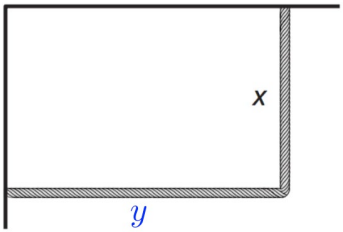
14.1

a) Merkitään alueen pituutta kirjaimella y.



Köyttä on yhteensä 18 m. Ilmaistaan muuttuja y muuttujan x avulla.

$$x + y = 18$$

$$y = 18 - x$$

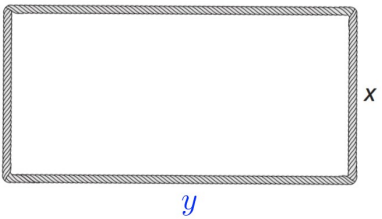
Alueen pituus on $18 - x$.

Muodostetaan alueen pinta-alan lauseke.

$x \cdot y = x \cdot (18 - x)$ Sijoitetaan $y = 18 - x$.

$= 18x - x^2$

b) Merkitään alueen pituutta kirjaimella y.



Köyttä on yhteensä 126 m. Ilmaistaan muuttuja y muuttujan x avulla.

$$2x + 2y = 126$$
$$2y = 126 - 2x \quad | : 2$$
$$y = 63 - x$$

Alueen pituus on $63 - x$.

Muodostetaan alueen pinta-alan lauseke.

$$x \cdot y = x \cdot (63 - x) \qquad \text{Sijoitetaan } y = 63 - x.$$
$$= 63x - x^2$$

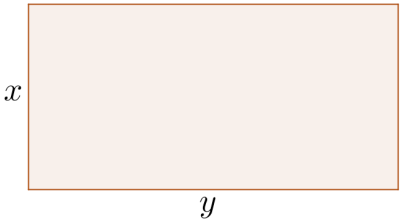
Vastaus

a) pituus $18 - x$, pinta-ala $x(18 - x) = 18x - x^2$

b) pituus $63 - x$, pinta-ala $x(63 - x) = 63x - x^2$

14.2

a) Piirretään kuva. Merkitään suorakulmion leveyttä ja pituutta kirjaimilla x ja y (m).



Suorakulmion piiri on 164 m. Ilmaistaan muuttuja y muuttujan x avulla.

$$2x + 2y = 164$$
$$2y = 164 - 2x \quad | : 2$$
$$y = 82 - x$$

Muodostetaan suorakulmion pinta-alan lauseke.

$x \cdot y = x \cdot (82 - x)$ Sijoitetaan $y = 82 - x$.

$= 82x - x^2$

b) Pinta-ala on 1600 m^2. Ratkaistaan muuttuja x.

$$82x - x^2 = 1600$$
$$-x^2 + 82x - 1600 = 0$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.
$$x = 32 \quad \text{tai} \quad x = 50$$

c) Jos leveys $x = 32$ (m), niin pituus $y = 82 - x = 82 - 32 = 50$ (m).
Jos leveys $x = 50$ (m), niin pituus $y = 82 - x = 82 - 50 = 32$ (m).
Molemmissa tapauksissa sivujen pituudet ovat 32 m ja 50 m.

Vastaus

a) $x(82 - x) = 82x - x^2$

b) yhtälö $82x - x^2 = 1600$, $x = 32$ tai $x = 50$

c) Sivujen pituudet ovat 32 m ja 50 m.

14.3

a) Leveyssuunnassa omenapuita on x kappaletta, joten pituussuunnassa niitä on $x + 7$ kappaletta.

Omenapuita on kaikkiaan $x(x+7) = x^2 + 7x$ kappaletta.

b) Omenapuita on yhteensä 144. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja x.

$x^2 + 7x = 144$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x = -16$ tai $x = 9$

Koska omenapuiden lukumäärä on positiivinen luku, niin $x = 9$.

Leveyssuuntaisessa rivissä on 9 omenapuuta.

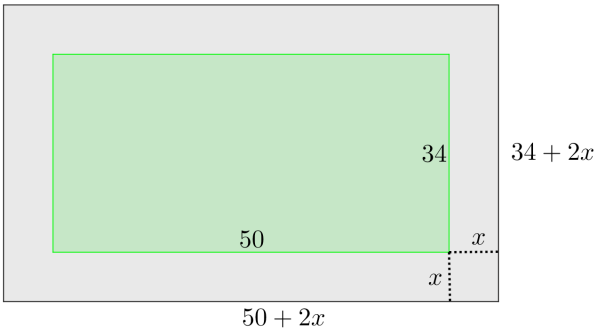
Vastaus

a) $x(x+7) = x^2 + 7x$

b) yhtälö $x^2 + 7x = 144$, 9 omenapuuta

14.4

Piirretään kuva. Merkitään jalkakäytävän leveyttä kirjaimella x.



Ulkoreuna on suorakulmio, jonka pituus metreinä on $50 + 2x$ ja leveys metreinä $34 + 2x$. Kokonaispinta-alan lauseke on

$(50 + 2x)(34 + 2x)$ Sievennetään CAS-laskimella.

$= 4x^2 + 168x + 1700.$

Kokonaispinta-ala on 2145 m^2. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$4x^2 + 168x + 1700 = 2145$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x = -44{,}5$ tai $x = 2{,}5$

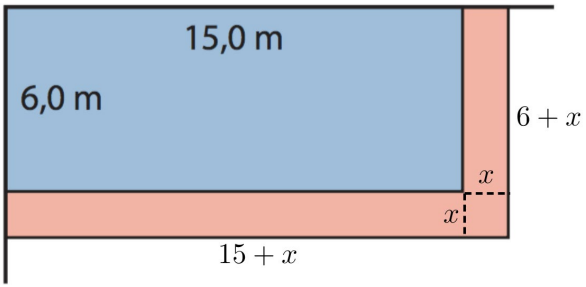
Koska leveys on positiivinen luku, on $x = 2{,}5$ (m).

Jalkakäytävän leveys on 2,5 m.

Vastaus
2,5 m

14.5

b) Piirretään kuva. Merkitään käytävän leveyttä kirjaimella x.



Ulkoreuna on suorakulmio, jonka pituus metreinä on $15 + x$ ja leveys metreinä $6 + x$. Käytävän pinta-ala saadaan, kun tämän suorakulmion pinta-alasta vähennetään uima-altaan pinta-ala.

$(15 + x)(6 + x) - 15 \cdot 6$ Sievennetään CAS-laskimella.

$= x^2 + 21x$

Pinta-alan tulee olla $41{,}0\ \text{m}^2$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$x^2 + 21x = 41$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

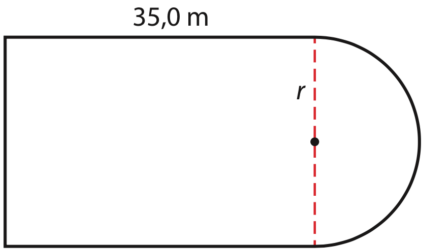
$x = -22{,}798...$ tai $x = 1{,}798...$

Koska leveys on positiivinen luku, niin $x \approx 1{,}8$ (m).

Käytävän leveys on 1,8 m

Vastaus
1,8 m

14.6



Salin muodostavan suorakulmion sivujen pituudet ovat $35{,}0$ m ja $2r$ (m). Suorakulmion pinta-ala on $35 \cdot 2r = 70r$ (m^2).

Salin muodostavan puoliympyrän pinta-ala on $\frac{1}{2} \cdot \pi r^2$.

Kokonaispinta-alan tulee olla 850 m^2. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan r.

$70r + \frac{1}{2} \cdot \pi r^2 = 850$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$r = -54{,}493...$ tai $r = 9{,}9301...$

Ympyrän säde on positiivinen luku, joten $r = 9{,}9301\ldots$ (m).

Salin halkaisija on $2r = 2 \cdot 9.9301... = 19{,}860... \approx 19{,}9$ (m).

Salin halkaisija on $19{,}9$ m.

Vastaus
19,9 m

14.7

Merkitään 4 euron hinnankorotusten lukumäärää kirjaimella x.

Jos hintaa korotetaan $x \cdot 4\ € = 4x\ €$, niin uusi myyntihinta on $22 + 4x$ (€ / kpl). Tällöin villasukkien myyntimäärä pienenee $10x$ kappaletta ja uusi myyntimäärä on $90 - 10x$ kappaletta.

Myyntitulo saadaan kertomalla kappalehinta myyntimäärällä. Markkinoilla saatava myyntitulo on

$(22 + 4x)(90 - 10x) = -40x^2 + 140x + 1980$.

Kustannukset saadaan kertomalla valmistuskustannukset myyntimäärällä. Markkinoiden aikaiset valmistuskustannukset ovat

$6 \cdot (90 - 10x) = 540 - 60x$.

Myynti on voitollista, kun myyntitulo on suurempi kuin kustannukset. Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$-40x^2 + 140x + 1980 > 540 - 60x$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$-4 < x < 9$

Kun $x > -4$, myyntihinta on suurempi kuin $22 + 4 \cdot (-4) = 6$ (€).

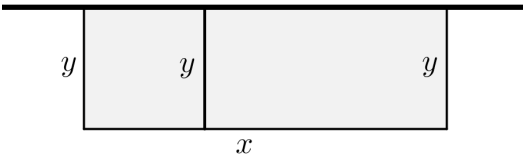
Kun $x < 9$, myyntihinta on pienempi kuin $22 + 4 \cdot 9 = 58$ (€).

Myynti on voitollista, kun myyntihinta on yli $6\ €$ mutta alle $58\ €$.

Vastaus
yli $6\ €$ mutta alle $58\ €$

14.8

Piirretään kuva. Merkitään aitauksen seinän suuntaisen sivun pituutta kirjaimella x ja seinää vastaan kohtisuoran sivun kirjaimella y.



Aitaa on käytettävissä 15 m. Ratkaistaan muuttuja y.

$3y + x = 15$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$y = 5 - \frac{1}{3}x$

Aitauksen pinta-ala on vähintään 12 m^2. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan x.

$xy \geq 12$ Sijoitetaan $y = 5 - \frac{1}{3}x$.

$x(5 - \frac{1}{3}x) \geq 12$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$3 \leq x \leq 12$

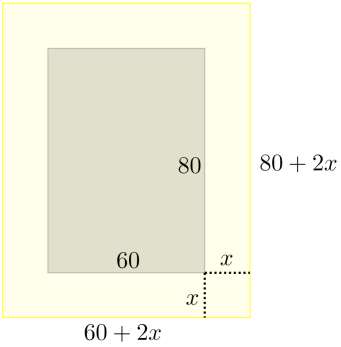
Seinän suuntaisen sivun pituuden tulee olla vähintään 3 m ja enintään 12 m.

Vastaus

vähintään 3 m ja enintään 12 m

14.9

Piirretään kuva. Merkitään kehyksen leveyttä kirjaimella x.



Ulkoreuna on suorakulmio, jonka mitat ovat $60 + 2x$ (cm) ja $80 + 2x$ (cm). Kehyksen pinta-ala saadaan, kun tämän suorakulmion pinta-alasta vähennetään peilin pinta-ala.

$$(60 + 2x)(80 + 2x) - 60 \cdot 80$$
$$= 4x^2 + 280x$$

Peilin pinta-ala on 0,250 m^2 = 2500 cm^2. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$4x^2 + 280x = 2500$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x = -78{,}011...$ tai $x = 8{,}011...$

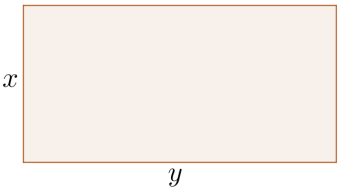
Leveys on positiivinen luku, joten $x \approx 8$ (cm).

Kehyksen leveys on 8 cm.

Vastaus
8 cm

14.10

Merkitään suorakulmion leveyttä kirjaimella x (m) ja pituutta kirjaimella y (m).



Suorakulmion piiri on 200 m. Ilmaistaan muuttuja y muuttujan x avulla..

$$2x + 2y = 200$$
$$2y = 200 - 2x \quad | : 2$$
$$y = 100 - x$$

Muodostetaan suorakulmion pinta-alan lauseke.

$$x \cdot y = x(100 - x) = 100x - x^2$$

Pinta-ala on 2356 m^2. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$100x - x^2 = 2356$$
$$-x^2 + 100x - 2356 = 0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 38 \quad \text{tai} \quad x = 62$$

Jos leveys $x = 38$ (m), niin pituus $y = 100 - x = 100 - 38 = 62$ (m).

Jos leveys $x = 62$ (m), niin pituus $y = 100 - x = 100 - 62 = 38$ (m).

Molemmissa tapauksissa sivujen pituudet ovat 38 m ja 62 m.

Vastaus
38 m ja 62 m

14.11

Merkitään soittokunnan syvyyttä aluksi kirjaimella x. Tällöin sen leveys on $x - 8$ soittajaa.

Soittajien määrä on $x(x-8) = x^2 - 8x$.

Käännöksen jälkeen syvyys on 4 soittajaa ja leveys $x - 8 + 15 = x + 7$ soittajaa.

Soittajien määrä on $4(x+7) = 4x + 28$.

Soittajien määrä säilyy samana. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja x.

$$x^2 - 8x = 4x + 28$$

$x^2 - 12x - 28 = 0$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x = -2$ tai $x = 14$

Suorakulmion syvyys on postiviinen luku, joten $x = 14$ (soittajaa).

Lasketaan soittajien lukumäärä.

$4x + 28$ Sijoitetaan $x = 14$.

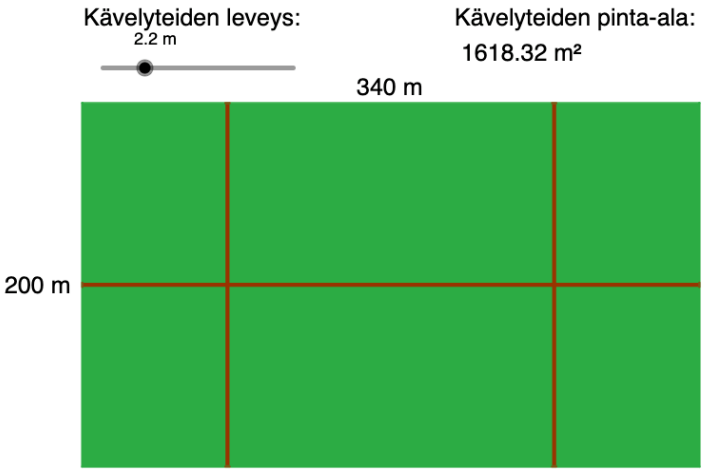
$= 4 \cdot 14 + 28 = 84$

Huomaa, että soittajien lukumäärän voi laske myös lausekkeesta $x^2 - 8x$:
$x^2 - 8x = 14^2 - 8 \cdot 14 = 84$.

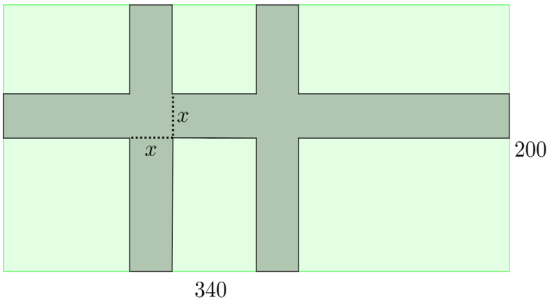
Vastaus
84 soittajaa

14.12

a) Appletin perusteella kävelyteiden leveyden tulee olla n. 2,2 m.



b) Piirretään mallikuva. Merkitään kävelytien leveyttä kirjaimella x.



Kuvan yhden pystysuuntaisen tien pinta-ala on $200x$, jolloin pystysuuntaisten teiden pinta-ala on yhteensä $2 \cdot 200x = 400x$.

Kuvan vaakasuuntaisesta tiestä pitää laskea se pinta-ala, joka ei ole yhteistä pystysuuntaisten teiden kanssa. Tämän alueen leveys on x ja kokonaispituus $340 - 2x$. Pinta-ala on siis $x(340 - 2x) = 340x - 2x^2$.

Teiden yhteenlaskettu pinta-ala on $1620\ \text{m}^2$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kävelytien leveys x.

$$400x + 340x - 2x^2 = 1620$$

$$-2x^2 + 740x - 1620 = 0$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 2{,}202... \quad \text{tai} \quad x = 367{,}797...$$

Kävelytien leveys ei voi olla yli 170 m, koska muutoin kaksi tietä ei mahtuisi rinnakkain puistoon. Siis kävelyteiden leveys $x \approx 2{,}2$ m.

Vastaus
2,2 m

14.13

Merkitään 90 sentin hinnankorotusten lukumäärää kirjaimella x.

Jos hintaa korotetaan $x \cdot 90 \text{ snt} = 0{,}90x$ €, niin uusi myyntihinta on $8{,}90 + 0{,}90x$ (€/kpl). Tällöin kanisterien myyntimäärä pienenee $64x$ kappaletta ja uusi myyntimäärä on $760 - 64x$ kappaletta.

Myyntitulo saadaan kertomalla kappalehinta myyntimäärällä.
Yhden viikon aikana saatava myyntitulo on

$(8{,}90 + 0{,}90x)(760 - 64x)$ Sievennetään CAS-laskimella.
$= -57{,}6x^2 + 114{,}4x + 6794.$

Kustannukset saadaan kertomalla myyntikulu myyntimäärällä.
Yhden viikon aikana kustannukset ovat

$3{,}50 \cdot (760 - 64x)$ Sievennetään CAS-laskimella.
$= 2660 - 224x.$

Myynti on voitollista, kun myyntitulo on suurempi kuin kustannukset.
Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$-57{,}6x^2 + 114{,}4x + 6794 > 2660 - 224x$ Ratkaistaan CAS-laskimella.
$-6 < x < 11{,}875$

Kun $x > -6$, myyntihinta on suurempi kuin $8{,}90 + 0{,}90 \cdot (-6) = 3{,}50$ (€).

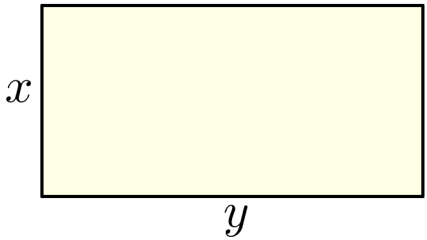
Kun $x < 11{,}875$, myyntihinta on pienempi kuin
$8{,}90 + 0{,}90 \cdot 11{,}875 = 19{,}5875$ (€).

Myynti on voitollista, kun myyntihinta on suurempi kuin 3,50 € ja korkeintaan 19,58 €.

Vastaus
suurempi kuin 3,50 € ja korkeintaan 19,58 €

14.14

Piirretään kuva. Merkitään mainostaulun korkeutta kirjaimella x (m) ja leveyttä kirjaimella y (m).



Mainostaulun piiri on $2x + 2y = 8$.

Mainostaulun pinta-ala on $x \cdot y \leq 3$.

Suorakulmion piiri on 8 m. Ilmaistaan muuttuja y muuttujan x avulla.

$$2x + 2y = 8$$
$$y = 4 - x$$

Muodostetaan pinta-alan lauseke.

$$xy = x \cdot (4 - x) = 4x - x^2$$

Suorakulmion pinta-ala on korkeintaan 3 m^2. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan x.

$4x - x^2 \leq 3$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x \leq 1$ tai $x \geq 3$

Ratkaistaan vielä yläraja muuttujalle x. Sivun pituuden y tulee olla positiivinen.

$y > 0$ Sijoitetaan $y = 4 - x$

$4 - x > 0$

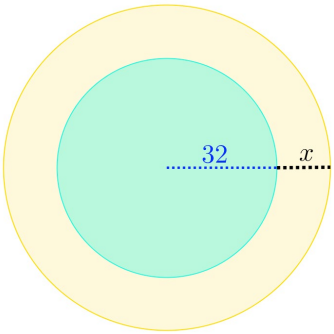
$x < 4$

Yhdistämällä saadut ehdot, saadaan $0 < x \leq 1$ tai $3 \leq x < 4$.
Mainostaulun korkeuden tulee olla korkeintaan 1 m tai vähintään 3 m mutta alle 4 m.

Vastaus
korkeintaan 1 m tai vähintään 3 m mutta alle 4 m

14.15

Piirretään kuva. Merkitään kehyksen leveyttä kirjaimella x (cm).



Peilin halkaisija on 64 cm, joten sen säde on $\frac{64\text{ cm}}{2} = 32\text{ cm}$. Ulkoreuna on ympyrä, jonka säde on $32 + x$. Kehyksen pinta-ala saadaan, kun tämän ympyrän pinta-alasta vähennetään peilin pinta-ala.

$\pi \cdot (32 + x)^2 - \pi \cdot 32^2$ Sievennetään CAS-laskimella.

$= \pi \cdot x^2 + 64\pi \cdot x$

Kehyksen pinta-ala voi olla korkeintaan 0,250 m^2 = 2500 cm^2.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kehyksen leveys x.

$\pi \cdot x^2 + 64\pi \cdot x = 2500$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x = -74,658...$ tai $x = 10,658...$

Kehyksen leveys on positiivinen luku, joten x = 10,658… (cm).

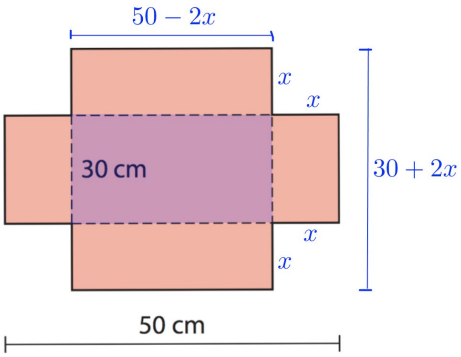
Kehyksen leveys voi olla korkeintaan 10 cm

Vastaus
10 cm

14.16

Merkitään pois leikattavan neliön sivun pituutta kirjaimella x.

Tällöin laatikon pohjan leveys on $50 - 2x$ ja rullasta leikattavan pahvipalan pituus $30 + 2x$.



Laatikon mitat senttimetreinä ovat siis:
leveys $50 - 2x$, pituus 30 ja korkeus x.

Laatikon tilavuus on tällöin $(50 - 2x) \cdot 30 \cdot x = -60x^2 + 1500x$.
Toisaalta laatikon tilavuuden tulla olla vähintään $6\ \text{L} = 6\ \text{dm}^3 = 6000\ \text{cm}^3$.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan x.

$-60x^2 + 1500x \geq 6000$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$5 \leq x \leq 20$

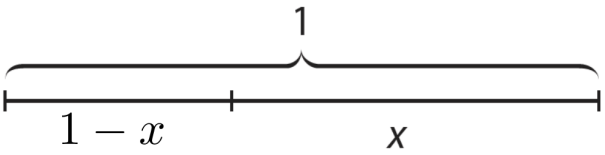
Pois leikattavan neliön sivun pituuden x pitää siis olla välillä
$5\ \text{cm} \leq x \leq 20\ \text{cm}$.

Tällöin rullasta leikattavan pahvipalan pituus on
vähintään $30 + 2x = 30 + 2 \cdot 5\ \text{cm} = 40\ \text{cm}$ ja
enintään $30 + 2x = 30 + 2 \cdot 20\ \text{cm} = 70\ \text{cm}$.

Vastaus
Pois leikattavan neliön sivun pituus on vähintään 5cm ja enintään 20 cm.
Pahvia tarvitaan vähintään 40 cm ja enintään 70 cm.

14.17

a) Merkitään janan pidemmän osan pituutta kirjaimella x, jolloin janan lyhyempi osan pituus $1 - x$.



Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja x.

$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}$ Lyhyemmän osan suhde pidempään osaan on yhtä suuri kuin pidemmän osan suhde koko janaan.

$x = -1{,}6180...$ tai $x = 0{,}6180...$

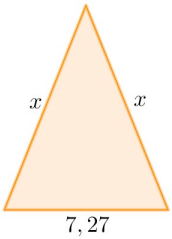
Jana pituus on positiivinen luku, joten $x = 0{,}6180\ldots \approx 0{,}618$.

Janan lyhyemmän osan pituus on $1 - 0{,}618 = 0{,}382$.

Vastaus

a) 0,382 ja 0,618

14.18



Kolmion kannan pituus on 7,27 m. Merkitään kyljen pituutta kirjaimella x.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja x.

$$\frac{7,27}{x} = \frac{x}{7,27 + x}$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x = -4,493...$ tai $x = 11,769...$

Kyljen pituus on positiivinen luku, joten pituus $x \approx 11,8$ (m).

Kyljen pituus on 11,8 m.

Vastaus
11,8 m

14.19

Koska reaktioajan yksikkö on sekunti, muutetaan tehtävässä annettu nopeus yksikköön m/s.

$$30 \text{ km/h} = \frac{30}{3,6} \text{ m/s}$$

Muodostetaan yhtälö ajonopeuden v ja jarrutusmatkan x välille.

Jarrutusmatka (m)	**Ajonopeuden neliö ((m/s)^2)**
6,5	$\left(\frac{30}{3,6}\right)^2$
x	v^2

Jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön.

$$\frac{6,5}{x} = \frac{\left(\frac{30}{3,6}\right)^2}{v^2}$$

Ratkaistaan v CAS-laskimella.

$$x = 0,0936v^2$$

Kun ajonopeus on v (m/s), jarrutusmatka on $0,0936v^2$ (m).

Vakionopeudella edettäessä matka on nopeuden ja ajan tulo. Kun ajonopeus on v (m/s), reaktioaikana 1,5 s edetty matka on $1,5v$ (m).

Siis, kun ajetaan nopeudella v (m/s) on pysähtymismatka

$s = 1,5v + 0,0936v^2$ (m).

a) Ratkaistaan ajonopeus, kun pysähtymismatka on 6,5 m.

$s = 1{,}5v + 0{,}0936v^2$ Sijoitetaan $s = 6{,}5$.

$6{,}5 = 1{,}5v + 0{,}0936v^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$v = -19{,}573...$ tai $v = 3{,}547...$

Ajonopeus on positiivinen luku, joten v = 3,547… (m/s).

Ilmaistaan ajonopeus yksikössä km/h.

3,547… m/s = 3,547… · 3,6 km/h = 12,772… km/h ≈ 13 km/h

Elmeri voi ajaa korkeintaan nopeudella 13 km/h.

b) Ratkaistaan ajonopeus, kun pysähtymismatka on 30 m.

$s = 1{,}5v + 0{,}0936v^2$ Sijoitetaan $s = 30$.

$30 = 1{,}5v + 0{,}0936v^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$v = -27{,}627...$ tai $v = 11{,}601...$

Ajonopeus on positiivinen luku, joten v = 11,601… (m/s).

Ilmaistaan ajonopeus yksikössä km/h.

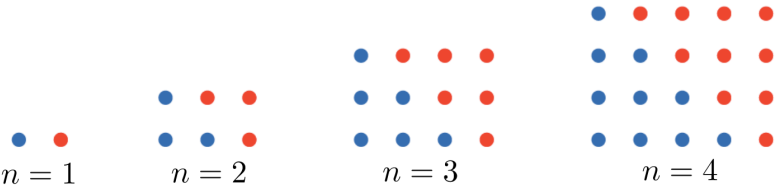
11,601… m/s = 11,601… · 3,6 km/h = 41,765… km/h ≈ 42 km/h

Elmeri voi ajaa korkeintaan nopeudella 42 km/h.

Vastaus
a) 13 km/h
b) 42 km/h

14.20

a)



Kun kolmioluku kahdennetaan, saadaan suorakulmio, jonka toisen sivun pituus on kolmioluvun järjestysluku n ja toisen sivun pituus $n + 1$.

Koska kolmioluku on kahdennettu, on n:nnen kolmioluvun arvo puolet suorakulmion pisteiden lukumäärästä.

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

b) Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan kolmioluvun järjestysluku n.

$$\frac{n(n+1)}{2} > 10\,000$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$n < -141{,}92...$ tai $n > 140{,}92...$

Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on $n = 141$.
Siten 141. kolmioluku on ensimmäinen, joka on yli 10 000

Vastaus

a) $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$

b) 141. kolmioluku

14.21

Olkoon kaksinumeroinen luku xy.

Numeroiden summa on 10. Ilmaistaan numero y numeron x avulla.

$$x + y = 10$$
$$y = 10 - x$$

Luvussa xy numero x on kymmenien paikalla ja numero y ykkösten paikalla. Luku xy voidaan siis kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} & x \cdot 10 + y \cdot 1 \\ &= 10x + y && \text{Sijoitetaan } y = 10 - x. \\ &= 10x + 10 - x \\ &= 9x + 10. \end{aligned}$$

Kun numerot pannaan vastakkaiseen järjestykseen saadaan luku yx, joka voidaan vastaavasti kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} & y \cdot 10 + x \cdot 1 \\ &= 10y + x && \text{Sijoitetaan } y = 10 - x. \\ &= 10 \cdot (10 - x) + x \\ &= 100 - 10x + x \\ &= 100 - 9x. \end{aligned}$$

Alkuperäisen ja uuden luvun tulo on 2944. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja x.

$(9x+10)(100-9x)=2944$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x=4$ tai $x=6$

Kun $x=4$, niin $y=10-x=10-4=6$ ja luku on 46.

Kun $x=6$, niin $y=10-x=10-6=4$ ja luku on 64.

Vastaus

46 tai 64