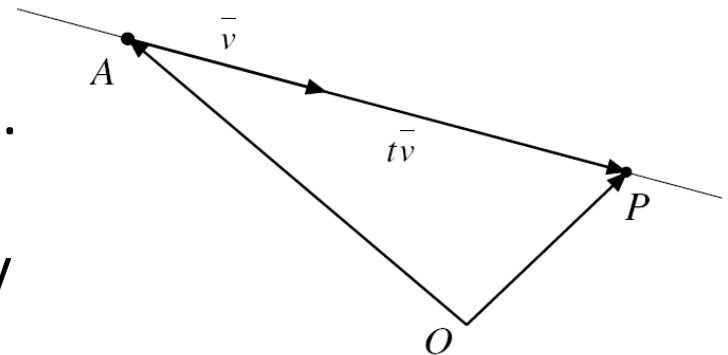


Suora avaruudessa

- Suora määräytyy yksikäsitteisesti, jos tiedetään
 1. Kaksi suoran pistettä (A ja B)
 2. Yksi suoran piste (A) sekä jokin suoran suuntainen vektori, suuntavektori $\vec{v}$
 - Kun tunnetaan kaksi pistettä A ja B , niin suuntavektoriksi voidaan valita vektori $\overrightarrow{AB}$.
- Olkoon A eräs suoran piste ja $\vec{v}$ suoran eräs suuntavektori. Piste P on tällä suoralla, jos
 1. Vektori $\overrightarrow{AP}$ on yhdensuuntainen suuntavektorin $\vec{v}$ kanssa eli jos on olemassa sellainen luku t , että $\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$, tai jos
 2. Pisteen P paikkavektori voidaan esittää muodossa
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v},$$
missä t on jokin reaaliluku.
- Kyseinen paikkavektorin lauseke on ns. parametrimuotoinen suoran yhtälö. Suora muodostuu, kun *parametri* t käy läpi kaikki reaaliluvut.



Olkoon nyt $A = (x_0, y_0, z_0)$ tunnettu (kiinteä) suoran piste ja

$\bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}$ suuntavektori.

Jos $P = (x, y, z)$ on mielivaltainen suoran piste, niin parametrimuotoinen suoran yhtälö voidaan kirjoittaa komponenttien avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{OA} + t\bar{v} \\ x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} &= x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + z_0\bar{k} + t(v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k})\end{aligned}$$

Avaruuden suora voidaan esittää yhtälöryhmänä vertaamalla kantavektorien komponentteja:

Diagram illustrating the parametric equations of a line in 3D space:

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y \\ z = z_0 + tv_z \end{cases}$$

Annotations:

- Suoran mielivaltaisen pisteen koordinaatit. (Points to x)
- Suoran jonkin suuntavektorin komponentit. (Points to v_x)
- Jonkin suoran tunnetun pisteen koordinaatit. (Points to x_0)

Yhtälöryhmä voidaan esittää myös ilman parametria t (ratkaisemalla t yhtälöryhmästä):

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z} \quad (= t)$$

Yo-tehtävä K06/6

Tutki ovatko pisteet $P = (4, 1, -2)$ ja $Q = (0, 2, 4)$ pisteiden $A = (1, 1, 1)$ ja $B = (-1, 1, 3)$ määräämällä suoralla.

Ratkaistaan tehtävä yhdensuuntaisuuden avulla (tapa 1). Suoran eräs suuntavektori on

$$\overrightarrow{AB} = (-1 - 1)\bar{i} + (1 - 1)\bar{j} + (3 - 1)\bar{k} = -2\bar{i} + 2\bar{k}.$$

Jos vektori $\overrightarrow{AP}$ on yhdensuuntainen vektorin $\overrightarrow{AB}$ kanssa, niin piste P on suoralla. Yhdensuuntaisuusehdon perusteella riittää osoittaa, että $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AP}$ jollakin reaaliluvulla t .

$$\overrightarrow{AP} = (4 - 1)\bar{i} + (1 - 1)\bar{j} + (-2 - 1)\bar{k} = 3\bar{i} - 3\bar{k}.$$

Helposti nähdään, että $-\frac{2}{3}(3\bar{i} - 3\bar{k}) = -2\bar{i} + 2\bar{k}$. Siis $t = -\frac{2}{3}$ ja vektorit ovat yhdensuuntaisia. Piste P on siis suoralla.

Vastaavasti piste Q :

$$\overrightarrow{AQ} = (0 - 1)\bar{i} + (2 - 1)\bar{j} + (4 - 1)\bar{k} = -\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}.$$

Vektori $\overrightarrow{AQ}$ ei voi olla yhdensuuntainen vektorin $\overrightarrow{AB}$ kanssa, koska vain toisessa vektorissa on $\bar{j}$:n suuntainen komponentti. Piste Q ei siis ole suoralla.

Tehtävän voi ratkaista myös muodostamalla suoran yhtälö ja osoittamalla, että piste P toteuttaa suoran yhtälön, mutta piste Q ei (tapa 2).

Suoran eräs suuntavektori on $\overline{AB} = -2\bar{i} + 2\bar{k}$ eli $v_x = -2$, $v_y = 0$ ja $v_z = 2$.

Valitaan kiinteäksi pisteeksi $A = (1, 1, 1)$ eli $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ ja $z_0 = 1$.

Suoran yhtälö on siis

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Sijoitetaan pisteen P koordinaatit yhtälöön:

$$\begin{cases} 4 = 1 - 2t \\ 1 = 1 \\ -2 = 1 + 2t \end{cases}$$

Ylimmästä yhtälöstä saadaan ratkaistua parametriksi $t = -\frac{3}{2}$. Tämä toteuttaa myös alimman yhtälön. Keskimäinen yhtälö on aina tosi.

Piste P on siis suoralla.

Pisteen Q koordinaatit eivät toteuta yhtälöä, koska $y = 2 \neq 1$.

Piste Q ei siis ole suoralla.