

1. a) Selitä mitä tarkoittaa yhdistetty funktio. Käytä selityksen tukena matemaattisia piirroksia ja mer-

kintöjä. Muodosta ja derivoi funktio $f \circ g$, kun $f: f(x) = \sqrt{x+2}$ ja $g: g(x) = x+8$.

Laske lopuksi $(f \circ g)(6)$ ja $(f \circ g)'(6)$.

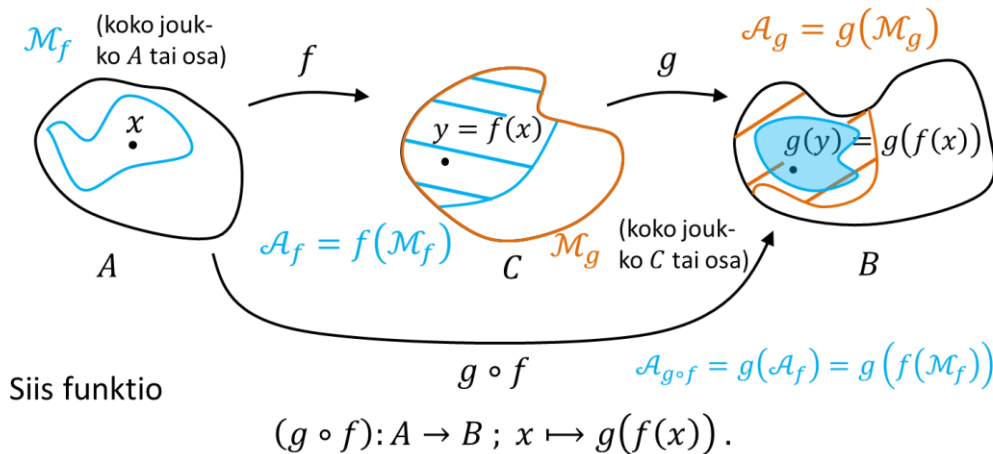
a)

Määritelmä, yhdistetty funktio:

Funktioiden f ja g *yhdistetty funktio* $g \circ f$ (luetaan " g pallo f ") määritellään yhtälöllä

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Funktio g on ns. *ulkofunktio* ja f *sisäfunktio*.



Saadaan

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+8) = \sqrt{x+8+2} = \sqrt{x+10},$$

jolle $(f \circ g)'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+10}}$. Näin ollen

$$(f \circ g)(6) = \sqrt{6+10} = \sqrt{16} = 4, \quad (f \circ g)'(6) = \frac{1}{2\sqrt{6+10}} = \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8}.$$

2. a) Ratkaise $\sqrt{x+5} = x-7$.

b) Määritä funktion $f: f(x) = 3x^2 e^{2x}$ derivaatan nollakohdat.

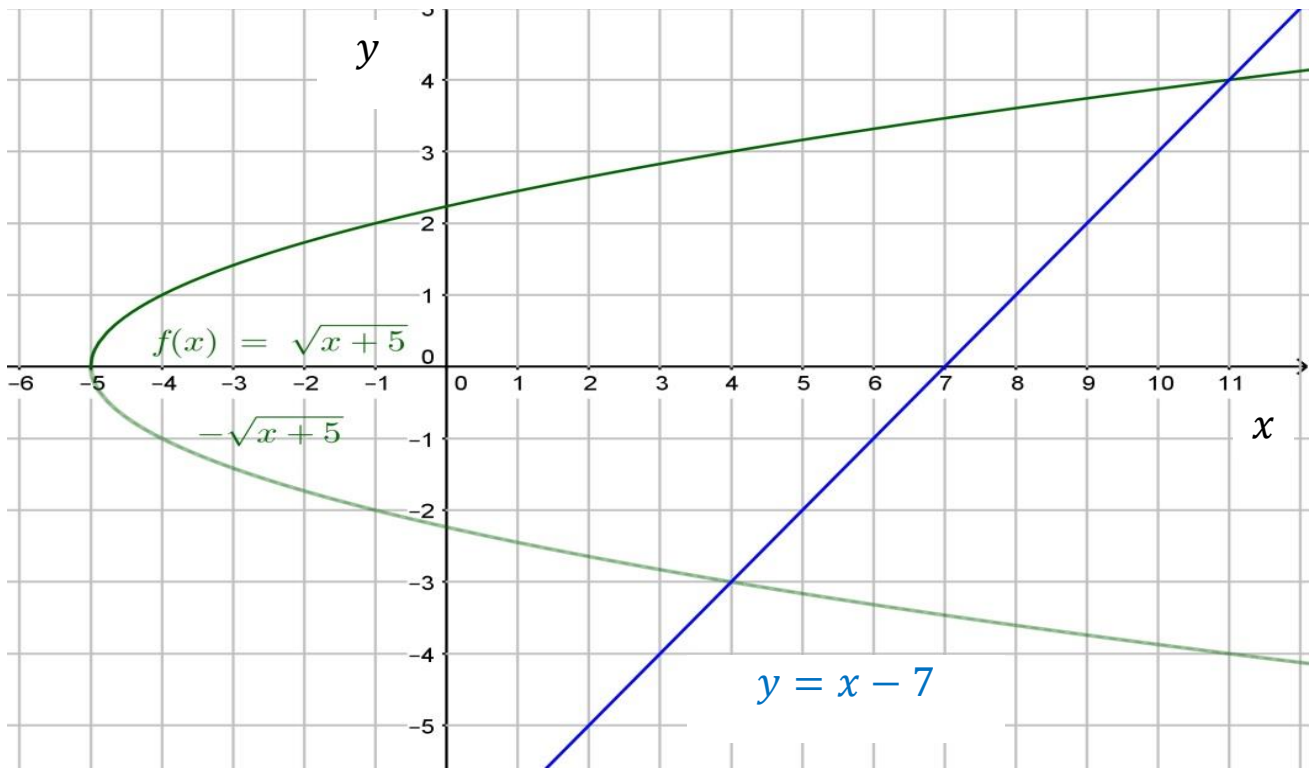
c) Osoita, että pätee $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{3x} = e^{-9}$. Kirjoita välivaiheet näkyviin.

d) Ratkaise epäyhtälö $4 \cdot 3^x \geq 1$

a) Aluksi määrittelyehdot: $x + 5 \geq 0$ eli $x \geq -5$ ja $x - 7 \geq 0$ eli $x \geq 7$. Siis $x \geq 7$. Näin ollen molemmat puolet toiseen korottamalla saadaan

$$x + 5 = x^2 - 14x + 49 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 15x + 44 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 11)(x - 4) = 0,$$

josta laskin (rat.kaava tai päättely) antaa $x = 11$ tai $x = 4$. Näistä eka hyväksytään, jälkimmäinen ei. Katso vielä kuva.



b) Derivointi antaa

$$f'(x) = 6xe^{2x} + 3x^2e^{2x} \cdot 2 = 6xe^{2x} + 6x^2e^{2x} = 6xe^{2x}(1 + x),$$

joten derivaatan f' nollakohdat ovat tulon nollasäännön nojalla $x = 0$ tai $x = -1$.

c) Kuten derivaatan määritelmässä, nyt etsitään muoto $e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\text{jotain}}\right)^{\text{jotain}}$ josta voidaan päätellä saatu raja-arvo, eli tulos $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{3x} = e^{-9}$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{-x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{x}{3}}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{x}{3}}\right)^{-\frac{x}{3}(-9)}$$

Koska tulo raja-arvo on sama kuin raja-arvojen tulo käsiteltävälle lausekkeelle kun $x \rightarrow x_0$ ja antamalla lo-

puksi kohdan $x_0 \rightarrow \infty$ (TAI tarkastelemalla raja-arvoa $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}(-9)}$), niin

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{x}{3}}\right)^{-\frac{x}{3}(-9)} = \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{x}{3}}\right)^{-\frac{x}{3}}}_{=e}^{-9} = e^{-9}$$

d) Saadaan

$$4 \cdot 3^x \geq 1$$

$$3^x \geq \frac{1}{4}$$

$$\log 3^x \geq \log \frac{1}{4}$$

$$x \cdot \log 3 \geq -\log 4$$

$$x \geq -\frac{\log 4}{\log 3}$$

3. a) Ratkaise epäyhtälö $2 \cdot 3^{2x} + 53^x - 3 \geq 0$. Perustele.

b) Määritä funktion $f: f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 1}$ suurin ja pienin arvo? Välivaiheet näkyviin.

a) Ratkaistaan ensin vastaavan yhtälön nollakohdat

$$2 \cdot 3^{2x} + 5 \cdot 3^x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot (3^x)^2 + 5 \cdot 3^x - 3 = 0 \quad \overset{\text{merkitään } y=3^x}{\Leftrightarrow} \quad 2y^2 + 5y - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2y - 1)(y + 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2} \vee y = -3$$

Siis $3^x = \frac{1}{2}$ tai $3^x = -3$. Jälkimmäinen vaihtoehto ei voi tulla kysymykseen koska $3^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Ehdosta

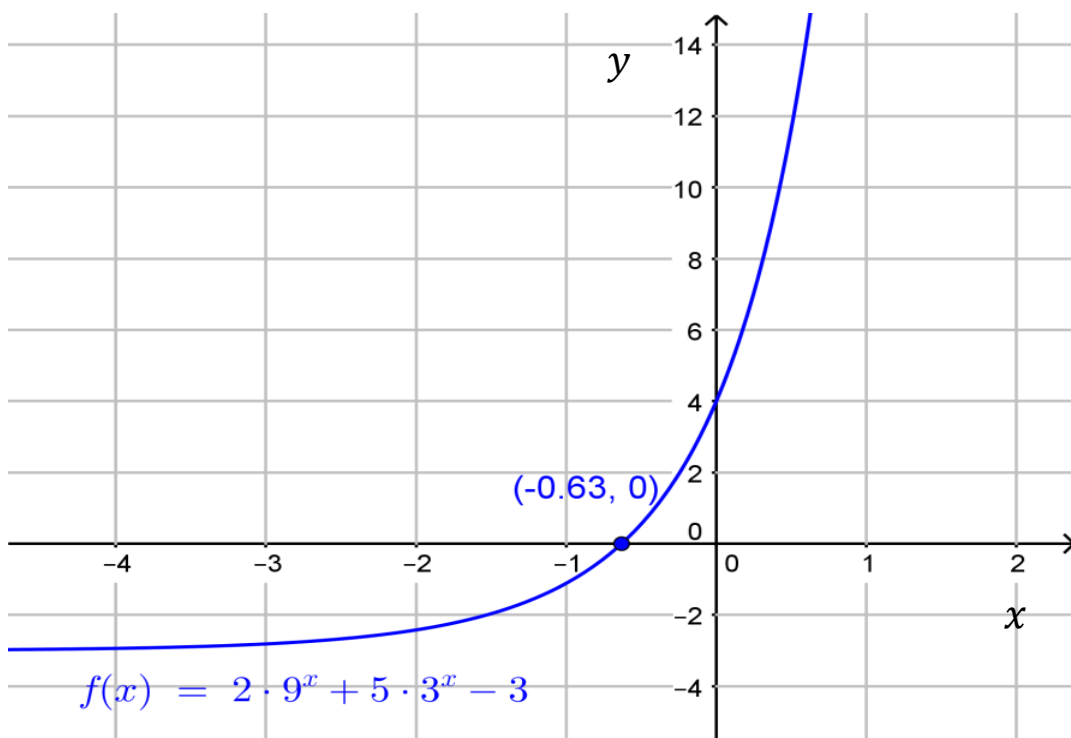
$3^x = 1/2$, saadaan

$$3^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \log 3 = \log \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\log \frac{1}{2}}{\log 3} = -\frac{\log 2}{\log 3}$$

Koska lauseketta $2 \cdot 3^{2x} + 5 \cdot 3^x - 3$ vastaavan funktion $f: f(x) = 2 \cdot 3^{2x} + 5 \cdot 3^x - 3$ derivaatta

$$f'(x) = 4 \cdot \ln 3 \cdot 3^{2x} + 5 \cdot \ln 3 \cdot 3^x > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

niin f on aidosti kasvava $\rightarrow$ vain yksi nollakohta ja näin ollen epäyhtälön $2 \cdot 3^{2x} + 5 \cdot 3^x - 3 \geq 0$ ratkaisuksi saadaan $x \geq -\frac{\log 2}{\log 3}$.



b) Funktion $f: f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 1}$ määrittelyehto on $-x^2 + 4x - 1 \geq 0$. Toisen asteen lausekkeen nollakohdiksi saadaan $x = 2 - \sqrt{3}$ ja $x = 2 + \sqrt{3}$. Alaspäin aukeava paraabeli, joten määrittelyehdon toteuttaa nollakohtien välinen alue, siis

$$2 - \sqrt{3} \leq x \leq 2 + \sqrt{3}.$$

Funktio f on jatkuva ja derivoituva määrittelyjoukossaan (välän päätekohtissa toispuoleiset derivaatat). Näin ollen ääriarvot saadaan välän päätepisteistä tai derivaatan nollakohdista (ei siis piikkejä eikä kohtia, joissa f ei määritely.)

Derivointi antaa:

$$f'(x) = \frac{-2x + 4}{2\sqrt{-x^2 + 4x - 1}} = \frac{-x + 2}{\sqrt{-x^2 + 4x - 1}},$$

ja $f'(x) = 0$, kun osoittaja $-x + 2$ on nolla eli kun $x = 2 \in [2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}] \approx [0,27 ; 3,73]$, OK.

Lisäksi $f'(x) > 0$, kun $x < 2$ ja $f'(x) < 0$, kun $x > 2$, koska $f'(1) = \frac{-1+2}{\sqrt{-1^2+4-1}} = \frac{1}{2} > 0$ ja $f'(3) =$

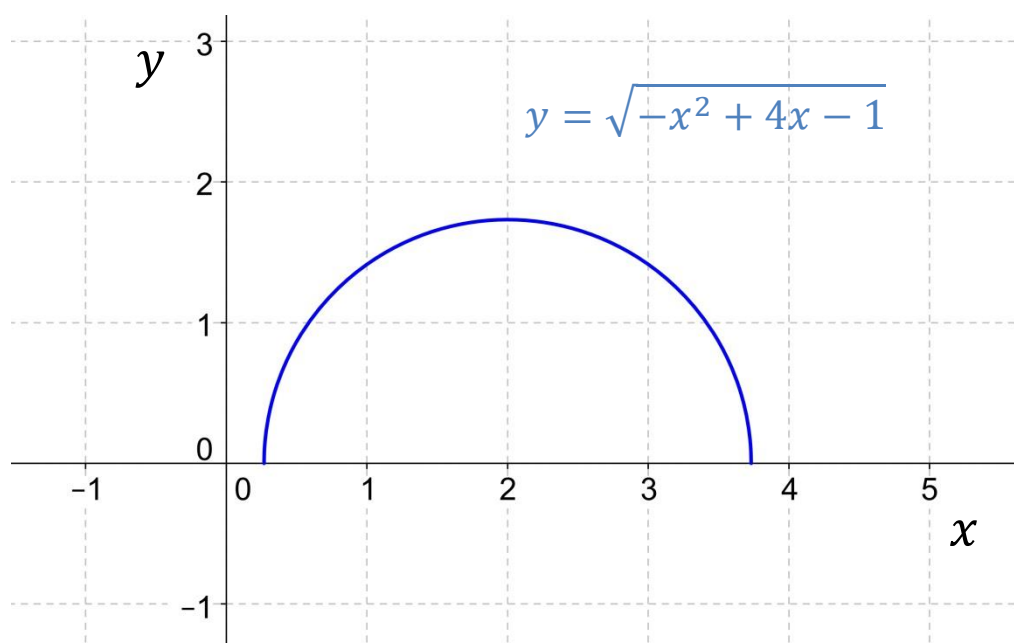
$\frac{-3+2}{\sqrt{-3^2+12-1}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} < 0$. Näin ollen merkkikaavioksi tulee:

	$2 - \sqrt{3}$	2	$2 + \sqrt{3}$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		↗	↘

Lasketaan lopuksi arvot

$$\begin{cases} f(2 - \sqrt{3}) = \sqrt{-(2 - \sqrt{3})^2 + 4 \cdot (2 - \sqrt{3}) - 1} = 0 \\ f(2) = \sqrt{-2^2 + 4 \cdot 2 - 1} = \sqrt{3} \\ f(2 + \sqrt{3}) = \sqrt{-(2 + \sqrt{3})^2 + 4 \cdot (2 + \sqrt{3}) - 1} = 0 \end{cases}$$

Siis, suurin arvo $\sqrt{3}$ kohdassa $x = 2$ ja pienin arvo 0 molemmissa välin päätekohtissa $x = 2 \pm \sqrt{3}$.



4. a) Ratkaise yhtälö $\sqrt[4]{5x^2 - 6} - x = 0$. Kirjoita välivaiheet näkyviin.

b) Laatokan vedestä vaihtuu 11 vuodessa 99 %. Missä ajassa vedestä on vaihtunut puolet?

a) Muunnetaan saatu yhtälö ensin muotoon $\sqrt[4]{5x^2 - 6} = x$ ja saadaan määrittelyehdoiksi (parillinen neliöjuuri)

$$\begin{cases} 5x^2 - 6 \geq 0 & \Leftrightarrow x^2 \geq \frac{6}{5} & \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{\frac{6}{5}} \quad \text{TAI} \quad x \geq \sqrt{\frac{6}{5}} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

jotka yhdistäen saadaan vahvimaksi ehdoksi $x \geq \sqrt{\frac{6}{5}}$.

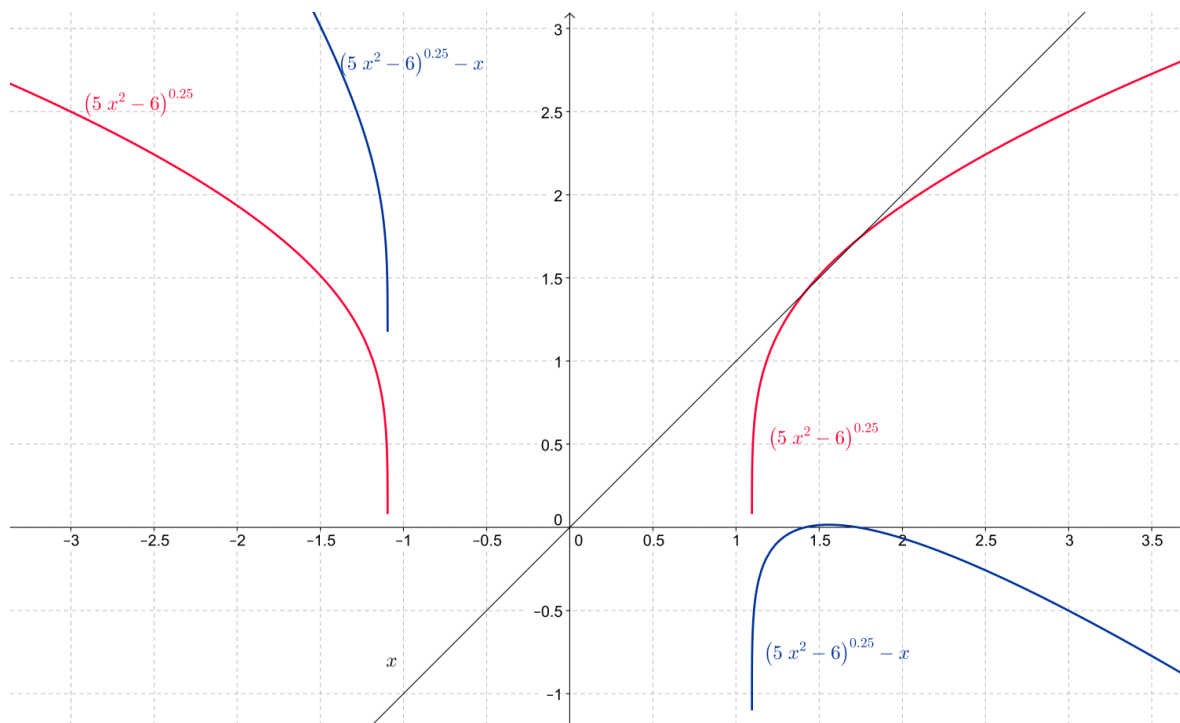
Korottamalla nyt yhtälö neljanteen potenssiin, saadaan

$$\sqrt[4]{5x^2 - 6} = x \xrightarrow{\uparrow^4} 5x^2 - 6 = x^4 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 6 = 0$$

Muodostuva bikvadraattinen yhtälö ratkaistaan tunnettuja menetelmiä (kurssi 2 tai TI-nspire) käyttäen ja saadaan ratkaisuiksi

$$x = \pm\sqrt{3}, \quad x = \pm\sqrt{2},$$

joista vain positiiviset $x = \sqrt{3}, x = \sqrt{2}$ hyväksytään. Katso kuvat alla ja vertaa tilannetta.



b) Muodostuu veden vaihtumisfunktio (mieluummin veden jäljellä olevan määrän funktio)

$$m: m(t) = m_0 \cdot k^t,$$

jolle tiedetään, että $m(11) = m_0 \cdot k^{11} = 0,01 \cdot m_0$. Alkumäärää on siis merkitty m_0 :lla. Eli 11 vuoden kulluttua *alkuperäisestä vesimäärästä* on jäljellä 1 %.

Näin ollen kasvutekijäksi k saadaan

$$k = \sqrt[11]{0,01} = 0,657\,933 \dots$$

ja edelleen $m(t) = m_0 \cdot 0,657\,933 \dots^t$.

Näin ollen millä ajan hetkellä $t = t_{1/2}$ pätee $m(t_{1/2}) = \frac{1}{2}m_0$? Muodostuu yhtälö

$$m_0 \cdot 0,657\,933 \dots^{t_{1/2}} = \frac{1}{2}m_0$$

$$0,657\,933 \dots^{t_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

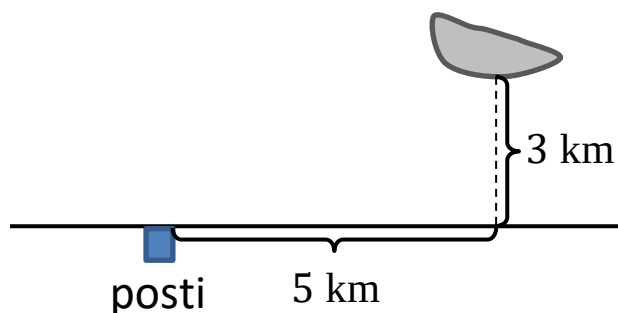
$$t_{1/2} \cdot \log 0,657\,933 \dots = \log 0,5$$

$$t_{1/2} = \frac{\log 0,5}{\log 0,657\,933 \dots}$$

$$t_{1/2} = 1,655\,664 \dots$$

Vastaus: Noin 1,7 vuoden kuluttua.

5. Kalastaja asuu saarella, jonka etäisyys mantereen suoraviivaisen rannan lähimmästä pisteestä on 3 km (katso kuva). Tästä pisteestä 5 km:n päässä on rannalla postitoimisto. Kalastaja kävelee nopeudella 5 km/h ja soutaa nopeudella 4 km/h. Mikä on lyhin mahdollinen aika, jonka hän tarvitsee postinhakumatkaan.



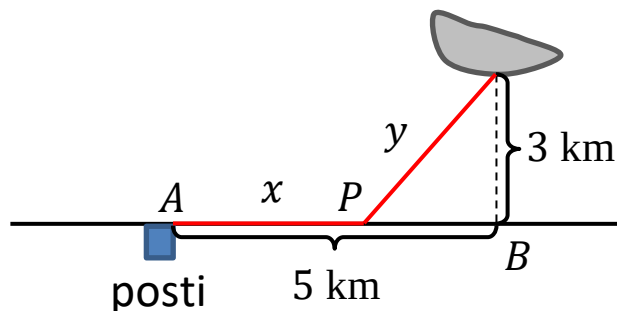
Hyvin oletettavaa on, että kalastajan täytyy sekä soutaa että kävellä, eli on olemassa piste P pisteiden A (vastaa postia) ja B (vastaa saarta lähinnä olevaa rannan kohtaa) välissä, johon kalastaja soutaa ja siitä lopputmatkan kävelee.

Merkitään x :llä ja y :llä etäisyyksiä kilometreinä (kuva),

jolloin käyttämällä fysiikan kaavaa $t = s/v$

saadaan aikafunktio (jätetään yksiköt pois)

$$t = t(x, y) = \frac{x}{5} + \frac{y}{4}, \quad 2 \text{ muuttujaa}$$



Havaitaan, että muodostuu suorakulmainen kolmio ja etäisyys y voidaan ilmoittaa x :n avulla. Siis

$$y = \sqrt{(5-x)^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 34}$$

$$\Rightarrow t = t(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 34}}{4}, \quad 1 \text{ muuttuja}$$

Osoittautuu, että $t = t(x)$ on hyvin määritelty kaikilla muuttujan x arvoilla. Nyt tosin voidaan (miksi?) rajoittaa tarkastelemaan väliä $x \in [0,5]$. Aikafunktio t on jva ja deriv., joten

$$\Rightarrow t'(x) = \frac{1}{5} + \frac{x-5}{4\sqrt{x^2-10x+34}} \Rightarrow t'(x) = 0 \stackrel{\text{laskin}}{\Leftrightarrow} x = 1.$$

Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa (muita mahdollisia ääriarvo-kohtia ei ole), saadaan

$$\begin{cases} t(0) = \frac{0}{5} + \frac{\sqrt{0^2 - 10 \cdot 0 + 34}}{4} = \frac{\sqrt{34}}{4} \approx 1,46 \\ t(1) = \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{1^2 - 10 \cdot 1 + 34}}{4} = \frac{1}{5} + \frac{5}{4} = 1\frac{9}{20} = 1,45 \\ t(5) = \frac{5}{5} + \frac{\sqrt{5^2 - 10 \cdot 5 + 34}}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4} = 1,75 \end{cases}$$

Näin ollen minimiaika yhteen suuntaan, 1h 27min, saavutetaan kun kävellään 1 kilometri. Kokonaisaika on siis kaksinkertainen, eli $2\frac{18}{20} = 2,9$ eli 2 h 54 min.

Vastaus: Postinhakumatka kestää yhteensä 2 h 54 min.

6. a) Osoita, että käyrät $y = x^2$ ja $y = -\frac{\log_2 x}{2}, x > 0$ leikkaavat toisensa ja määritä käyrien välinen kulma leikkauspisteessä asteen tarkkuudella. Perustele.

b) Ratkaise yhtälö $\log_x 4 = \log_6 x^2$. Perustele huolella, eli välivaiheet ja muut asiat (mitkä?).

a) Merkitään $y_1 = x^2$ ja $y_2 = -\frac{\log_2 x}{2}, x > 0$. Leikkauspisteessä pätee

$$y = y \Leftrightarrow x^2 = -\frac{\log_2 x}{2} \Rightarrow 2x^2 + \log_2 x = 0.$$

Tarkastellaan funktiota

$$f: f(x) = 2x^2 + \log_2 x, \quad x > 0,$$

joka on hyvin määritelty, jatkuva ja derivoituva kun $x > 0$. Saadaan

$$f'(x) = 4x + \frac{1}{\ln 2 \cdot x} > 0, \quad \forall x > 0.$$

Siis f on aidosti kasvava $\rightarrow$ korkeintaan yksi nollakohta. Toisaalta

$$\begin{cases} f(2^{-1}) = 2 \cdot (2^{-1})^2 + \log_2(2^{-1}) = \frac{2}{4} - 1 = -\frac{1}{2} < 0 \\ f(2) = 2 \cdot 2^2 + \log_2 2 = 8 + 1 = 9 > 0 \end{cases}$$

joten Bolzanon lauseen nojalla f :llä on ainakin yksi nollakohta välillä $]0,5 ; 2[$. Osoittautuu, että

$$f(x) = 2x^2 + \log_2 x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \stackrel{\text{laskin}}{\cong} 0,6035311 \dots$$

Näin ollen funktiolla f on täsmälleen yksi nollakohta ja vastaavalla yhtälöllä tasan yksi juuri. Siis käyrät leikkaavat toisensa.

Leikkauskulma: Käyrien derivaattoiksi saadaan

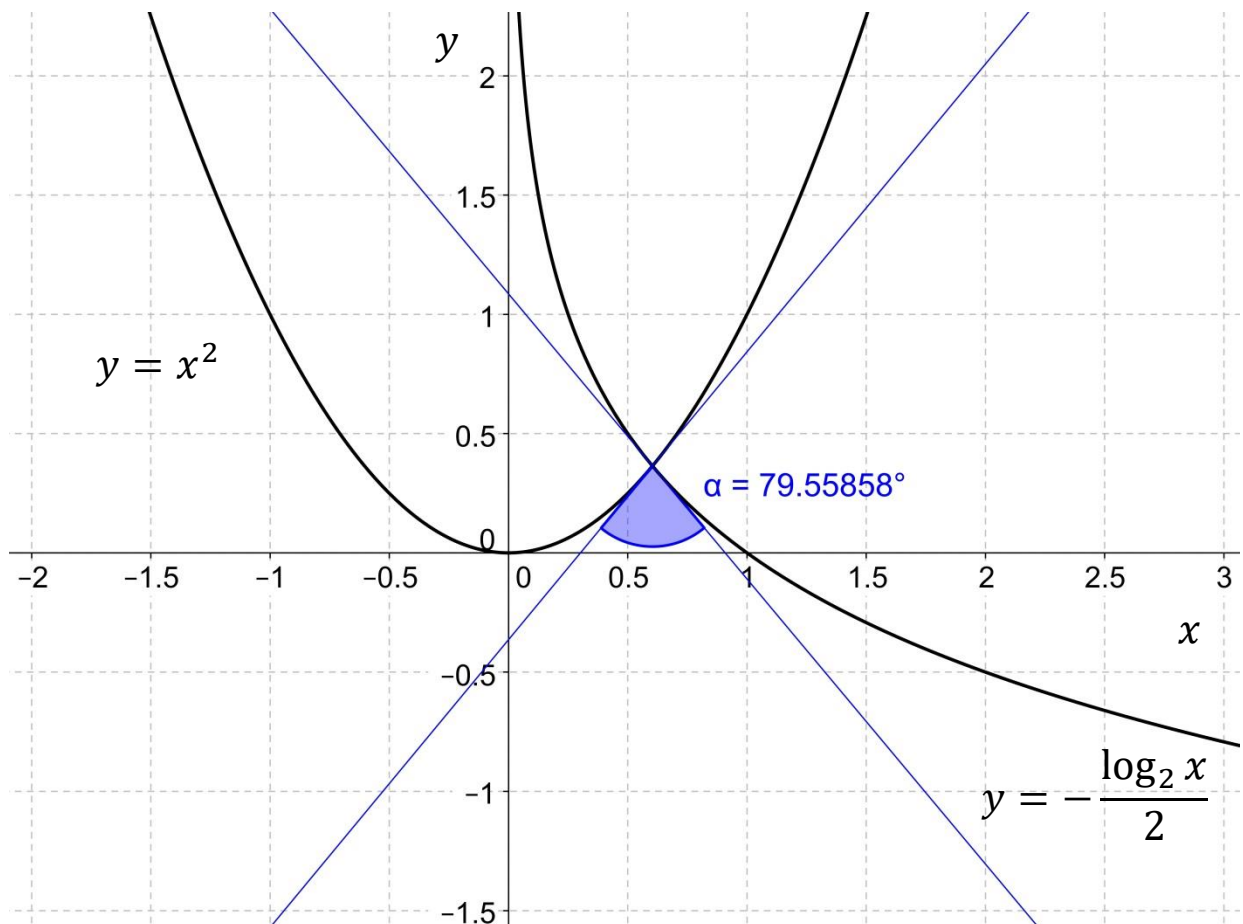
$$y_1'(x) = 2x, \quad y_2'(x) = -\frac{1}{2 \cdot \ln 2 \cdot x} = -\frac{1}{\ln 4 \cdot x}.$$

Näiden arvot kohdassa $x = 0,6035311 \dots$ on

$$y_1'(0,60 \dots) = 1,20706 \dots, \quad y_2'(0,60 \dots) = -1,19521 \dots$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| = \left| \frac{1,20706 \dots - (-1,19521 \dots)}{1 + (1,20706 \dots)(-1,19521 \dots)} \right| = 5,4264 \dots$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \approx 79,55858 \dots^\circ \approx 80^\circ$$



b) Määrittelyehdot ensin: Koska logaritmit, niin on pädeävä $x \neq 0$ (yhtälön oikealta puolelta) ja toisaalta $x > 0, x \neq 1$ (yhtälön vasemmalta puolelta). Siis: $x > 0$ ja $x \neq 1$. Ratkaisu

$$\log_x 4 = \log_6 x^2$$

$$\frac{\log_6 4}{\log_6 x} = \log_6 x^2, \quad \text{kantaluvun vaihto}$$

$$\log_6 4 = \log_6 x \cdot \underbrace{2 \cdot \log_6 x}_{= \log_6 x^2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \log_6 4 = (\log_6 x)^2, \quad \text{Huomaa sulut!}$$

$$\log_6 4^{1/2} = (\log_6 x)^2, \quad \text{kerroin } \frac{1}{2} \text{ eksponenttiin}$$

$$\log_6 2 = (\log_6 x)^2$$

$$\pm \sqrt{\log_6 2} = \log_6 x$$

$$x = 6^{\pm \sqrt{\log_6 2}}$$

Likiarvot: $6^{\sqrt{\log_6 2}} \approx 3,047\,828\,778$ ja $6^{-\sqrt{\log_6 2}} \approx 0,328\,102420$.

TAI Kohdasta $\frac{1}{2} \cdot \log_6 4 = (\log_6 x)^2$ jatkaa seuraavasti:

$$\frac{\ln 4}{2 \cdot \ln 6} = (\log_6 x)^2$$

$$\pm \sqrt{\frac{\ln 4}{2 \cdot \ln 6}} = \log_6 x$$

$$\pm \sqrt{\frac{\ln 4}{2 \cdot \ln 6}} = \frac{\ln x}{\ln 6}$$

$$\pm \sqrt{\frac{\ln 4}{2 \cdot \ln 6}} \cdot \ln 6 = \ln x$$

$$\pm \sqrt{\frac{\ln 4 \cdot \ln 6}{2}} = \ln x$$

$$x = e^{\pm \sqrt{\frac{\ln 4 \cdot \ln 6}{2}}}$$

7. Lääkeaineen pitoisuus puoliintuu elimistössä yksilöllisesti vaihdellen 15 – 18 tunnissa. Lääkityksen päätyttyä aineen voidaan katsoa poistuvan elimistöstä ajassa, joka on viisi kertaa puoliintumisaika. Kuinka monta prosenttia lääkeainetta on tuolloin vielä jäljellä? Kuinka monta tuntia lääkityksen jälkeen on odotettava, jotta 99 % lääkeaineesta on poistunut elimistöstä? [YO-s04/12]

Merkitään pitoisuutta m :llä ja puoliintumisaikaa $t_{1/2}$:lla. Tällöin viiden $t_{1/2}$:n jälkeen ainetta on jäljellä

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot m = \frac{1}{32} \cdot m \approx 0,03125 \cdot m,$$

eli noin 3,1 % alkuperäisestä.

Merkitään aikaa $x \cdot t_{1/2}$:lla, joka kuluu kun 99 % lääkeaineesta on poistunut. Tiedetään, että

$$15 < t_{1/2} < 18,$$

eli aika sidotaan puoliintumisaikaan. Näin ollen

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot m = 0,01 \cdot m \quad | : m \text{ ja } \log$$

Edelleen

$$x \cdot \log \frac{1}{2} = \log 0,01$$

$$x = \frac{\log 0,01}{\log 1/2} \approx 6,64385.$$

Koska $15 < t_{1/2} < 18$, niin $x \cdot 15 < x \cdot t_{1/2} < x \cdot 18$, josta seuraa

$$6,6438 \cdot 15 < x \cdot t_{1/2} < 6,6438 \cdot 18$$

$$99,65 < x \cdot t_{1/2} < 119,589$$

Siis, noin 100 tunnin ja 120 tunnin välillä.