

7.lk matematiikka

Geometria 2

Versio 2.8 (2025)
Janne Koponen

Geometria 2

Tämä moniste on tehty 7.lk. geometrian opetukseen ja olen käyttänyt sitä itse Hatanpään koulussa. Jos joku opettaja haluaa tätä kuitenkin käyttää omassa opetuksessaan, on se sallittua. Monisteen eteenpäin myyminen ja omiin nimiin ottaminen on kuitenkin kielletty.

Muokkaan ja korjailen monistetta omien tarpeideni mukaan ja julkaisen uusimman version (jos muutoksia tulee) osoitteessa:

<https://peda.net/p/joykop/mm>

Tämä moniste on suunniteltu siten, että oppilas tekee suurimman osan tehtävistä tähän monisteeseen. Osa tehtävistä on kuitenkin vihkotehtäviä.

Tämä moniste sisältää 7.lk. geometriasta noin yhden kolmanneksen eli moniste Geometria 1 sisältää alkuosan ja Geometria 3 sisältää loput. Arvioinnin kannalta näiden kolmen monisteen arvostelu on ollut kahden koealueen asiat, eli omassa arvostelussani huomioin jokaisen monisteen sisällöt 2/3 painotuksella verrattuna tyypilliseen koealueeseen. Tämä siis tiedoksi omille oppilailleni, joku muuhan voi arvioida toisenlaisella painotuksella.

Janne Koponen

Sisällys

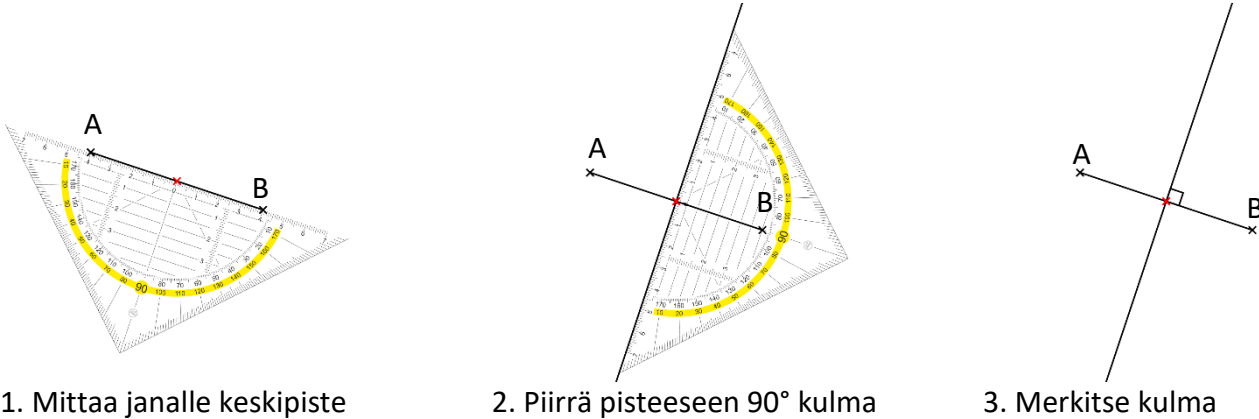
8.	Keskinormaali (kulmaviivaimella tai geometrisesti).....	4
9.	Kulman puolittaminen ja siirtäminen (myös geometrisesti).....	8
10.	Kolmion merkilliset pisteet	13
11.	Ympyrä	16
12.	Kehäkulma ja keskuskulma (Thaleen lause)	20
13.	Tangentti	24
14.	Tangenttikulma ja keskuskulma.....	26
15.	Kertaus 2	30
	Vastauksia	34

8. Keskinormaali (kulmaviivaimella tai geometrisesti)

Janan keskinormaali on suora, joka leikkaa janan sen keskipisteessä ja on suorassa kulmassa janaan nähden. Jokainen keskinormaalın pisteistä on yhtä kaukana janan päätepisteistä.

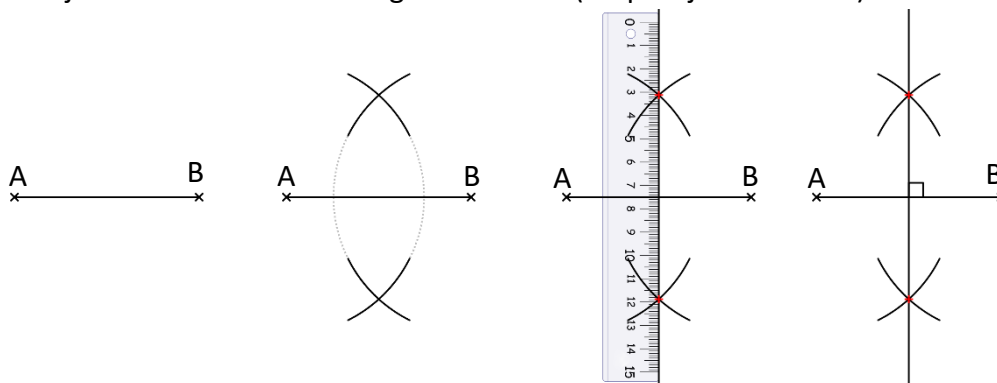
Esimerkki 1.

Piirretään janalle AB keskinormaali käyttäen piirtokolmiota.



Esimerkki 2.

Piirrä janalle AB keskinormaali geometrisesti (harpilla ja viivaimella)



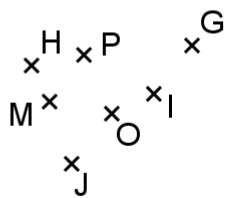
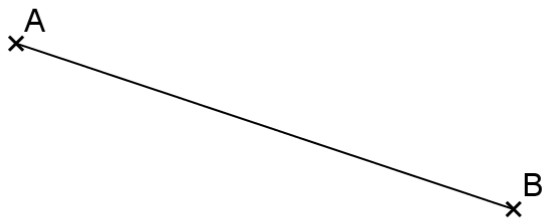
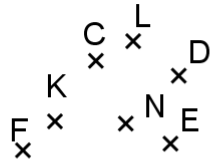
1. Aseta harpin kärkien väliin sopiva etäisyys. (Jonkun verran enemmän kuin puolet janan pituudesta.)
2. Piirrä harpilla lyhyet kaaren pätkät sekä pisteestä A että B siten, että ne leikkaavat molemmilla puolilla janaa kuvan mukaisesti. Kuvassa harmaalla näkyvät kaarenosat saa halutessaan piirtää, mutta niitä ei ole pakko piirtää.
3. Piirrä viivaimella suora, joka kulkee molempien leikkauspisteiden kautta (kuvassa pisteet punaisella).
4. Merkitse suorakulma.
5. Älä pyyhi pois apuviivoja.

Miksi harpilla piirtäminen toimii, vaikka mitään ei mitata? Harpilla piirretyn ympyräkaaren kaikki pisteet ovat aina yhtä etäällä ympyräkaaren keskipisteestä. Kun janan molempiin pätyihin piirretään ympyräkaaret (tai niiden osat), edustaa toinen kaari tasaetäisyyttä toisesta päästä ja toinen kaari toisesta päästä. Kaarien leikkauskohta onkin sellainen piste, joka on yhtä etäällä molemmista päistä. Näin saadaan selville kaksi suoran pistettä ja kahden pisteen avulla saa piirrettyä suoran.

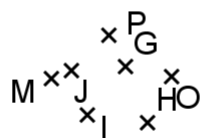
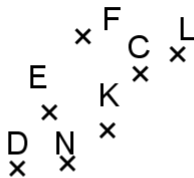
Tehtäviä

1. Piirrä janalle AB keskinormaali piirtokolmiolla.
Mihin pisteisiin se osuu?

a)

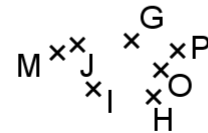
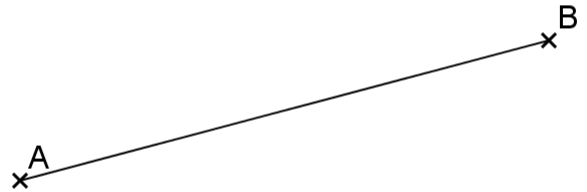
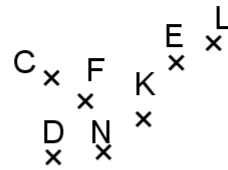


b)

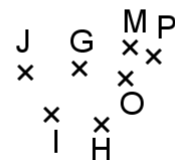
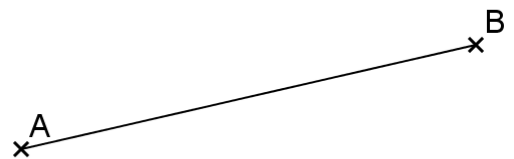
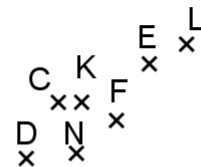


2. Piirrä janalle AB keskinormaali geometrisesti.
Mihin pisteisiin se osuu?

a)

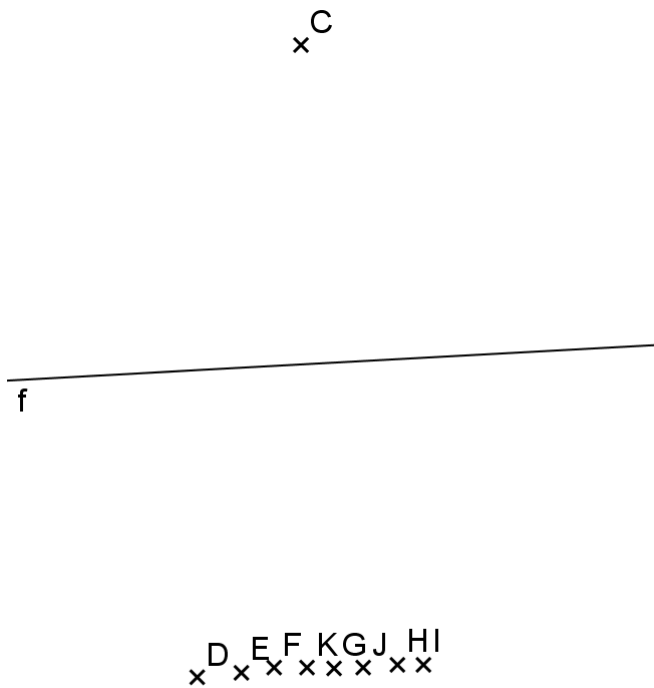


b)

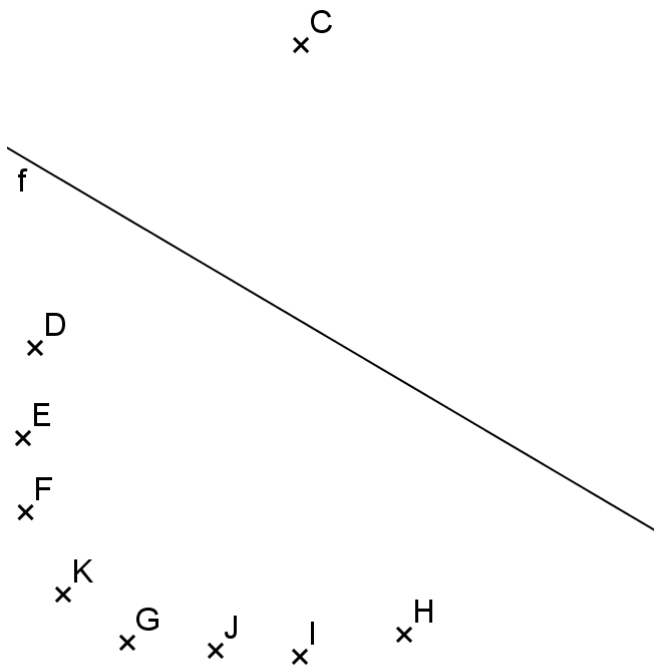


3. Piirrä suoralle f normaali pisteen C kautta. Mihin pisteeseen normaali osuu?

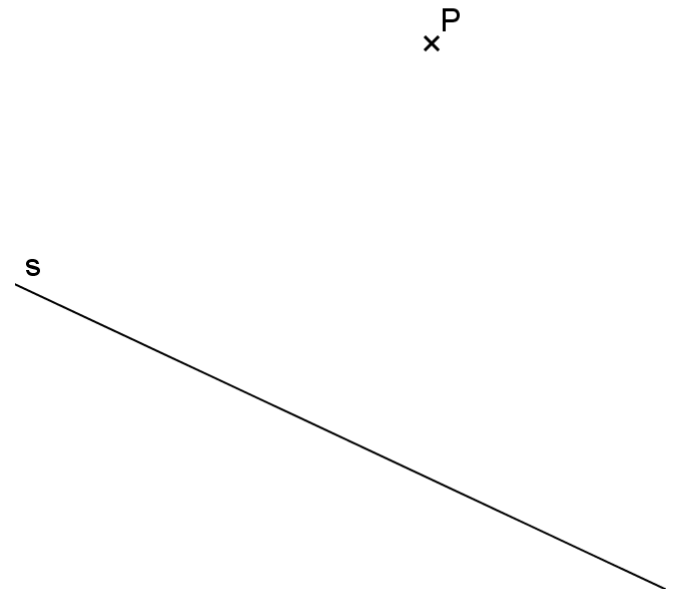
a)



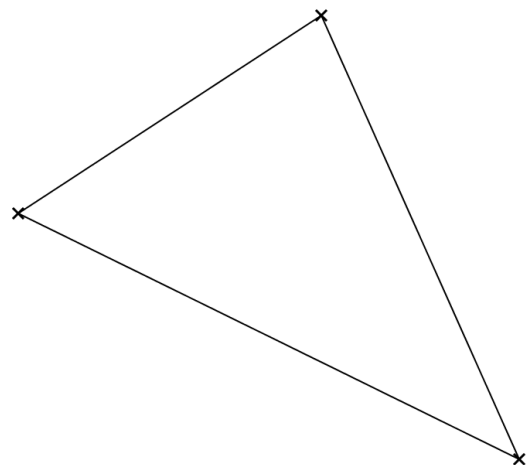
b)



4. Mittaa suoran s etäisyys pisteeseen P ?



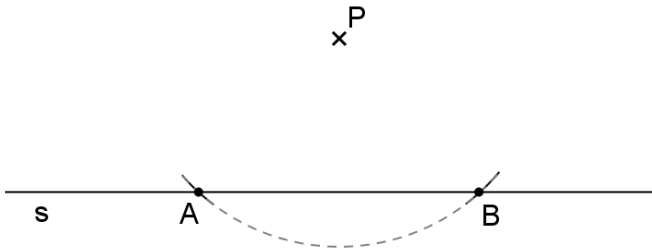
5. Piirrä kolmion jokaiselle sivulle keskinormaalit. Mitä huomaat?



6. Piirrä edellisen tehtävän kolmioon ympyrä, jonka kaari osuisi kolmion jokaiseen kärkipisteeseen. Ympyrän keskipiste on keskinormaalien leikkauspiste.

Geometria 2

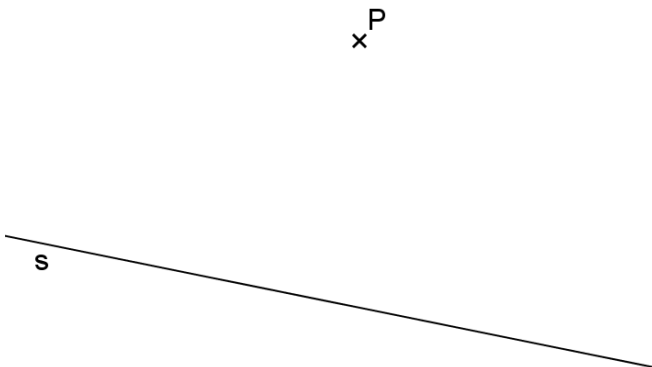
7. Piirrä geometrisesti suoralle s normaali, joka kulkee pisteen P kautta. Käytä apuna pisteitä A ja B



x x x x x x x
D E F K G J H I

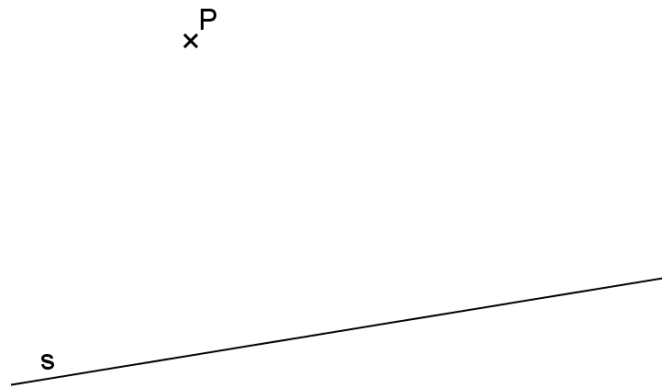
Edelliseen kuvaan oli harpilla piirretty pari apumerkkiä, joiden avulla saatiin pisteet A ja B . Seuraaviin tehtäviin pitää apumerkit piirtää itse.

8. Piirrä geometrisesti suoralle s normaali, joka kulkee pisteen P kautta.



x x x x x x x
D E F K G J H I

9. Piirrä geometrisesti suoralle s normaali, joka kulkee pisteen P kautta.



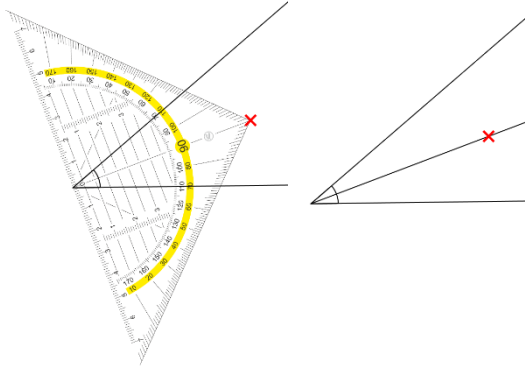
x x x x x x x
D E F K G J H I

9. Kulman puolittaminen ja siirtäminen (myös geometrisesti)

Esimerkki 1

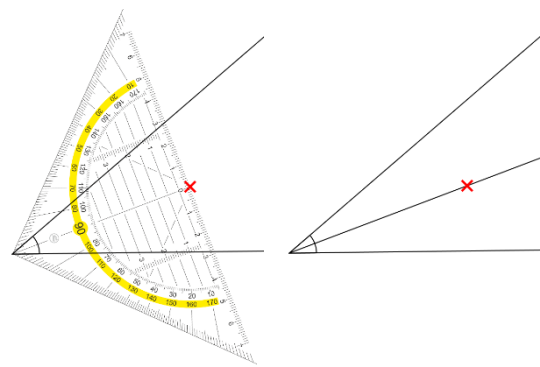
Puolitetaan kulma piirtokolmiolla. Piirtokolmion voi laittaa kahdella eri tavalla, mutta molemmissa on ideana saada keskelle kulmaa apumerkki, jonka kautta kulman puolittaja voidaan piirtää

Tapa1



1. Aseta piirtokolmion nolla kulman kärkeen.
2. Sääda molempiin kulma-asteikkoihin "samat" kulmalukemat
3. Laita apupiste kolmion kärkeen 90° kohdalle.
4. Piirrä kulman puolittaja.

Tapa2

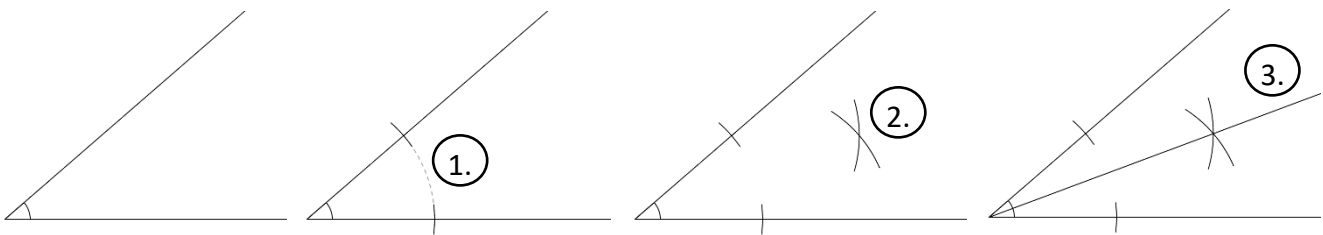


1. Aseta piirtokolmion 90° keskiviiva kolmion kärkeen
2. Sääda molempiin senttimetriasteikkoihin sama lukema.
3. Laita apupiste nollan kohdalle.
4. Piirrä kulman puolittaja.

Geometrisessa piirtämisessä kulmia ei mitata mitta-asteikoilla eikä viivoittimella mitata etäisyyksiä. Geometrisessä piirtämisessä etäisyyksiä "mitataan" harpilla ja viivoitinta käytetään vain suorien viivojen piirtämiseen.

Esimerkki 2.

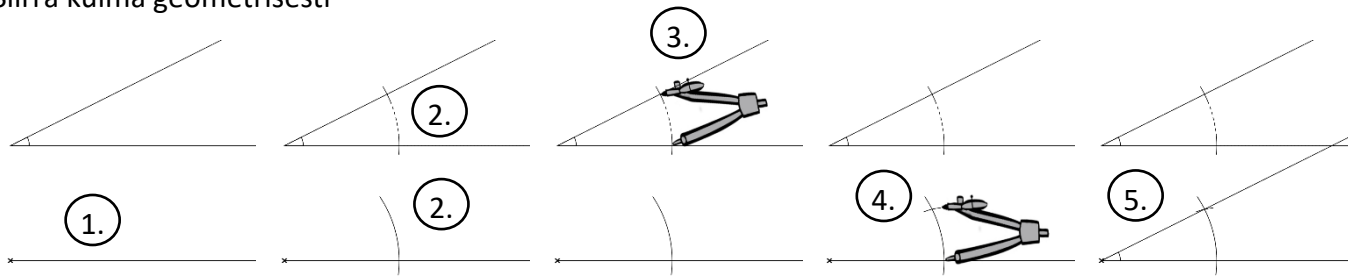
Puolita kulma geometrisesti



1. Piirrä kaari tai pienet kaarenpätkät, jolla saat molemmille kyljille apupisteet. Harpin etäisyys ei saa muuttua.
2. Piirrä molemmista apupisteistä kaksi kaarta, jotka menevät kulman puolivälin yli. Harpin etäisyys ei saa muuttua näissäkään. Silloin leikkauspiste on yhtä kaukana kulman molemmista kyljistä.
3. Piirrä leikkauspisteen kautta puolisuora. Nyt puolittaminen on valmis
4. Älä pyyhi apumerkintöjä pois. Ne ovat osoitus siitä, mitä välivaiheita olet käyttänyt.

Esimerkki 3.

Siirrä kulma geometrisesti

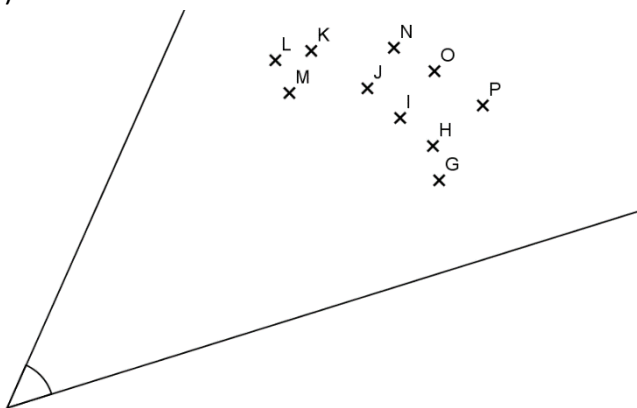


1. Piirrä oikea kylki
2. Piirrä sama kaari vanhaan kulmaan ja tulevaan kulmaan.
3. Aseta/säädä kylkien ja kaaren leikkauspisteiden etäisyys harppiin.
4. Piirrä mitatulla etäisyydellä merkkiviiva uuden kulman kaareen.
5. Piirrä uuden kulman vasen kylki ja merkitse kulma.
6. Älä pyyhi apumerkintöjä pois.

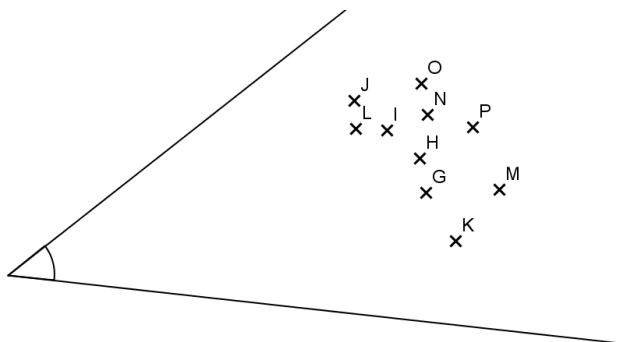
Tehtäviä

1. Piirrä kulmalle puolittaja piirtokolmion avulla.
Mihin pisteeseen se osuu?

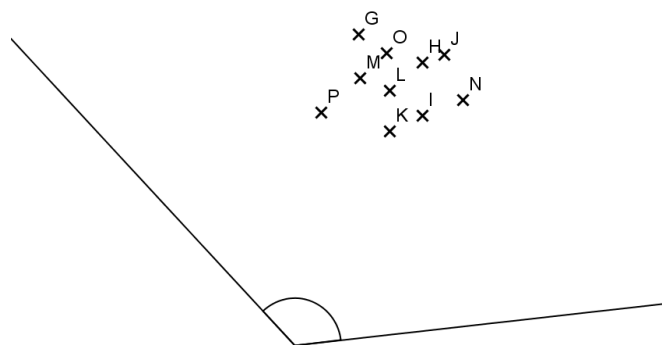
a)



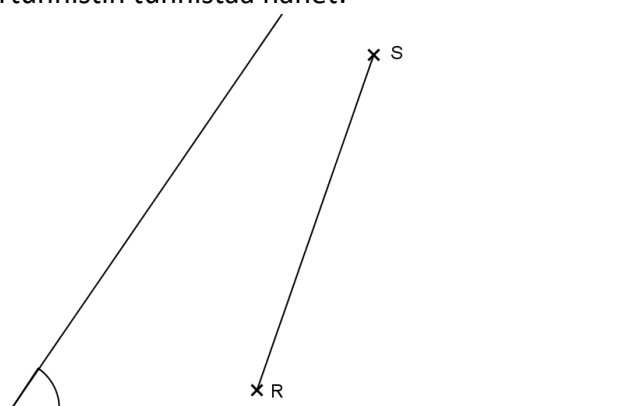
b)



c)

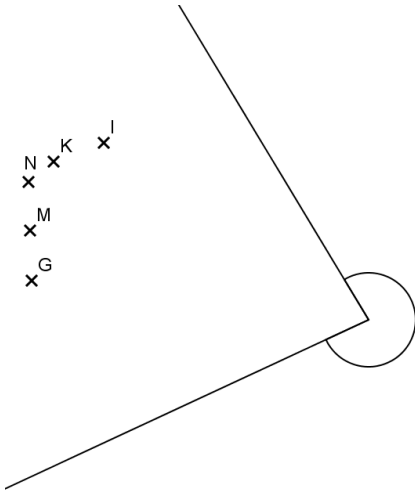


2. Mikke muurahainen juoksee pisteestä R suoraan pisteeseen S. Kuinka pitkälle Mikke pääsee ennen kuin kulman keskelle osoittava lasertunnistin tunnistaa hänet.

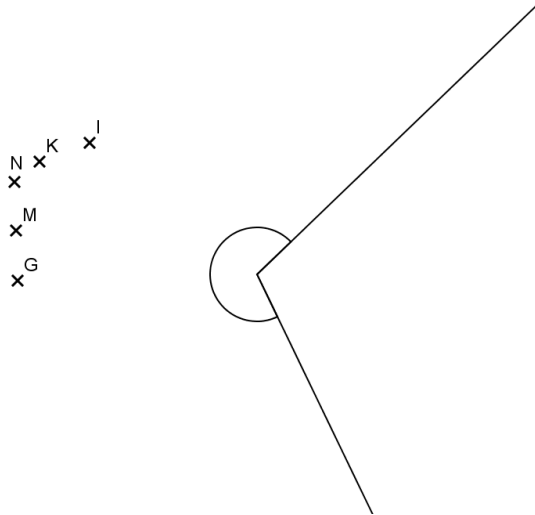


3. Piirrä kulmalle puolittaja piirtokolmion avulla.
Mihin pisteeseen se osuu?

a)



b)

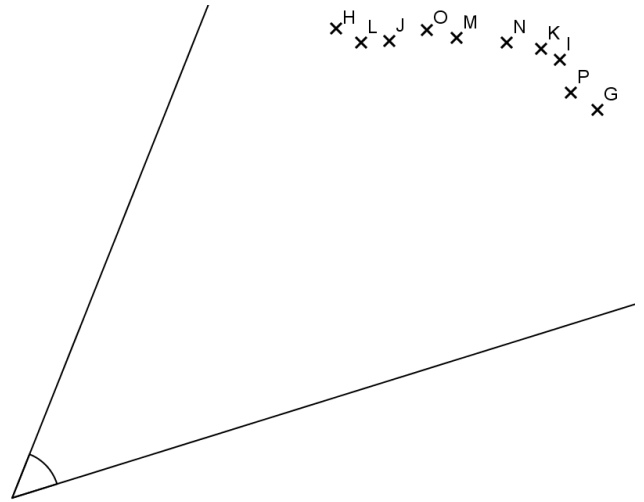


x^J x^O x^P x^L x^H

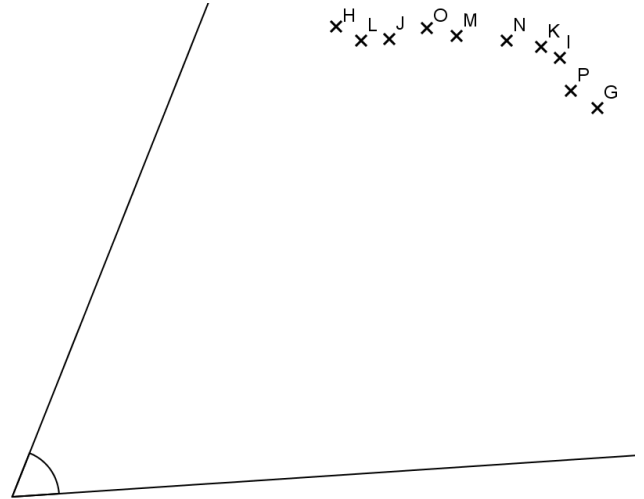
x^J x^O x^P x^L x^H

4. Piirrä kulmalle puolittaja **geometrisesti**. Mihin pisteeseen puolittaja osuu?

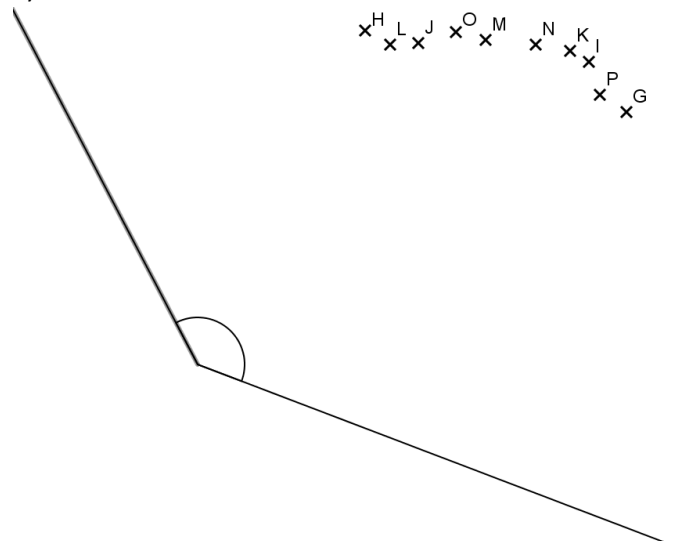
a)



b)



c)



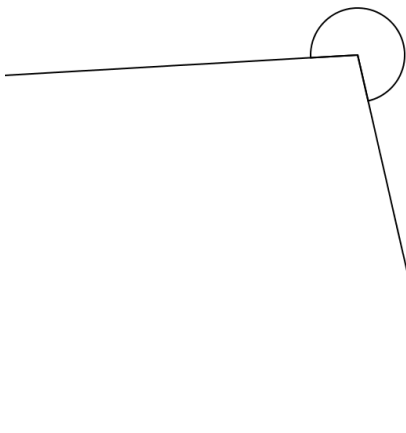
x^H x^L x^J x^O x^M x^N x^K x^I x^P x^G

5. Piirrä kulmalle puolittaja **geometrisesti**. Mihin pisteeseen puolittaja osuu?

Lisähaaste. Pystytkö tekemään homman ilman apumerkintöjä pienemmän kulman puolelle?

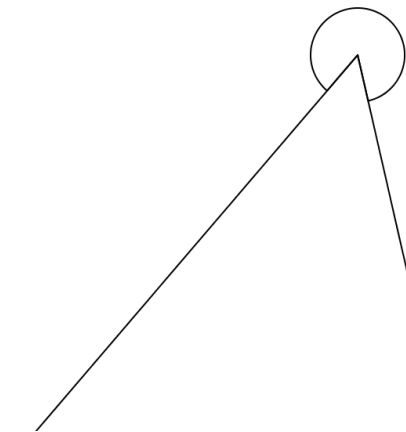
a)

x^H x^L x^J x^O x^M x^N x^K x^I x^P x^G



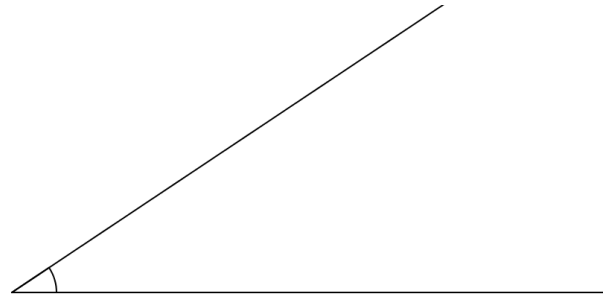
b)

x^H x^L x^J x^O x^M x^N x^K x^I x^P x^G



6. Siirrä kulma geometrisesti piirtämällä kulman alapuolelle. Mihin pisteeseen vasen kylki osuu?

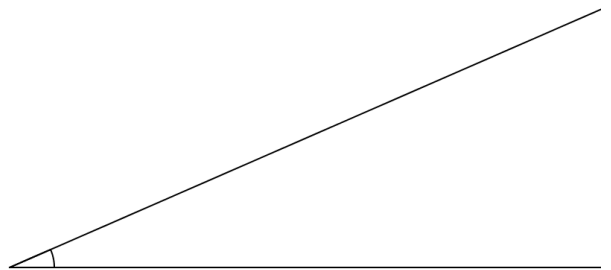
a)



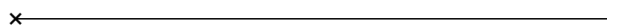
x^L x^K x^J x^N x^M x^O x^I x^P x^H x^G



b)

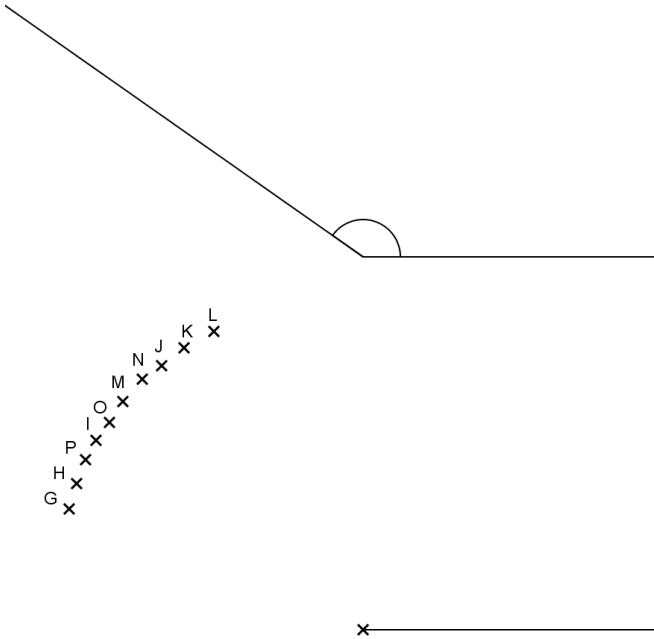


x^L x^K x^J x^N x^M x^O x^I x^P x^H x^G

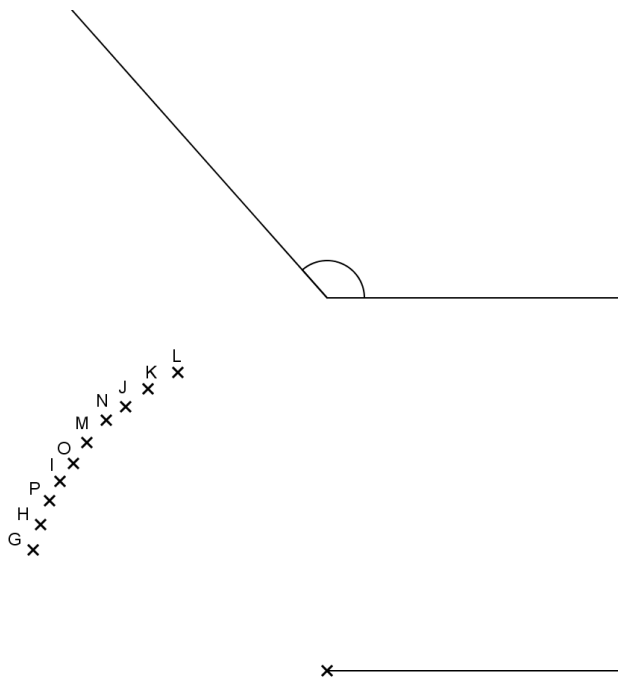


7. Siirrä kulma geometrisesti piirtämällä kulman alapuolelle. Mihin pisteeseen vasen kylki osuu?

a)



b)

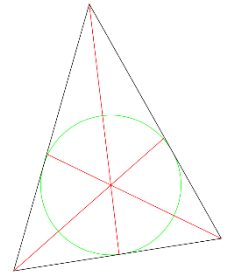


10. Kolmion merkilliset pisteet

Kolmiolla on neljä niin kutsuttua ”merkillistä pistettä”:

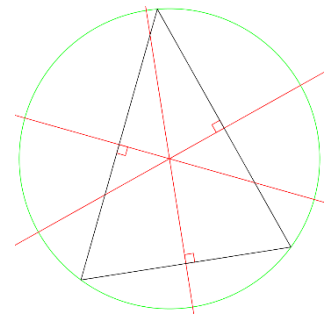
1. Kun kolmion kaikki kolme kulmaa puolitetaan, leikkaavat puolittajat samassa pisteessä. Tällä pisteellä on erikoisominaisuuksia:

- Se on yhtä kaukana kaikista kolmion sivuista.
- Se on keskipiste ympyrälle, joka on suurin kolmion sisään mahtuva ympyrä.



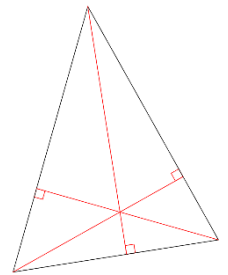
2. Kun piirretään kolmion kaikki keskinormaalit, leikkaavat ne samassa pisteessä. Tälläkin pisteellä on erikoisominaisuus:

- Tämä piste on keskipiste sellaiselle ympyrälle, joka osuu kolmion kaikkiin kolmeen kulmaan.
- Leikkauspiste voi sijaita myös kolmion ulkopuolella.



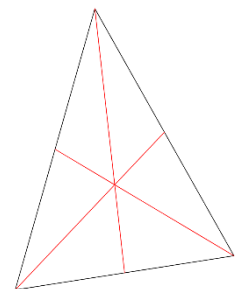
3. Kun piirretään kolmiolle sen kaikki kolme korkeusjanaa, leikkaavat nekin toisensa samassa pisteessä. Tälle ei esitellä nyt mitään erikoisominaisuuksia. Tämä on vain mielenkiintoinen tieto.

- Leikkauspiste voi sijaita myös kolmion ulkopuolella.



4. Kun piirretään kolmiolle sen kaikki kolme mediaania eli keskijanaa, leikkaavat nekin toisensa samassa pisteessä. Tällä pisteellä on myös erikoisominaisuus:

- Mediaanien leikkauspiste on myös kolmion painopiste.

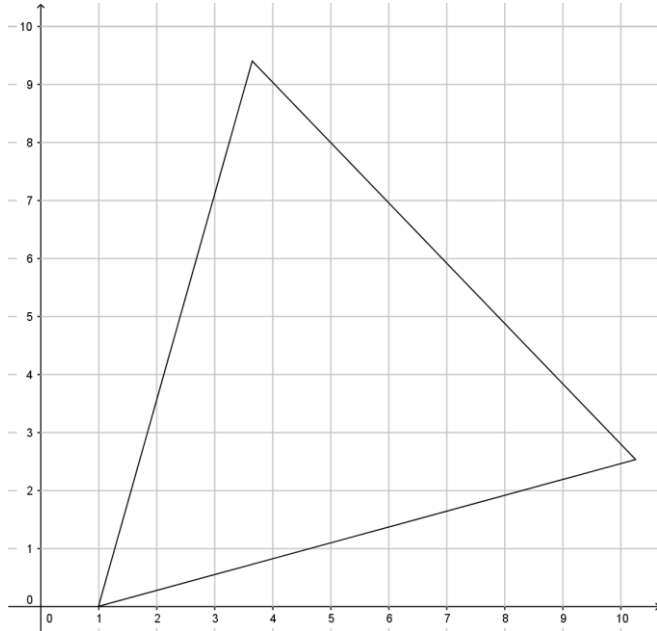


Ja vielä tiedoksi, mikä on kolmion mediaani eli keskijana. Se on kolmion sivun keskeltä vastakkaiseen kulmaan piirretty jana.

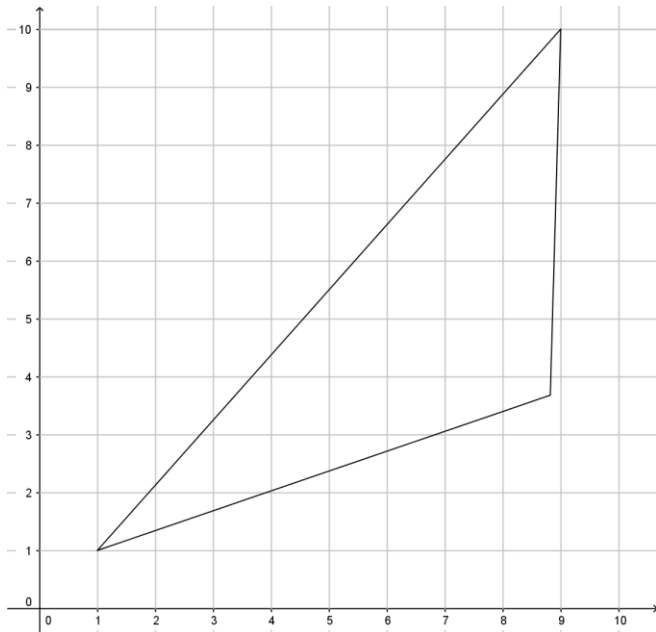
Esimerkiksi viereisessä kuvassa on piirretty kolmiolle yksi keskijanoista.



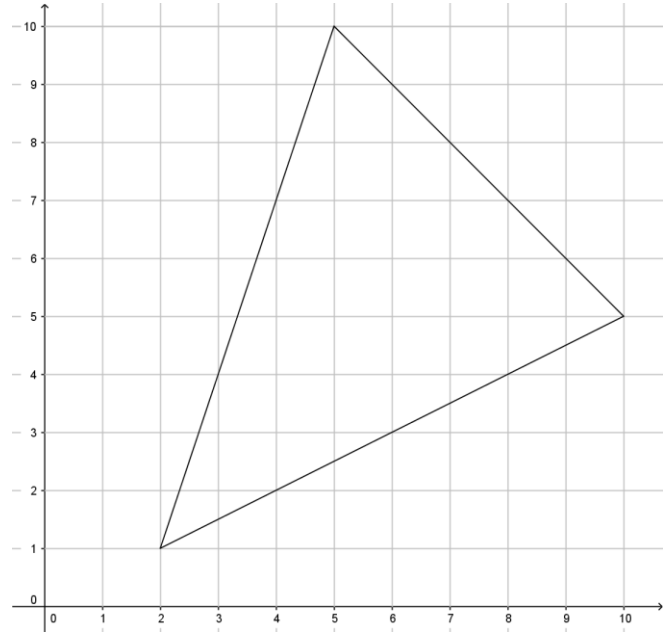
1. a) Piirrä kolmion jokaiseen kulmaan kulman puolittajat.
- b) Missä pisteessä puolittajat leikkaavat toisensa.
- c) Piirrä mahdollisimman suuri ympyrä, joka mahtuu kolmion sisään.



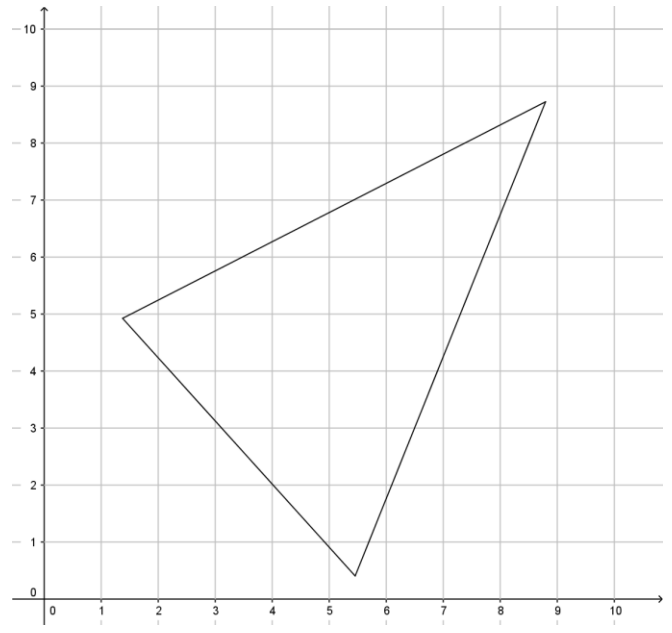
2. a) Piirrä kolmion jokaiseen kulmaan kulman puolittajat.
- b) Missä pisteessä puolittajat leikkaavat toisensa.
- c) Piirrä mahdollisimman suuri ympyrä, joka mahtuu kolmion sisään.



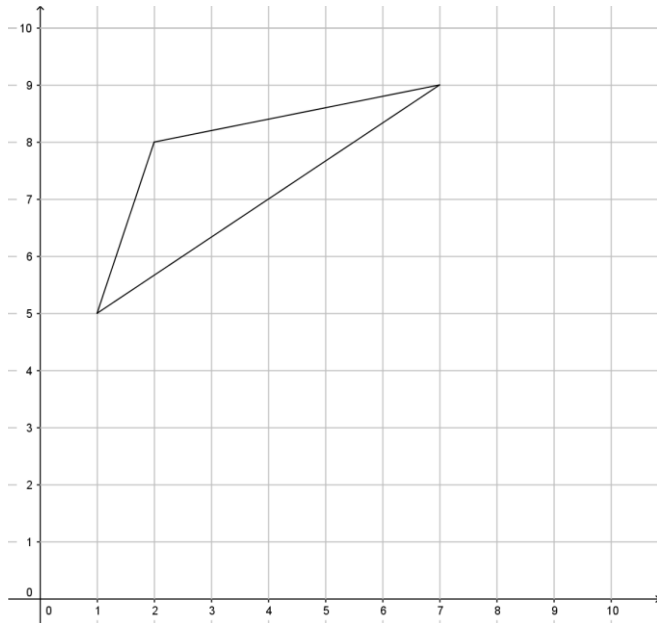
3. a) Piirrä kolmion jokaiselle sivulle keskinormaali.
- b) Missä pisteessä keskinormaalit leikkaavat toisensa.
- c) Piirrä ympyrä, jonka reuna osuu kolmion kaikkiin kärkiin.



4. a) Piirrä kolmion jokaiselle sivulle keskinormaali.
- b) Missä pisteessä keskinormaalit leikkaavat toisensa.
- c) Piirrä ympyrä, jonka reuna osuu kolmion kaikkiin kärkiin.

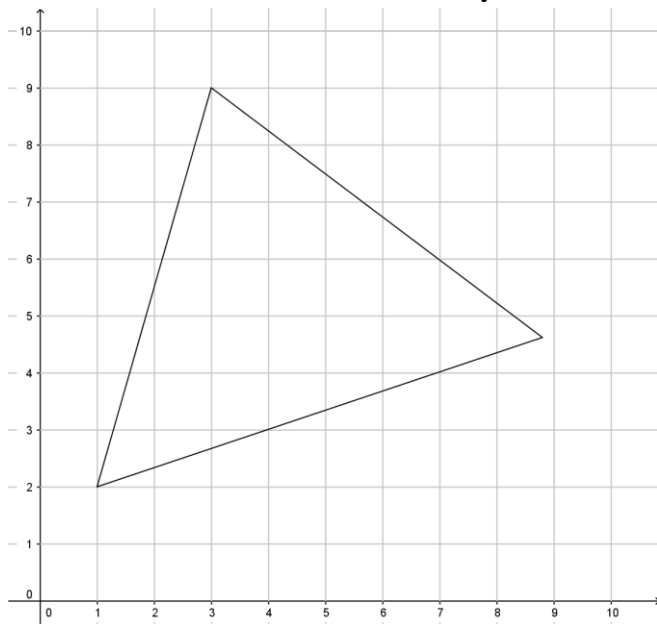


5. Piirrä ympyrä, jonka reuna osuu kolmion kaikkiin kärkiin. (Tee kuten tehtävissä 3 ja 4.)

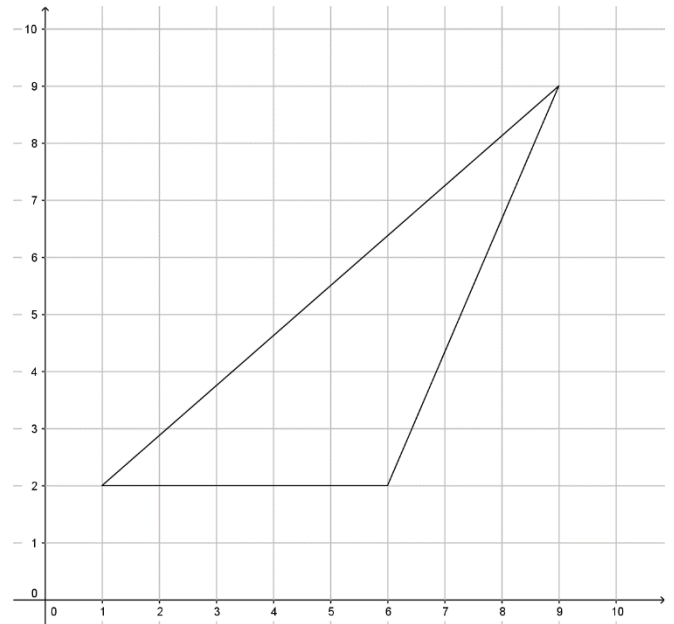


Huomasitko mitään ihmeellistä?

6. Piirrä kolmiolle kaikki kolme korkeusjanaa.

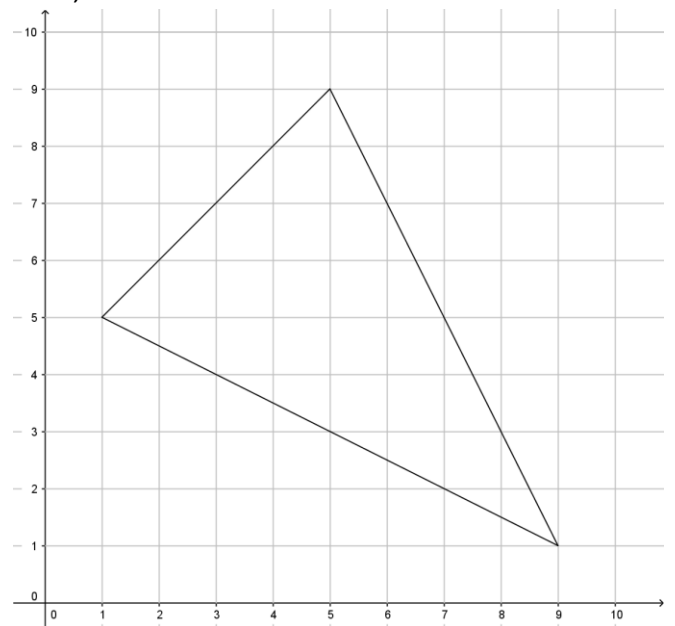


7. Piirrä kolmiolle kaikki kolme korkeusjanaa.



Huomaatko mitään outoa?

8. Piirrä kolmiolle kaikki kolme mediaania. Tarkista, missä ne leikkaavat toisensa.



9. Leikkaa irtopaperista tai pahvista kolmio. Piirrä sille kaikki kolme mediaania. Tee leikkauskoh- taan reikä ja kokeile, mikä kohta kolmiosta painuu alaspäin. Mitä voit tästä päätellä?

11. Ympyrä

Ympyrään kuuluvat ne tason pisteet, jotka ovat täsmälleen samalla etäisyydellä (r) keskipisteestä (O).

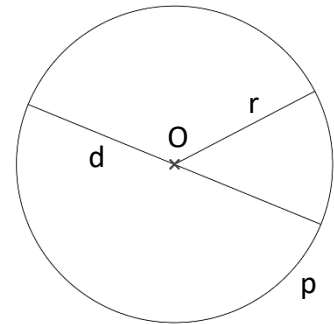
Tärkeimmät ympyrän osat ja niiden kirjainlyhenteet:

O = ympyrän keskipiste - Kirjain vaihtelee, usein O tai P , mutta voi olla muukin.
 - O tulee sanasta origo.

r = ympyrän säde - Jana keskipisteestä reunaan
 - Matka keskipisteestä reunaan
 - Kirjain tulee englannin sanasta radius

d = ympyrän halkaisija - Jana reunasta reunaan keskipisteen kautta
 - Matka reunasta reunaan keskipisteen kautta
 - Kirjain tulee englannin sanasta diameter.

p = ympyrän kehä - Ympyräviiva
 - Matka ympyrän ympäri
 - Kirjain tulee suomenkielen sanasta piiri.



Ympyrän halkaisija koostuu kahdesta säteestä, joten luonnollisesti halkaisija on kaksi kertaa niin suuri kuin säde. Näiden välillä pätee siis laskukaavat:

$$d = 2r \quad \text{ja toisin päin} \quad r = \frac{d}{2}$$

Ekstra (kasiluokan asiaa lisätietoa janoaville)

Ympyrän kehän pituus on vähän yli kolme kertaa niin suuri kuin halkaisija. Tätä suhdelukua merkitään kreikkalaisella aakkosella pii eli π . Pii on päättymätön ja jaksoton desimaaliluku, sen likiarvo on 3.1415926535897932...

$$p = \pi d \quad \text{tai säteen avulla} \quad = 2\pi r$$

Nämä opetellaan sitten kasiluokalla.

Muita ympyrään liittyviä käsitteitä

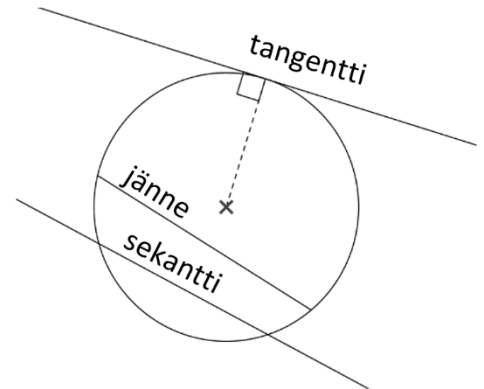
Suoria ja janoja

Tangentti on suora, joka juuri ja juuri osuu suoraan, mutta ei mene sen sisälle. Se osuu ympyrään vain yhdessä pisteessä. Kyseisestä pisteestä piirretty säde on kohtisuorassa tangentin kanssa.

Jänne on jana, jonka molemmat päätepisteet ovat ympyrän kehällä. Halkaisija on jänteen erikoistapaus.

Sekantti on suora, joka menee ympyrän lävitse.

Yksi edellä mainituista on tärkein. Arvaa mikä? _____



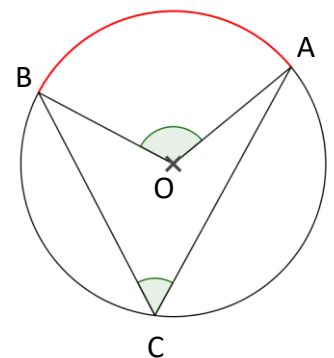
Ympyrään liittyviä kulmia

Keskuskulmaksi kutsutaan kulmaa, jonka kärkipiste on ympyrän keskipiste. Kulman kyljet leikkaavat ympyrän kaaren ja näiden leikkauspisteiden avulla keskuskulma yleensä nimetään. Viereisessä kuvassa merkitty keskuskulma on $\sphericalangle AOB$.

Keskuskulmaa vastaava kaari on se kaaren osa, joka rajoittuu kulman kylkien sisäpuolelle. Viereisessä kuvassa punaisena.

Kehäkulman kärkipiste on ympyrän kehällä ja sen kyljet leikkaavat ympyrän kehän. Eli kulma on ympyrän sisällä. Yleensä kehäkulmaa verrataan vastaavista leikkauspisteistä piirrettävään keskuskulmaan. Viereisessä kuvassa kulma $\sphericalangle ACB$ on keskuskulmaa $\sphericalangle AOB$ vastaava kehäkulma.

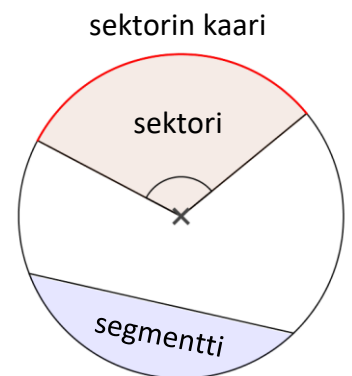
Kehäkulman ja keskuskulman suuruuksien välillä vallitsee outo yhteys. Kehäkulma on aina puolet vastaavasta keskuskulmasta. Tähän palataan myöhemmin.



Ympyrään liittyviä alueita

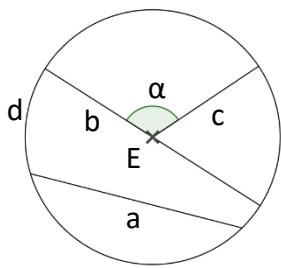
Saktori on keskuskulman ympyrästä rajaama alue. Pitsaslaissit ovat sektoreita. Saktori on siis viereisen kuvan punertava alue. Punaista viivaa sanotaan sektorin kaareksi.

Segmentti on jänteen tai muun suoran viivan ympyrästä erottama alue.



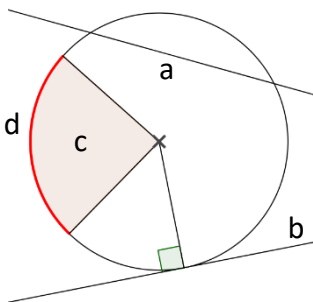
Tehtäviä

1. Nimeä kuvassa näkyvät ympyrän osat.



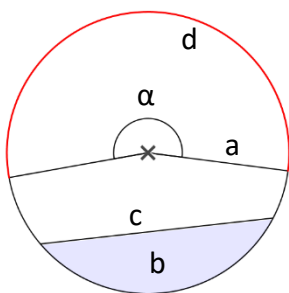
a =
b =
c =
d =
E =
 α =

2. Nimeä kuvassa näkyvät ympyrän osat.



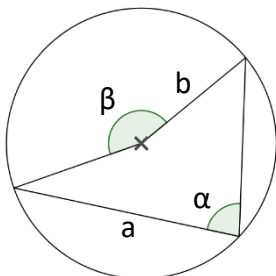
a =
b =
c =
d =

3. Nimeä kuvassa näkyvät ympyrän osat.



a =
b =
c =
d =
 α =

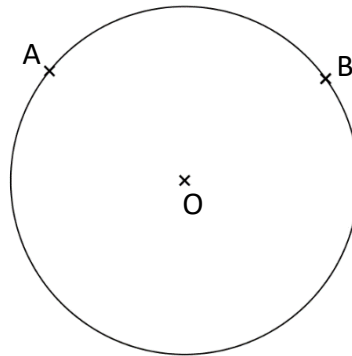
4. Nimeä kuvassa näkyvät ympyrän osat.



a =
b =
 α =
 β =

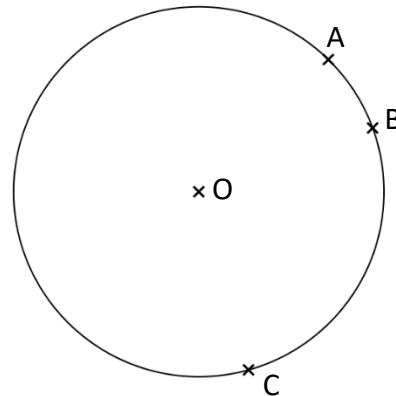
5. Piirrä ja nimeä ympyrälle seuraavat osat:

- Säde r pisteeseen A
- Halkaisija d, joka osuu pisteeseen B
- Keskuskulma $\alpha = \angle BOA$



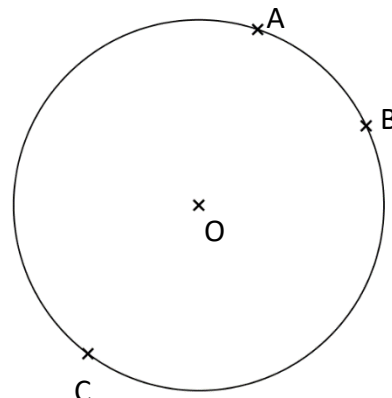
6. Piirrä ja nimeä seuraavat osat:

- jänne a = BC
- säde r pisteeseen A
- Keskuskulma $\alpha = \angle AOB$

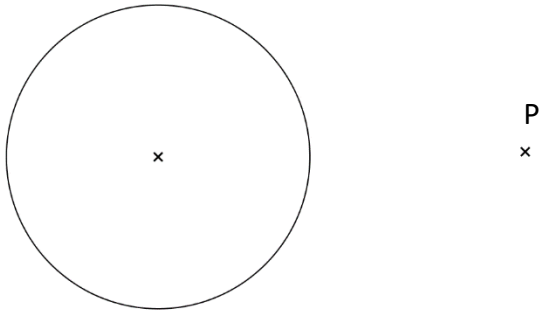


7. Piirrä ja nimeä seuraavat osat:

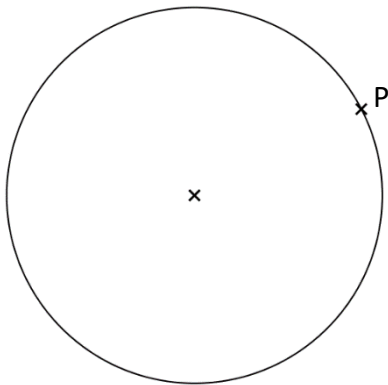
- Jänne a = AC
- Halkaisija d, jonka toinen pää on piste B
- Sektori BA (väritä, ei tarvitse nimetä)



8. Piirrä ympyrälle kaksi tangenttia, jotka kulkevat pisteen P kautta.



9. Piirrä ympyrälle
a) säde pisteeseen P,
b) tangentti pisteeseen P.
c) Kuinka iso kulma muodostui säteen ja tangentin väliin?



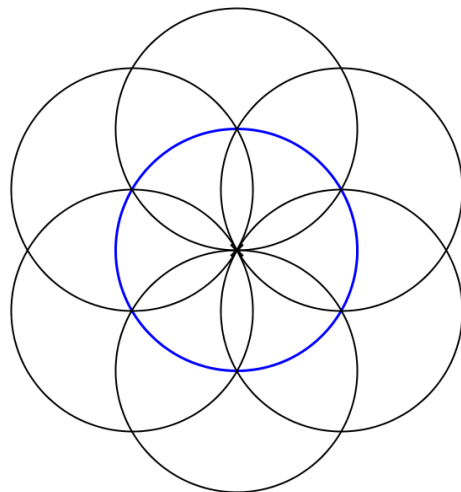
10. Piirrä ympyrä, jonka keskipiste on O ja säde on 3,0 cm. Piirrä ympyrälle myös halkaisija ja mittaa se.

O
x

11. Piirrä ympyrä, jonka keskipiste on O ja halkaisija 3,0 cm. Piirrä ympyrälle
a) Sektori, kulma 100° (aukeaa ylöspäin)
b) Kulma, jonka kärki on ympyrän alaosassa ja kyljet osuvat ympyrän kaareen samoissa pisteissä kuin a-kohdan kulman kyljet.
c) Mittaa ja merkitse b-kohdan kulman suuruus.

x
O

12. Piirrä harpilla **erilliselle paperilla** mukaisia kuvia. Pidä harpin mitta koko ajan samana.
a) Piirrä ensin yksi ympyrä. (kuvassa sininen)
b) Merkitse kehältä yksi piste ja piirrä toinen ympyrä samalla säteellä.
c) Käytä uuden ympyrän ja ensimmäisen ympyrän leikkauspisteitä seuraavan ympyrän keskipisteenä ja piirrä tätä toistaen yhteensä kuusi ympyrään alkuperäisen ympyrän kehälle.



Väritä ja kokeile muita vastaavia kuvioita.

13. Piirrä ympyrä merkitsemättä keskipistettä. Kokeile selvittää keskipiste jälkikäteen?

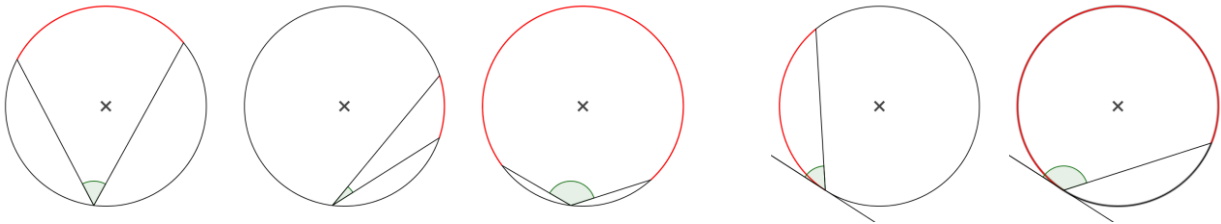
12. Kehäkulma ja keskuskulma (Thaleen lause)

Aikaisemmin olemme käyneet läpi, kehäkulman ja sitä vastaavan keskuskulman summittaisesti. Tiettyjen erikoistapausten vuoksi on kuitenkin hyvä käydä perusteellisemmin läpi, miten kehäkulma ja sitä vastaava keskuskulma määritellään.

Kehäkulma

Kehäkulman kärki on ympyrän kehällä ja sen molemmat kyljet ovat ympyrän jäniteitä. Erikoistapauksena hyväksytään kulma, jonka toinen kylki on ympyrän tangentti ja toinen jänne.

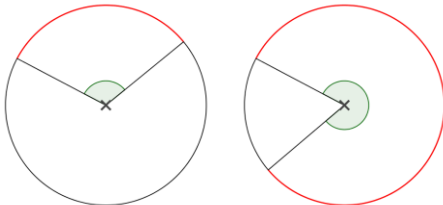
Kehäkulmaa vastaava kaari on se ympyrän kaaren osa, joka jää kulman kylkien väliin.



Keskuskulma

Keskuskulman kärki on ympyrän keskipiste ja sen kyljet ovat säteitä.

Keskuskulmaa vastaava kaari on se ympyrän kaaren osa, joka jää kulman sisäpuolelle.



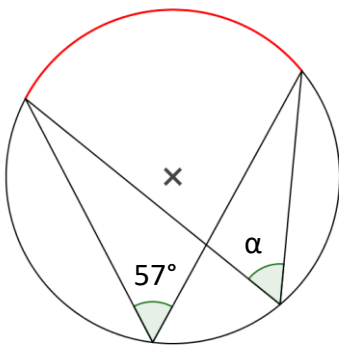
Jos kulmilla on samat vastaavat kaaret, voidaan niiden suuruuksista sanoa seuraavaa:

Lause 1.

Jos kahdella kehäkulmalla on vastaavat kaaret, ovat ne yhtä suuria

Esimerkki 1.

Ratkaise oheisesta kuviosta α .



Kehäkulmat leikkaavat ympyrän kehän samoissa pisteissä, eli niillä on vastaavat kaari. Kulmat ovat siis yhtä suuria.

$$\alpha = 57^\circ \quad \text{Vastaavat kehäkulmat}$$

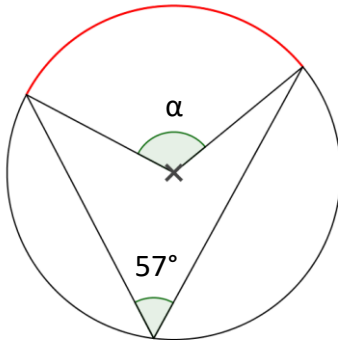
Sanallinen perustelu
"Vastaavat kehäkulmat"
tarvitaan, koska mitään
laskua ei ole.

Lause 2.

Jos keskuskulmalla ja kehäkulmalla on vastaavat kaaret, on kehäkulma puolet keskuskulman suuruudesta.

Esimerkki 2.

Ratkaise oheisesta kuvasta α .



Keskuskulmalla ja kehäkulmalla on yhteiset leikkauspisteet ympyrän kehällä, eli niillä on vastaavat kaaret.

$$\alpha = 2 \cdot 57^\circ = 114^\circ$$

Edelliselle lauseelle löytyy eräs erikoistapaus, jolle on annettu jopa nimi

Lause 3. Thaleen lause

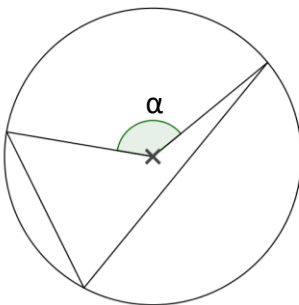
Jos keskuskulma on 180° , on kehäkulma suorakulma.

Ja toisinpäin.

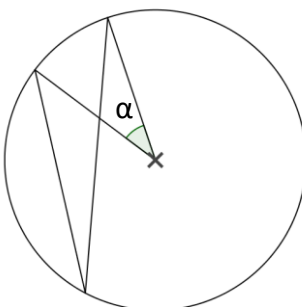
Jos kehäkulma on suorakulma, on keskuskulma 180° .

Tehtäviä

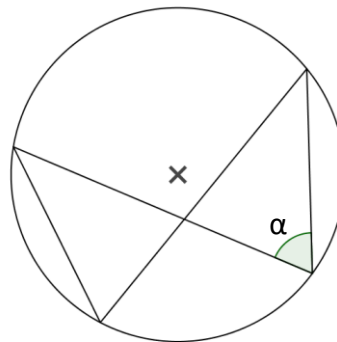
1. Merkitse kuvioon ne kulmat, joilla on vastaava kaari kuin kulmalla α .



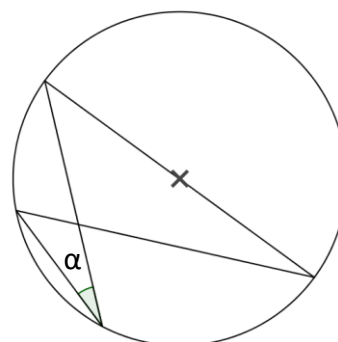
2. Merkitse kuvioon ne kulmat, joilla on vastaava kaari kuin kulmalla α .



3. Merkitse kuvioon ne kulmat, joilla on vastaava kaari kuin kulmalla α .

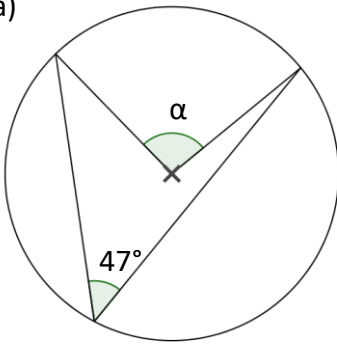


4. Merkitse kuvioon ne kulmat, joilla on vastaava kaari kuin kulmalla α .

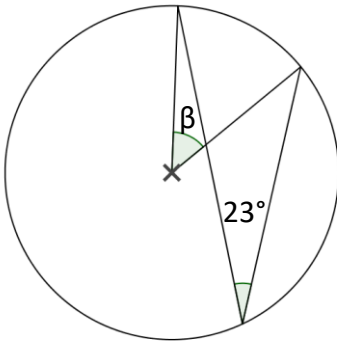


5. Ratkaise tuntemattomat kulmat. Perustelee sa-
nallisesti tai merkitse laskut.

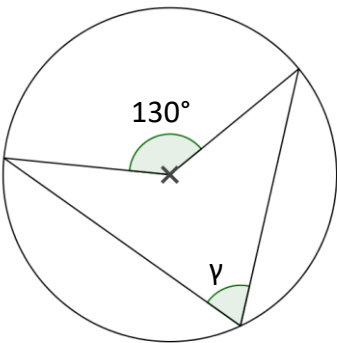
a)



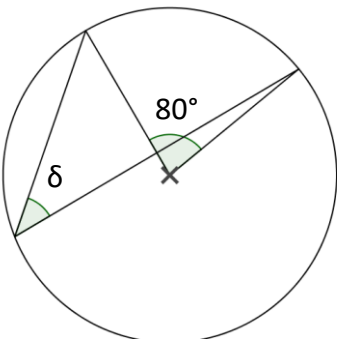
b)



c)

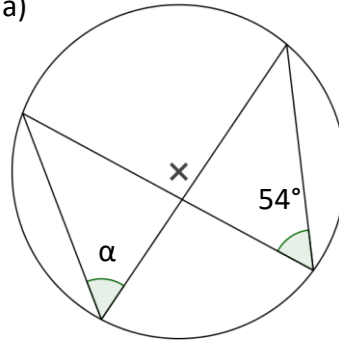


d)

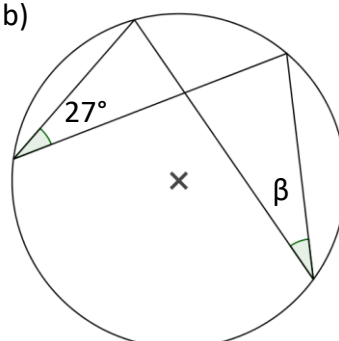


6. Ratkaise tuntemattomat kulmat. Perustelee sa-
nallisesti tai merkitse laskut.

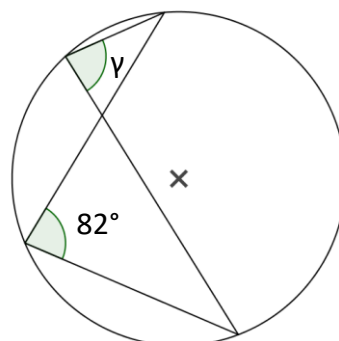
a)



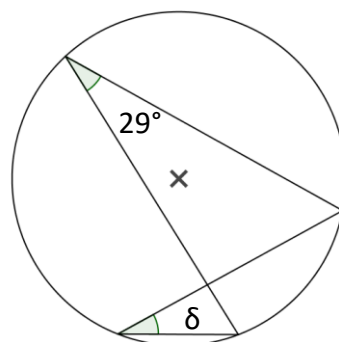
b)



c)

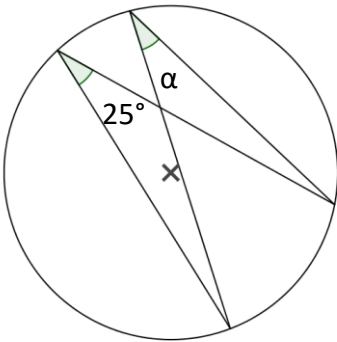


d)

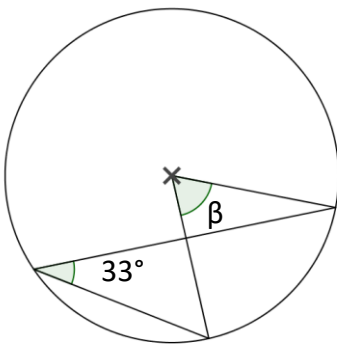


7. Ratkaise tuntemattomat kulmat. Perustelee sa-
nallisesti tai merkitse laskut.

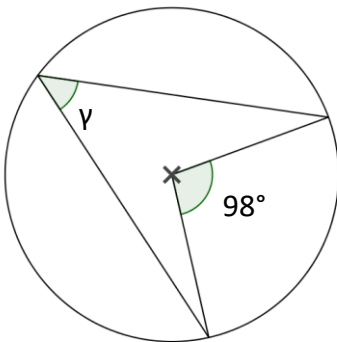
a)



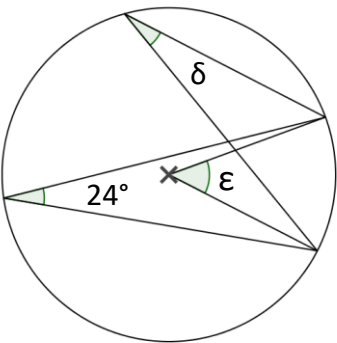
b)



c)

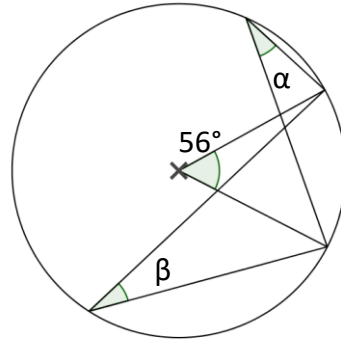


d)

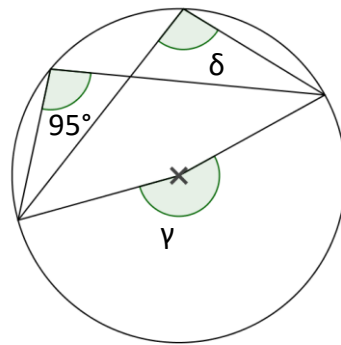


8. Ratkaise tuntemattomat kulmat. Perustelee sa-
nallisesti tai merkitse laskut.

a)

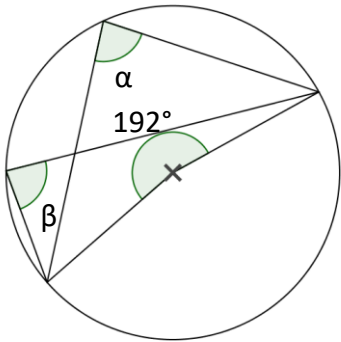


b)

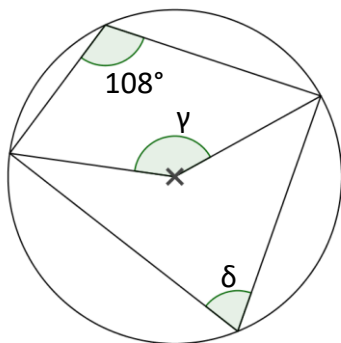


9. Ratkaise tuntemattomat kulmat. Perustelee sa-
nallisesti tai merkitse laskut.

a)



b)

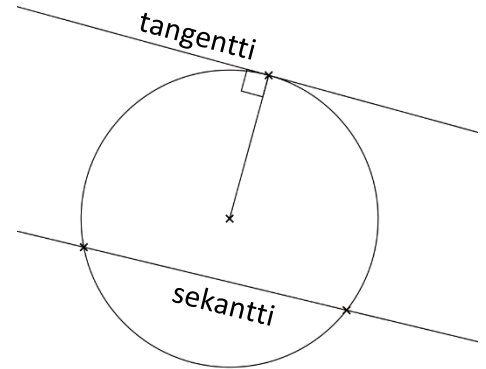


13. Tangentti

Tangentti on suora, joka sivuaa viivaa yhdessä pisteessä ja on samansuuntainen viivan kanssa ainakin tässä yhdessä pisteessä. Tangentti voidaan piirtää siis monelle muullekin käyrälle kuin ympyrälle, mutta tässä käsittelemme nimenomaan ympyrän tangenttia.

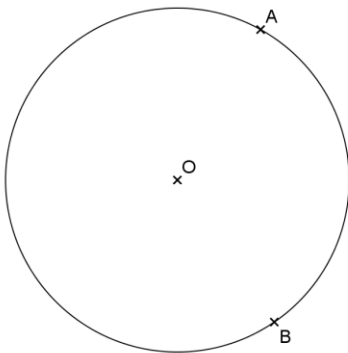
Ympyrän tangentti:

- Tangentilla ja ympyrällä on tasan yksi yhteinen piste.
 - Tangentti ei siis mene ympyrän sisälle yhtään. Jos se menisi, olisi sillä kaksi yhteistä pistettä ympyrän kanssa ja se olisi sekantti.
- Tangentti ja sen sivuamispisteeseen piirretty säde ovat aina kohtisuorassa toisiinsa nähden.
 - Tätä kannattaa käyttää apuna, kun piirtää tangenttia ympyrän kehällä olevaan pisteeseen.
- Ympyrälle voidaan piirtää tasan kaksi tangenttia jokaisen ympyrän ulkopuolisen pisteen kautta.



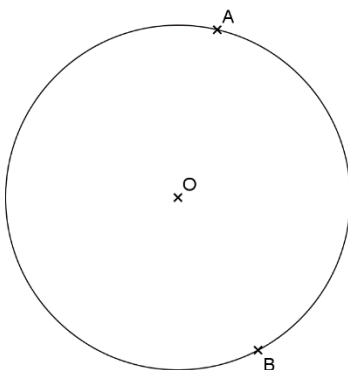
Tehtäviä

1. Piirrä ympyrälle O tangentit pisteisiin A ja B.
Mihin tarkistuspisteisiin ne osuvat?



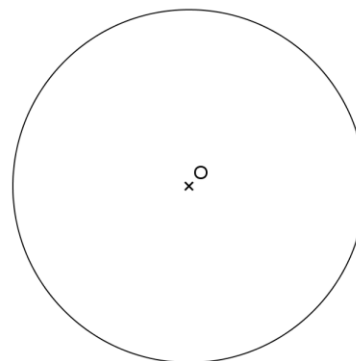
x D
x E
x F
x G
x H
x I
x J
x K

2. Piirrä ympyrälle O tangentit pisteisiin A ja B.
Mihin tarkistuspisteisiin ne osuvat?



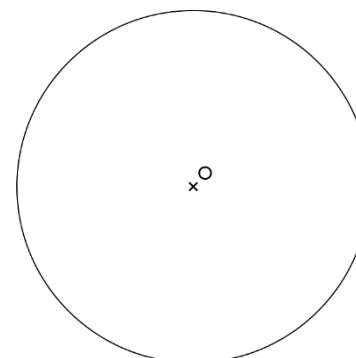
x D
x E
x F
x G
x H
x I
x J
x K

3. Piirrä ympyrälle O tangentit pisteen P kautta.
Mihin tarkistuspisteisiin ne osuvat?



P
x
x D
x E
x F
x G
x H
x I
x J
x K

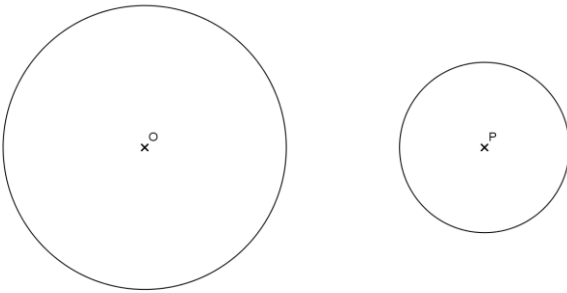
4. Piirrä ympyrälle O tangentit pisteen P kautta.
Mihin tarkistuspisteisiin ne osuvat?



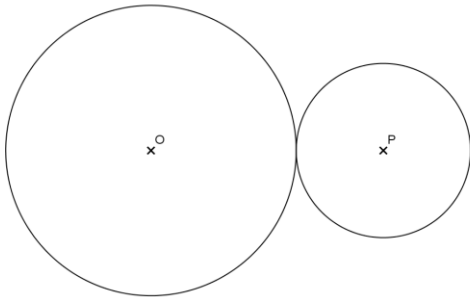
P
x
x D
x E
x F
x G
x H
x I
x J
x K

5. Piirrä ympyröille O ja P yhteiset tangentit

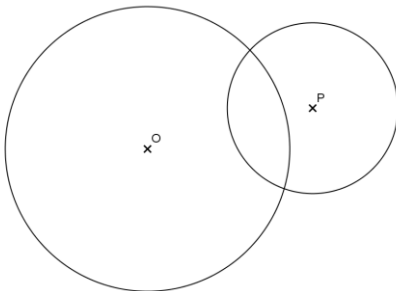
a)



b)

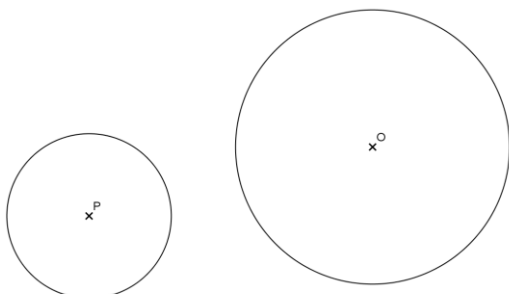


c)

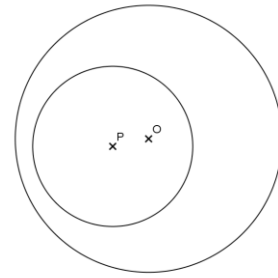


6. Piirrä ympyröille O ja P yhteiset tangentit

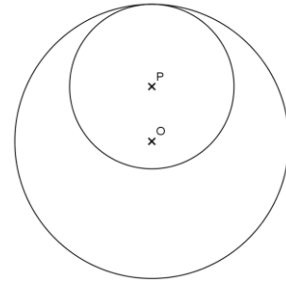
a)



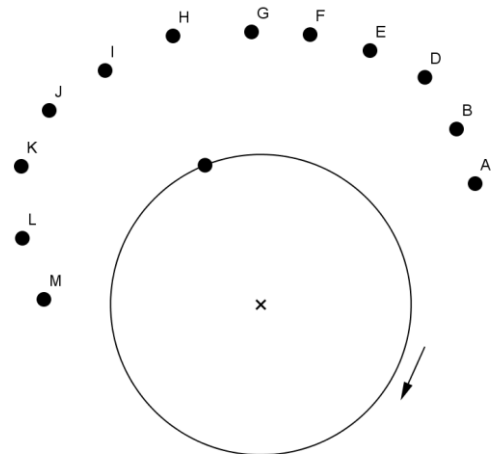
b)



c)



7. Venla on karusellissa ja kaverit ovat asettuneet karusellin viereen. Kehen kaveriin Venla osuu, jos hän päästää irti kuvan hetkellä. Nuoli osoittaa karusellin pyörimissuuntaan.



8. Pohdi ja kokeile, miten pystyisit piirtämään ympyrälle tangentin ympyrän kehällä olevaan pisteeseen A geometrisesti. Eli kulmaviivainta ei saa käyttää kulman mittaamiseen. Tapoja on monia, keksi ainakin kaksi. Tee testit vihkoosi tai muulle erilliselle paperille.

14. Tangenttikulma ja keskuskulma

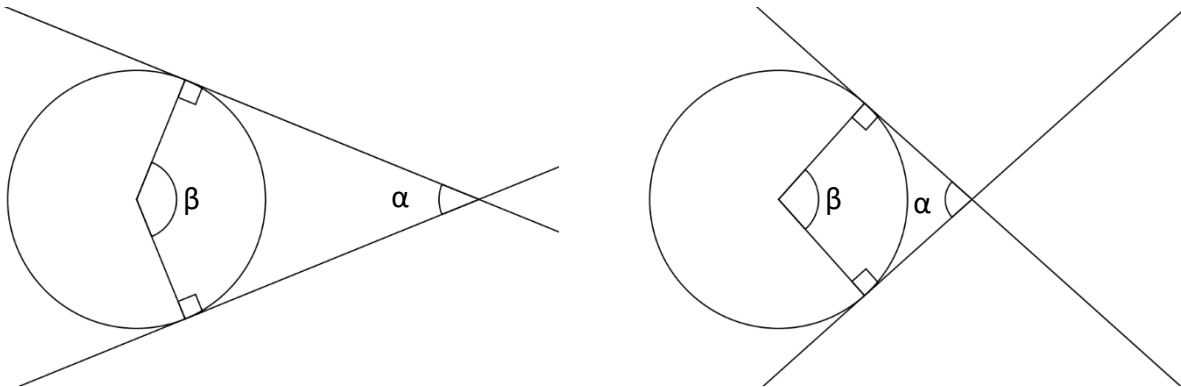
Tangenttikulma:

Tangenttikulma on kulma, jonka molemmat kyljet ovat ympyrän tangentteja.

Tangenttikulmaa vastaava keskuskulma:

Tangenttikulmaa vastaava keskuskulma on se ympyrän keskuskulma, jonka kyljet osuvat tangentin leikkauspisteisiin ja joka avautuu kohti tangenttien leikkauskohtaa.

Alla olevissa kuvissa α on tangenttikulma ja β sitä vastaava keskuskulma



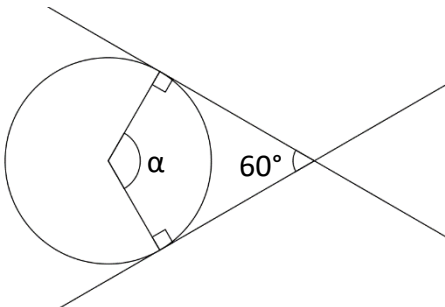
Lause

Tangenttikulman ja sitä vastaavan keskuskulman astelukujen summa on aina 180°

Tätä lausetta käytetään apuna seuraavissa esimerkeissä

Esimerkki 1

Määritä kulman α suuruus

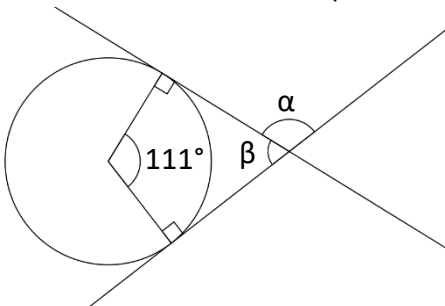


Tangenttikulma ja sitä vastaava keskuskulma, joten

$$\alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Esimerkki 2

Määritä kulman α suuruus (kuvaan merkitty β on apumerkintä.)



Ensin ratkaistaan kulma β

$$\beta = 180^\circ - 111^\circ = 69^\circ$$

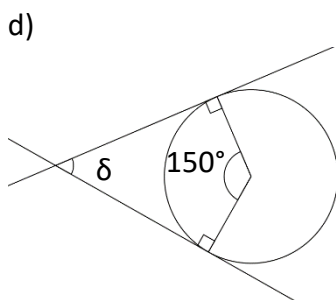
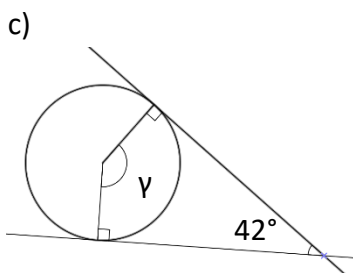
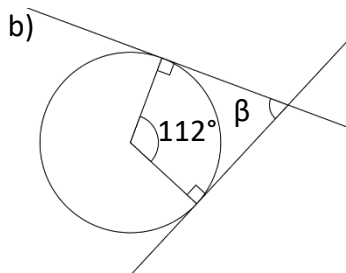
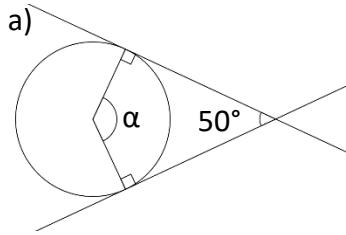
Koska β ja α ovat vieruskulmia, saadaan α laskulla

$$\alpha = 180^\circ - 69^\circ = 111^\circ$$

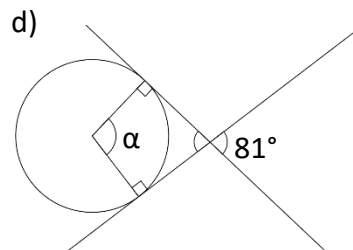
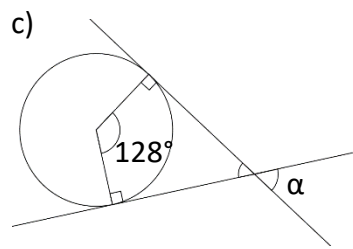
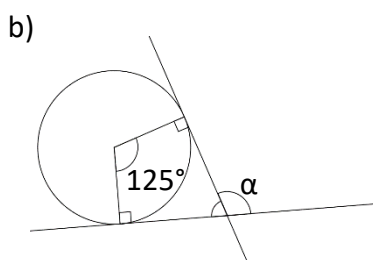
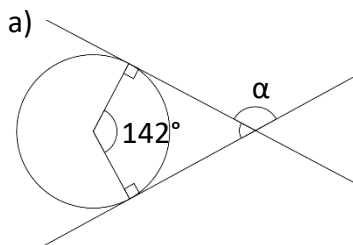
Tehtäviä

Perustele vastauksesi joko sanallisesti tai laskuin.

1. Ratkaise tuntemattomat kulmat.

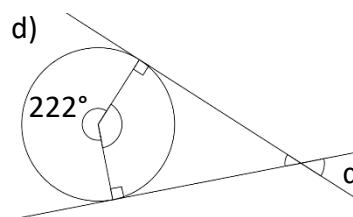
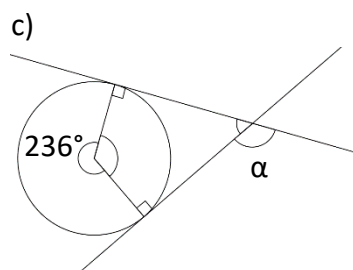
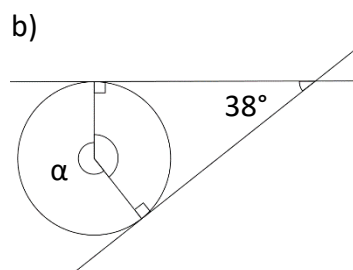
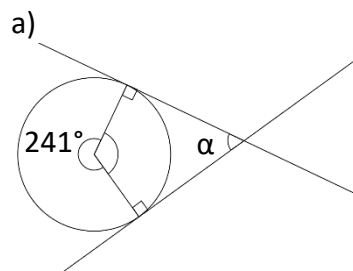


2. Ratkaise kulma α . Merkitse itse apumerkin.

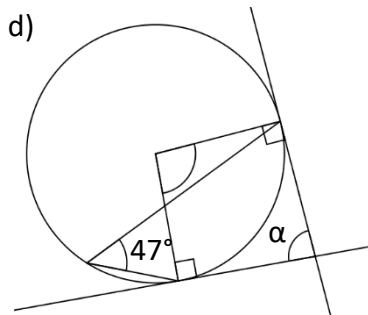
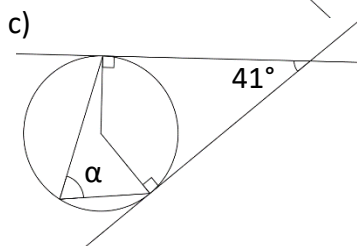
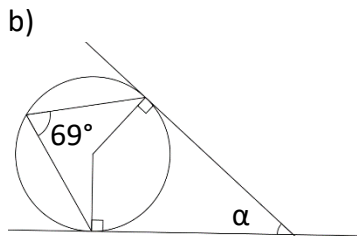
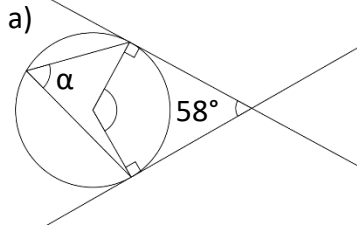


Seuraavissa tehtävissä ei enää käsketä itse merkitsemään apumerkintöjä, mutta tarvittaessa niitä pitää käyttää ja ne pitää itse merkitä kuvaan.

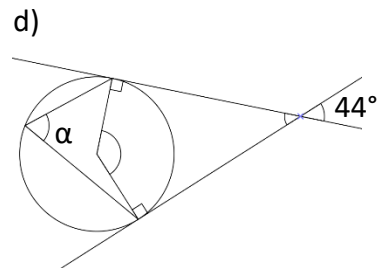
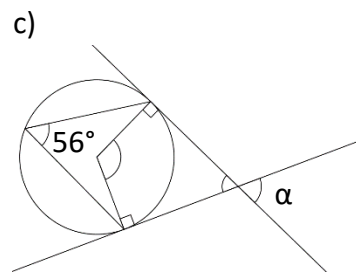
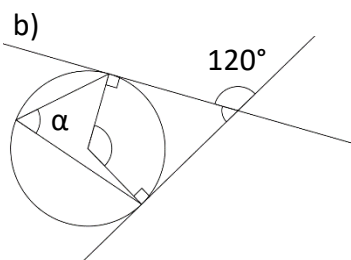
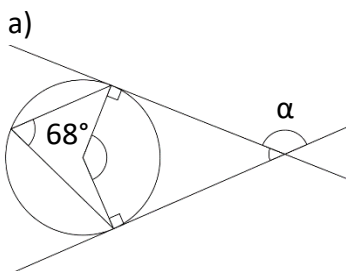
3. Ratkaise kulma α .



4. Ratkaise kulma α .

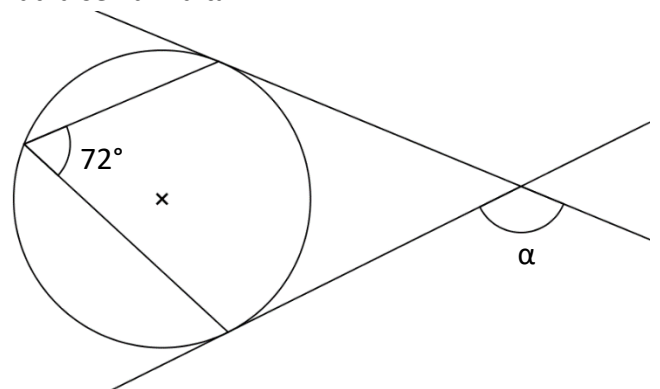


5. Ratkaise kulma α



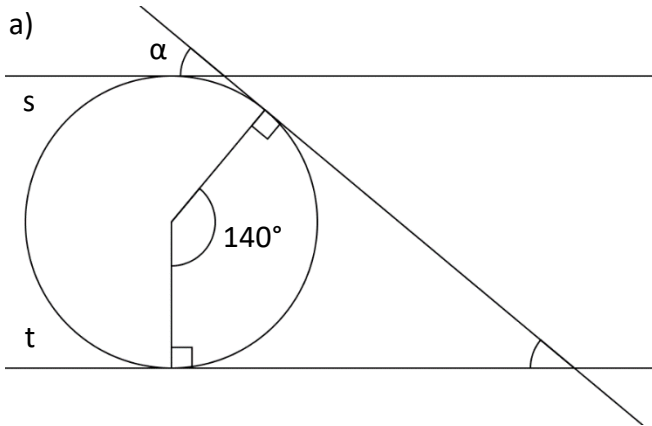
Sitten vähän vaikeampia tehtävä, jossa pitää itse piirtää lisäosia, jotta tehtävän voi ratkaista.

6. Ratkaise kulma α .

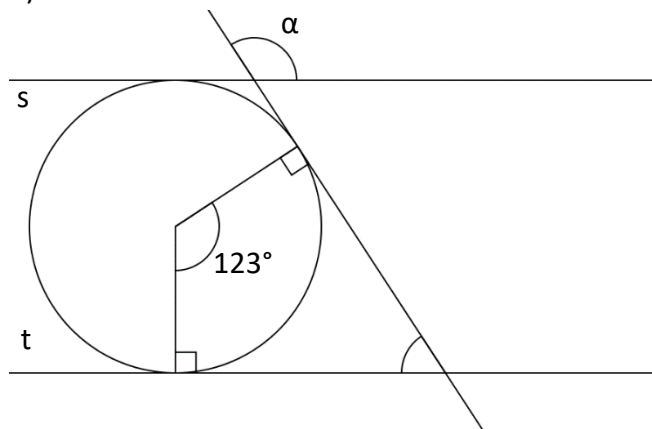


7. Ratkaise α , kun suorat s ja t ovat yhdensuuntaisia.

a)



b)



15. Kertaus 2

Seuraavissa piirtotehtävissä ylimääräiset pisteet ovat vain tarkistamista varten.

1. Piirrä seuraaville janoille keskinormaalit

a) piirtokolmiolla

C K L M
x x x x x
x F x x x x
x D x E

A
x
B
x

H x
x P x
N x
x O x
J x I x
G x

b) geometrisesti

L D M C E F K
x x x x x x

A
x
B
x

x x x x x
J x x P x x x
N O G I H

2. Piirrä seuraaville suorille normaali pisteen P kautta

a) Piirtokolmiolla

E F M L D C K
x x x x x x x

P
x

x x x x x x
O x Q J G N I H

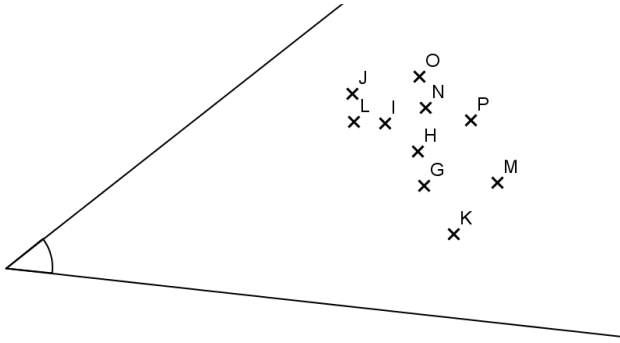
b) geometrisesti

F E M L D C K
x x x x x x x

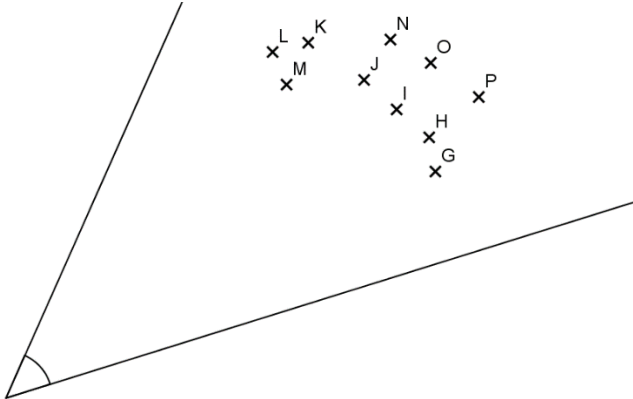
P
x

x x x x x x
Q J H G I N O

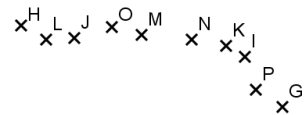
3. Puolita kulma
a) piirtokolmiolla



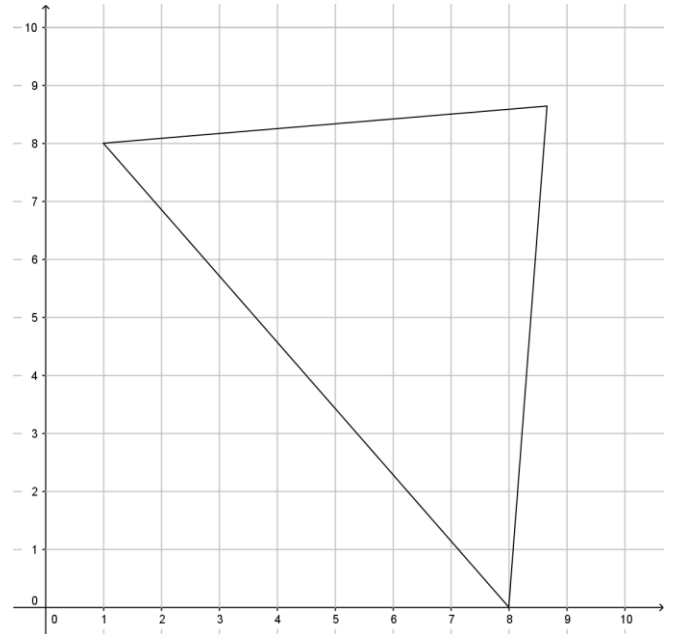
- b) geometrisesti



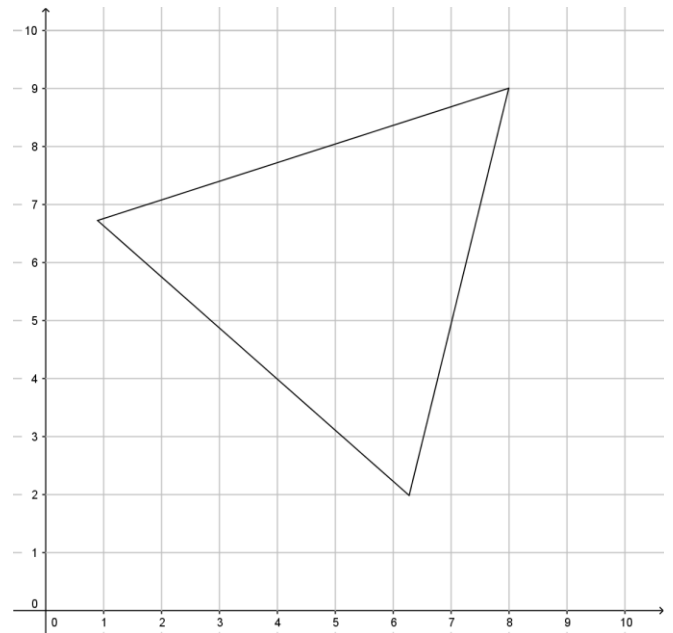
- c) kummalla tahansa menetelmällä



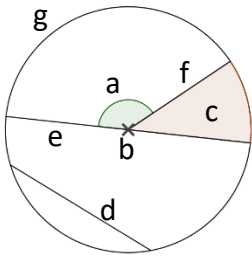
4. a) Piirrä kolmiolle kaikki kolme kulmanpuolittaja.
b) Missä pisteessä ne leikkaavat toisensa?
c) Piirrä kolmion sisälle mahdollisimman suuri ympyrä.



5. a) Piirrä kolmiolle kaikki kolme keskinormaalia.
b) Missä pisteessä ne leikkaavat toisensa?
c) Piirrä ympyrä, jonka reuna osuu kaikkiin kolmion kulmiin.



6. Nimeä ympyrän osat:



- a) _____
- b) _____
- c) _____
- d) _____
- e) _____
- f) _____
- g) _____

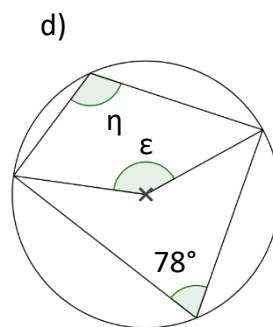
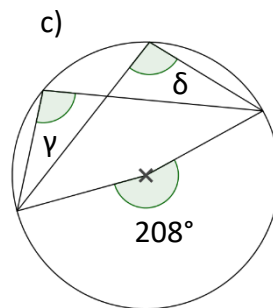
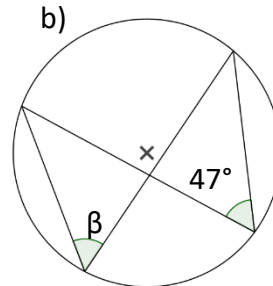
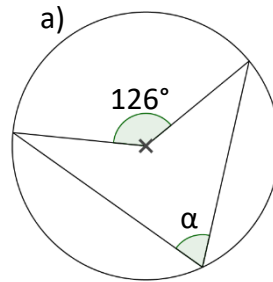
7. a) Piirrä pisteeseen P ympyrä, jonka halkaisija on 7,8 cm.

b) Piirrä ympyrälle säde ja mittaa sen pituus

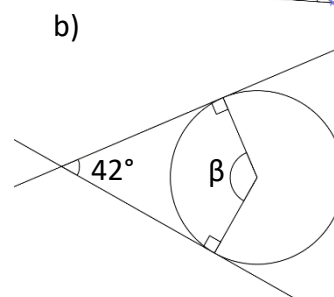
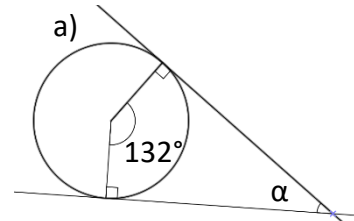
c) Piirrä ympyrälle tangentti, joka osuu ympyrän kaareen samassa pisteessä, mihin piirtämäsi säde osuu.

P
X

8. Ratkaiset kuvioista tuntemattomat kulmat

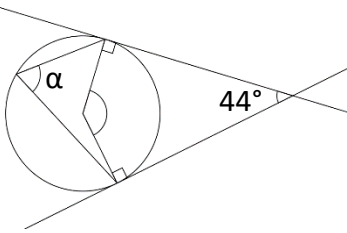


9. Ratkaise kulmat α ja β

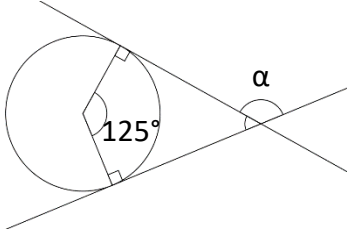


10. Ratkaise kuvioista α .

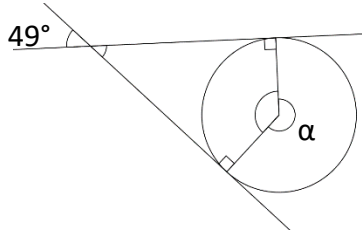
a)



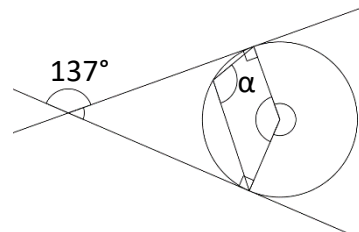
b)



c)



d)



Vastauksia

Vastauksia kpl 8

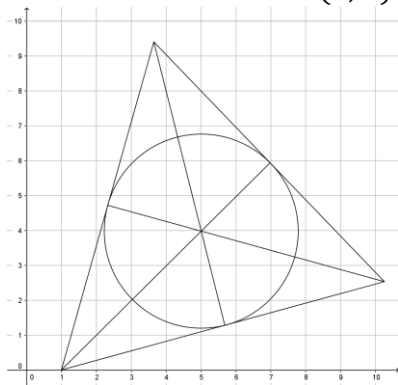
1. a) N ja P b) F ja P
2. a) C ja O b) K ja M
3. a) K b) F
4. 5,2 cm
5. Kaikki kolme keskinormaalia leikkaavat samassa pisteessä.
6. Onnistuu, kun ympyrän keskipiste on edellisen tehtävän leikkauspisteessä.
7. Osuu pisteeseen J
8. Osuu pisteeseen E
9. Osuu pisteeseen F

Vastauksia kpl 9

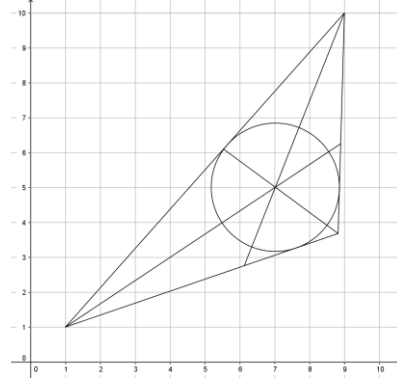
1. a) J b) H c) L
2. Varmista opelta. Eri tulostimet skaalaa kuvan eri kokoiseksi.
3. a) P b) M
4. a) N b) P c) M
5. a) P b) O
6. a) M b) H
7. a) I b) N

Vastauksia kpl 10

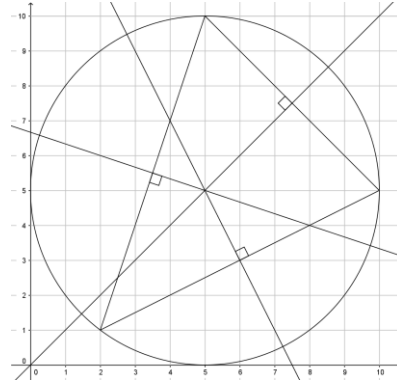
1. Leikkauskohta on (5, 4)



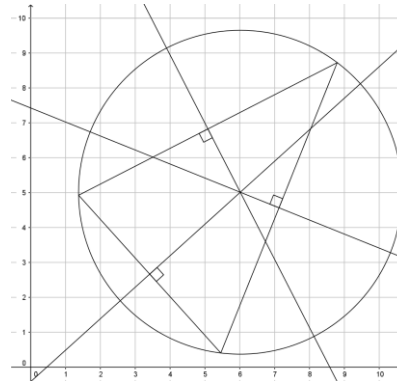
2. Leikkauspiste (7,5)



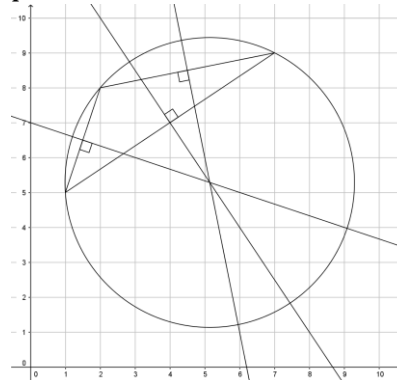
3. Leikkauspiste (5, 5)



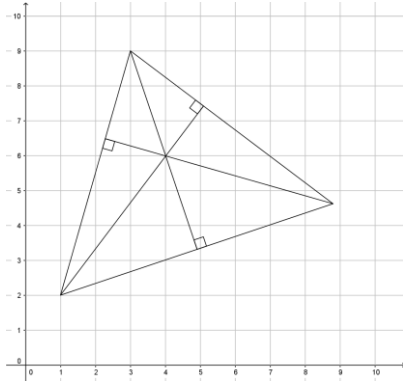
- 4.



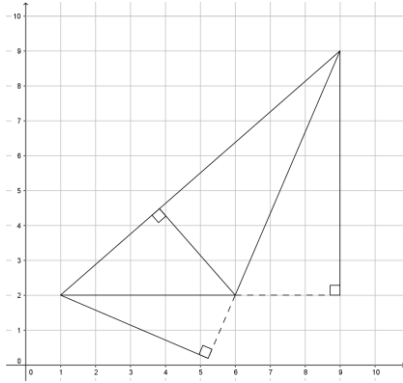
5. Ihmeellistä on, että korkeusjanojen leikkauspiste on kolmion ulkopuolella. Tästä syystä myös ympyrän keskipiste on kolmion ulkopuolella.



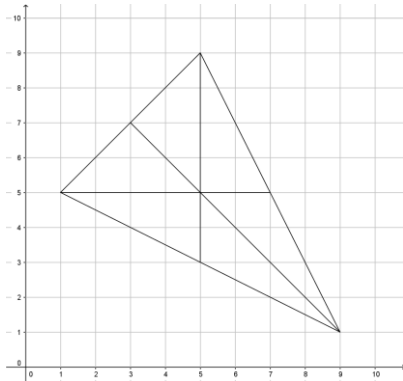
6.



7. Huomaa jatkot (katkoviivat). Kaksi korkeusjanaa kulkee ulkopuolella.



8.



9. Jos olet tehnyt tarkkaa työtä, ei mikään kolmion kohta painu alaspäin. Eli mediaanien leikkauspiste on kolmion painopiste.

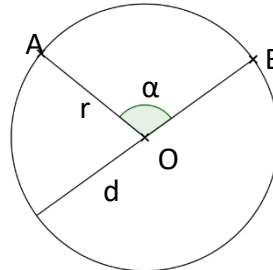
Tehtäviä Kpl 11.

1. a = jänne b = halkaisija
 c = säde d = ympyrän kaari
 E = keskipiste α = keskuskulma
2. a = sekantti b = tangentti
 c = sektori d = sektorin kaari

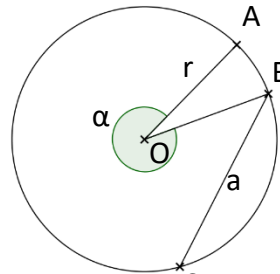
3. a = säde b = segmentti
 c = jänne α = keskuskulma
 d = sektorin kaari tai keskuskulmaa α vastaava kaari. Sama asia, mutta riippuu tilanteesta kumpaa käytetään.

4. a = jänne b = säde
 α = kehäkulma β = keskuskulma

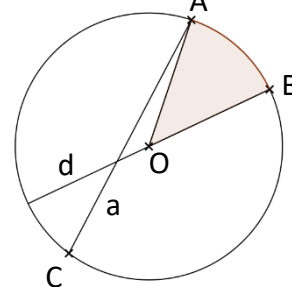
5.



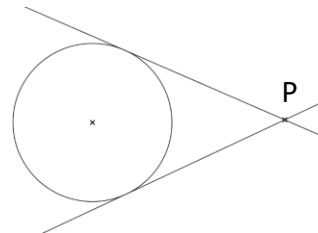
6.



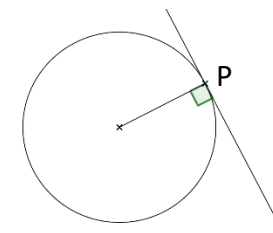
7.



8.



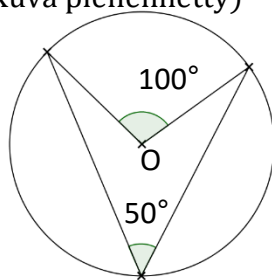
9.



c) 90°

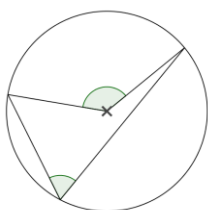
10. halkaisija $d = 6,0$ cm

11. (Kuva pienennetty)

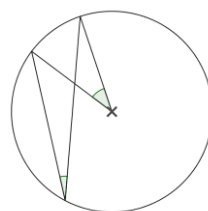


Vastauksia kpl 12.

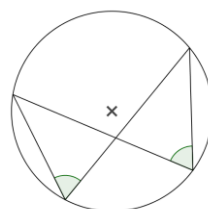
1.



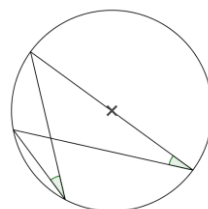
2.



3.



4.

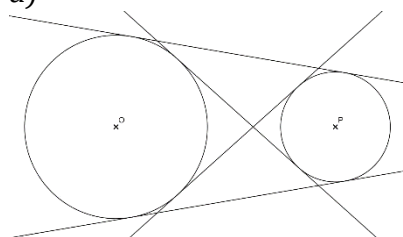


5. a) $\alpha = 94^\circ$ b) $\beta = 46^\circ$
 c) $\gamma = 65^\circ$ d) $\delta = 40^\circ$
6. a) $\alpha = 54^\circ$ b) $\beta = 27^\circ$
 c) $\gamma = 82^\circ$ d) $\delta = 29^\circ$
7. a) $\alpha = 25^\circ$ b) $\beta = 66^\circ$
 c) $\gamma = 49^\circ$ d) $\delta = 24^\circ$ ja $\epsilon = 48^\circ$

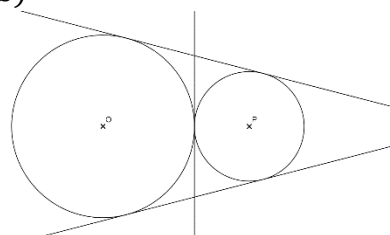
8. a) $\alpha = 28^\circ$ $\beta = 28^\circ$
 b) $\gamma = 190^\circ$ $\delta = 95^\circ$
9. a) $\alpha = 84^\circ$ $\beta = 84^\circ$
 b) $\gamma = 144^\circ$ $\delta = 72^\circ$

Vastauksia kpl 13

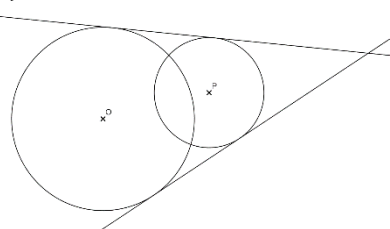
1. A) I B) F
 2. A) D B) H
 3. E ja K
 4. H ja J
 5. a)



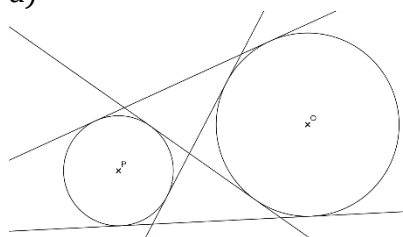
b)



c)

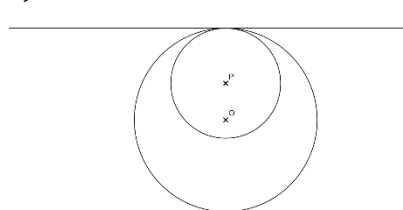


6. a)



b) Ei yhtään tangenttia

c)



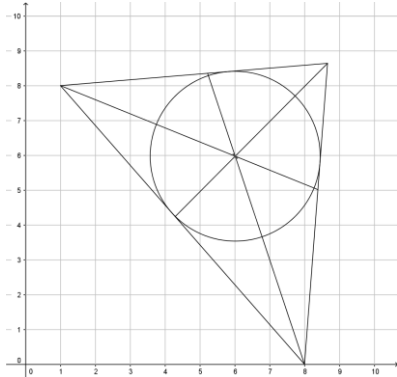
7. Kaveriin D

Vastauksia kpl 14

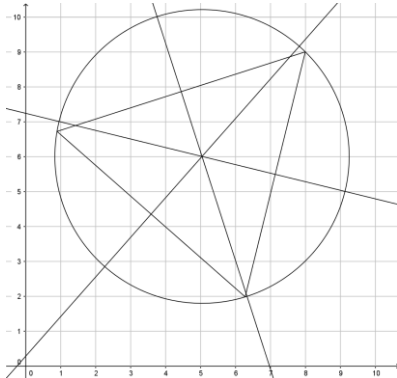
1. a) $\alpha = 130^\circ$ b) $\beta = 68^\circ$
c) $\gamma = 138^\circ$ d) $\delta = 30^\circ$
2. a) $\alpha = 142^\circ$ b) $\alpha = 125^\circ$
c) $\alpha = 52^\circ$ d) $\alpha = 99^\circ$
3. a) $\alpha = 61^\circ$ b) $\alpha = 218^\circ$
c) $\alpha = 124^\circ$ d) $\alpha = 42^\circ$
4. a) $\alpha = 61^\circ$ b) $\alpha = 42^\circ$
c) $\alpha = 69,5^\circ$ d) $\alpha = 86^\circ$
5. a) $\alpha = 136^\circ$ b) $\alpha = 60^\circ$
c) $\alpha = 68^\circ$ d) $\alpha = 68^\circ$
6. $\alpha = 144^\circ$
7. a) $\alpha = 40^\circ$ b) $\alpha = 123^\circ$

Vastauksia kertausta 2

1. a) D ja N b) E ja O
2. a) N ja M b) L ja G
3. a) H b) J c) P
4. b) (6, 6) a ja c)



5. b) (5, 6) a ja c)



6. a) keskuskulma b) keskipiste
c) sektori d) jänne
e) halkaisija f) säde
g) ympyrän kaari tai pelkkä kaari

7. b) 3,9 cm
8. a) $\alpha = 63^\circ$ b) $\beta = 47^\circ$
c) $\delta = 104^\circ$ ja $\gamma = 104^\circ$
d) $\varepsilon = 156^\circ$ ja $\eta = 102^\circ$
9. a) $\alpha = 48^\circ$ b) $\beta = 138^\circ$
10. a) $\alpha = 68^\circ$ b) $\alpha = 125^\circ$
c) $\alpha = 229^\circ$ d) $\alpha = 111,5^\circ$