttaa molemmat yhtälöt.

Yhtälöparin ratkaisujen lukumäärä:

- Yksi ratkaisu eli suorat ovat erisuuntaiset (kulmakerroin eri)
- Äärettömän monta ratkaisua eli suorien yhtälöt ovat samat (kulmakerroin ja vakiotermi sama)
- Ei yhtään ratkaisua eli suorat ovat yhdensuuntaiset (kulmakertoimet eri)

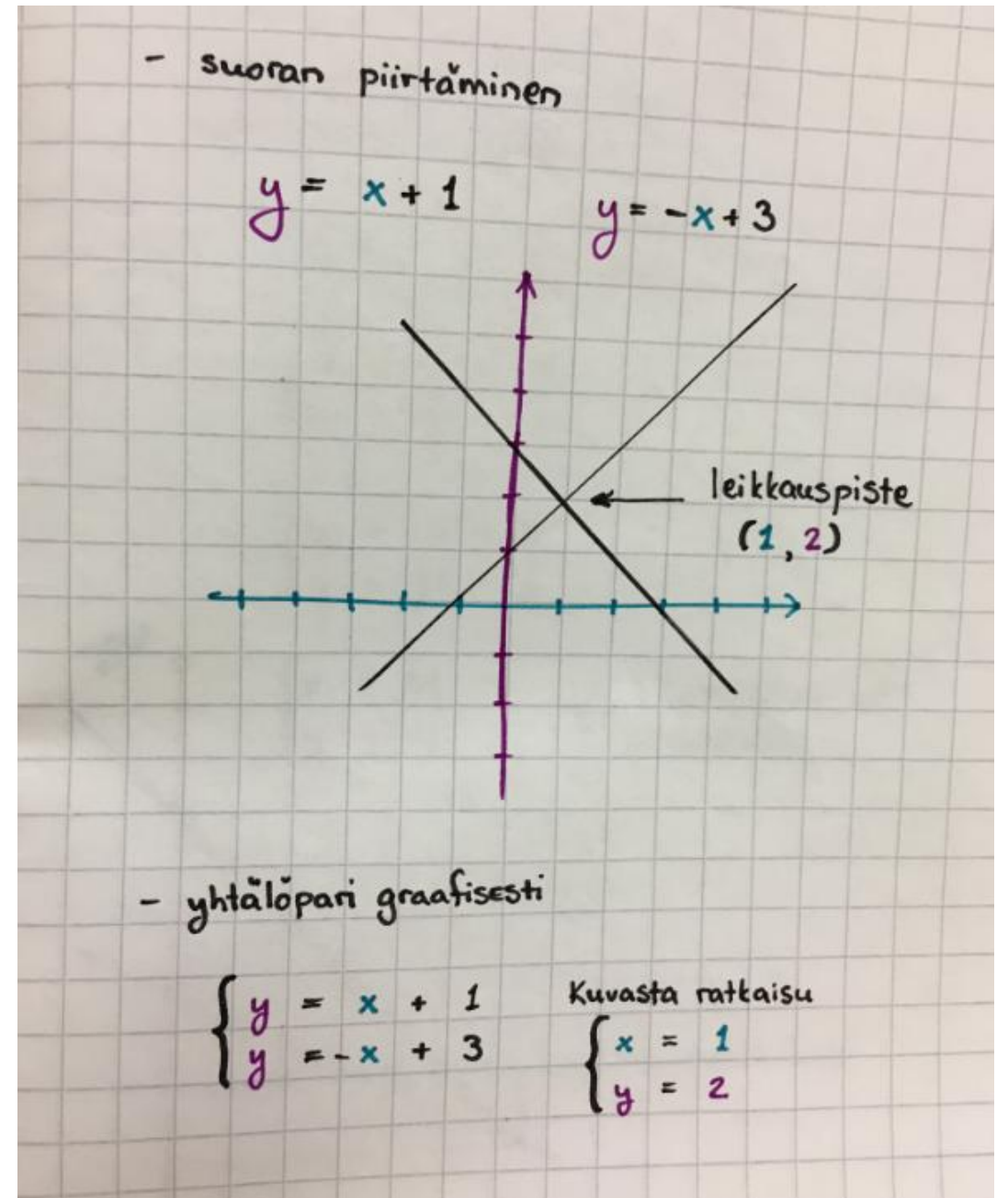
# Graafinen ratkaiseminen

Ratkaise graafisesti yhtälöpari

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisu kuvaajasta

$$x = 1 \text{ ja } y = 2$$



# Sijoitusmenetelmä

$$\begin{cases} x + y = 1 & (1) \\ y = x & (2) \end{cases}$$

Sijoitetaan alempi ratkaistu yhtälö ylempään yhtälöön

$$\begin{aligned} (1) \quad x + y &= 1 \\ x + x &= 1 \\ 2x &= 1 \quad |:2 \\ x &= 1/2 \end{aligned}$$

Sijoitetaan y:n paikalle x ja ratkaistaan yhtälö

$$\begin{aligned} (2) \quad y &= x \\ y &= 1/2 \end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu x:n arvo jompaan kumpaan yhtälöön ja ratkaistaan y. Yhtälö (2) näyttää helpommalta joten sijoitetaan  $x = 1/2$  siihen.

Yhtälöparin ratkaisu on lukupari

$(x, y) = (1/2, 1/2)$ . Sama voidaan myös ilmoittaa

$$\begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1/2 \end{cases}$$

# Yhteenlaskumenetelmä

## Esimerkki1

Ratkaise yhtälöpari 
$$\begin{cases} 5x + y = -12 \\ 3x - y = -12 \end{cases}$$

Käytetään yhteenlaskumenetelmää. Muunnetaan yhtälöpari yhden muuttujan yhtälöksi laskemalla yhtälöt puolittain yhteen.

$$\begin{array}{r} 5x + y = -12 \\ + 3x - y = -12 \\ \hline 8x = -24 \quad |:8 \\ x = -3 \end{array}$$

Sijoitetaan saatu arvo jompaan kumpaan yhtälöön. Valitaan alempi.

$$\begin{array}{r} 3 \cdot (-3) - y = -12 \\ -9 - y = -12 \\ -y = -12 + 9 \\ -y = -3 \quad |:(-1) \\ y = 3 \end{array}$$

$$V: x = -3 \text{ ja } y = 3$$

# Sovelluksia

Lue tarkasti tehtävänanto.

Kirjoita näkyväksi mitä merkkaat  $x$ :llä ja mitä  $y$ :llä.

Tee annetuista tiedoista taulukko, jos helpottaa ratkaisua.

Kirjoita yhtälöpari ja ratkaise.

Tarkista.

Muista antaa sanallinen vastaus!