EPÄSUORA TODISTUS

- tehdään vastaväite eli antiteesi
- osoitetaan, että antiteesista seuraa ristiriita alkuperäisen oletuksen kanssa

Esim Osoita, että jos n^2 on parillinen, niin n on parillinen.

Oletus: n^2 on parillinen (p)

Väite: n on parillinen (q)

Tod: Vastaväite: n on pariton $(\neg q)$

Koska n on pariton, niin $n = 2k+1$, kun $k \in \mathbb{Z}$

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\underbrace{(2k^2+2k)}_{t} + 1$$

$$= 2t+1, \quad t \in \mathbb{Z}$$

Joten $n^2 = 2t+1$ on pariton, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa (on osoitettu, että $\neg q$:sta seuraa $\neg p$), joten alkuperäinen väite on oikea $(p \Rightarrow q)$.

$\square$

esim Osoita, että luku $\sqrt{2}$ on irrationaalinen.

$\mathbb{N}$
$\mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$
irrat.
$\mathbb{R}$
$\mathbb{C}$

Oletus: $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$ ja $n \neq 0$. (p)

Väite: $\sqrt{2}$ on irr. luku. (q)

Tod: Vastaväite: $(\neg q)$

$\sqrt{2}$ on rationaaliluku

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \quad \Big|\, (\ )^2 \qquad , m, n \in \mathbb{N} \text{ ja } n \neq 0$$

molemmat puolet ei-negat.

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \quad \Big|\cdot n^2 (\neq 0)$$

$$m^2 = 2n^2$$

Siis $m^2 = m \cdot m$ on parillinen.

Jos tulo mm on parillinen, niin ainakin toinen luvuista on parillinen, joten m on parillinen ja voidaan kirjoittaa muotoon $m = 2k$. $(k \in \mathbb{Z})$

Sijoitetaan

$$m^2 = 2n^2 \quad \Big|\, m = 2k$$

$$(2k)^2 = 2n^2$$

$$4k^2 = 2n^2 \quad \Big|\, :2$$

$$n^2 = \underline{2}k^2$$

n^2 on parillinen, joten n on parillinen.

Nyt m ja n ovat parillisia ja niillä on yhteinen tekijä 2.

Tämä on vastoin oletusta, koska luku $\frac{m}{n}$ on loppuun asti supistettu murtoluku.

Vastaväite johtaa ristiriitaan, joten $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku.

$(p \wedge \neg q$ johtaa ristiriitaan.$)$ $\square$