

4.1

a) Koska $104 = 4 \cdot 26$, niin luku 104 on jaollinen luvulla 4.

b) Koska

$$4 \cdot 20 = 80 < 82$$

$$4 \cdot 21 = 84 > 82,$$

niin ei ole olemassa sellaista kokonaislukua q , että $82 = 4q$.

c) Koska $-32 = 4 \cdot (-8)$, niin luku -32 on jaollinen luvulla 4.

4.2

a) Koska

$$21 \cdot 1 = 21 < 35 \text{ ja } 21 \cdot 2 = 42 > 35,$$

niin luku 35 ei ole jaollinen luvulla 21.

b) Koska $-42 = 21 \cdot (-2)$, niin luku -42 on jaollinen luvulla 21.

c) Koska

$$21 \cdot 10 = 210 < 219 \text{ ja } 21 \cdot 11 = 231 > 219,$$

niin luku 219 ei ole jaollinen luvulla 21.

d) Koska $-105 = 21 \cdot (-5)$, niin luku -105 on jaollinen luvulla 21.

Vastaus

a) ei

b) on

c) ei

d) on

4.3

a) $27 : 10 = 2,7$

Jakolaskun $27 : 10$ osamäärä on 2
ja jakojäännös $27 - 2 \cdot 10 = 7$.

Jakoyhtälö on $27 = 10 \cdot 2 + 7$.

b) $305 : 100 = 3,05$

Jakolaskun $305 : 100$ osamäärä on 3
ja jakojäännös $305 - 3 \cdot 100 = 5$.

Jakoyhtälö on $305 = 100 \cdot 3 + 5$.

c) $9999 : 1000 = 9,999$

Jakolaskun $9999 : 1000$ osamäärä on 9
ja jakojäännös $9999 - 9 \cdot 1000 = 999$.

Jakoyhtälö on $9999 = 1000 \cdot 9 + 999$.

Vastaus

a) osamäärä 2, jakojäännös 7 ja jakoyhtälö $27 = 10 \cdot 2 + 7$

b) osamäärä 3, jakojäännös 5 ja jakoyhtälö $305 = 100 \cdot 3 + 5$

c) osamäärä 9, jakojäännös 999 ja jakoyhtälö $9999 = 1000 \cdot 9 + 999$

4.4

Väittämät a, d ja f ovat tosia.

Laskimella saadaan $57 : 5 = 11,4$.

Jakolaskun $57 : 5$ osamäärä on 11
ja jakojäännös $57 - 11 \cdot 5 = 2$.

Jakoyhtälö on $57 = 5 \cdot 11 + 2$.

Vastaus

a, d, f

4.5

a) $21 : 3 = 7$

Jakoyhtälö on $21 = 3 \cdot 7 + 0$.

b) Laskimella saadaan $43 : 3 = 12,333\dots$.

Jakolaskun $43 : 3$ osamäärä on 12
ja jakojäännös $43 - 12 \cdot 3 = 1$.

Jakoyhtälö on $43 = 3 \cdot 14 + 1$.

c) Laskimella saadaan $-28 : 3 = -9,333\dots$.

Etsitään suurin luvun 3 monikerta, joka on pienempi kuin -28 .

$$3 \cdot (-9) = -27 > -28$$

$$3 \cdot (-10) = -30 < -28$$

Lasketaan lukujen -28 ja -30 erotus.

$$-28 - (-30) = 2$$

Jakoyhtälö on $-28 = 3 \cdot (-10) + 2$.

c) Laskimella saadaan $-44 : 3 = -14,666\dots$.

Etsitään suurin luvun 3 monikerta, joka on pienempi kuin -44 .

$$3 \cdot (-14) = -42 > -44$$

$$3 \cdot (-15) = -45 < -44$$

Lasketaan lukujen -44 ja -45 erotus.

$$-44 - (-45) = 1$$

Jakoyhtälö on $-44 = 3 \cdot (-15) + 1$.

Vastaus

a) $21 = 3 \cdot 7 + 0$

b) $43 = 3 \cdot 14 + 1$

c) $-28 = 3 \cdot (-10) + 2$

d) $-44 = 3 \cdot (-15) + 1$

4.6

a) Appletilla kokeilemalla saadaan $24 = 10 \cdot 2 + 4$.

Siis $q = 2$ ja $r = 4$.

b) Appletilla kokeilemalla saadaan $-28 = 10 \cdot (-3) + 2$.

Siis $q = -3$ ja $r = 2$.

c) Appletilla kokeilemalla saadaan $-91 = 10 \cdot (-10) + 9$.

Siis $q = -10$ ja $r = 9$.

Vastaus

a) $q = 2$ ja $r = 4$

b) $q = -3$ ja $r = 2$

c) $q = -10$ ja $r = 9$

4.7

a) Laskimella saadaan $37 : 15 = 2,466\dots$.

Jakolaskun $37 : 15$ osamäärä on 2
ja jakojäännös $37 - 2 \cdot 15 = 7$.

Jakoyhtälö on $37 = 15 \cdot 2 + 7$.

b) Laskimella saadaan $6 : 15 = 0,4$.

Jakolaskun $6 : 15$ osamäärä on 0
ja jakojäännös $6 - 0 \cdot 15 = 6$.

Jakoyhtälö on $6 = 15 \cdot 0 + 6$.

c) Laskimella saadaan $-224 : 15 = -14,933\dots$.

Etsitään suurin luvun 15 monikerta, joka on pienempi kuin -224 .

$$15 \cdot (-14) = -210 > -224$$

$$15 \cdot (-15) = -225 < -224$$

Lasketaan lukujen -224 ja -225 erotus.

$$-224 - (-225) = 1$$

Jakoyhtälö on $-224 = 15 \cdot (-15) + 1$.

d) Laskimella saadaan $-128 : 15 = -8,533\dots$.

Etsitään suurin luvun 15 monikerta, joka on pienempi kuin -128 .

$$15 \cdot (-8) = -120 > -128$$

$$15 \cdot (-9) = -135 < -128$$

Lasketaan lukujen -128 ja -135 erotus.

$$-128 - (-135) = 7$$

Jakoyhtälö on $-128 = 15 \cdot (-9) + 7$.

Vastaus

a) $37 = 15 \cdot 2 + 7$

b) $6 = 15 \cdot 0 + 6$

c) $-224 = 15 \cdot (-15) + 1$

d) $-128 = 15 \cdot (-9) + 7$

4.8

Oletetaan, että n on kokonaisluku.

Kirjoitetaan oletus
(eli lähtötiedot)
näkyviin.

Tehtävänä on osoittaa, että luku $n(n^2+8)$ on
jaollinen luvulla 3.

Kirjoitetaan väite
näkyviin.

Jakoyhtälön nojalla jokainen kokonaisluku n voidaan
esittää muodossa

Aloitetaan päättely
oletuksesta.

$$n = 3q, n = 3q + 1 \text{ tai } n = 3q + 2,$$

missä q on kokonaisluku.

1) Jos $n = 3q$, niin

$$\begin{aligned} n(n^2 + 8) &= 3q((3q)^2 + 8) \\ &= 3 \cdot q(9q^2 + 8). \end{aligned}$$

2) Jos $n = 3q + 1$, niin

$$\begin{aligned} n(n^2 + 8) &= (3q + 1)((3q + 1)^2 + 8) \\ &= (3q + 1)((3q)^2 + 2 \cdot 3 \cdot q + 1^2 + 8) \\ &= (3q + 1)(9q^2 + 6q + 9) \\ &= (3q + 1) \cdot 3 \cdot (3q^2 + 2q + 3) \\ &= 3 \cdot (3q + 1)(3q^2 + 2q + 3). \end{aligned}$$

3) Jos $n = 3q + 2$, niin

$$\begin{aligned}n(n^2 + 8) &= (3q + 2)((3q + 2)^2 + 8) \\&= (3q + 2)((3q)^2 + 2 \cdot 3q \cdot 2 + 2^2 + 8) \\&= (3q + 2)(9q^2 + 12q + 12) \\&= (3q + 2) \cdot 3 \cdot (3q^2 + 4q + 4) \\&= 3 \cdot (3q + 2)(3q^2 + 4q + 4).\end{aligned}$$

Jokaisessa tapauksessa luku $n(n^2 + 8)$ voidaan esittää kokonaislukujen tulona niin, että yksi tulon tekijöistä on luku 3.

Perustellaan, miksi väite on tosi.

Siis luku $n(n^2 + 8)$ on jaollinen luvulla 3. $\square$

4.9

Oletetaan, että n on kokonaisluku.

Kirjoitetaan oletus
(eli lähtötiedot)
näkyviin.

Tehtävänä on osoittaa, että summa

Kirjoitetaan väite
näkyviin.

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4)$$

on jaollinen luvulla 5.

Muokataan summan lauseketta.

Aloitetaan päättely
oletuksesta.

$$\begin{aligned} & n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) \\ &= n + n + 1 + n + 2 + n + 3 + n + 4 \\ &= 5n + 10 \\ &= 5 \cdot (n + 2) \end{aligned}$$

Summa voidaan esittää kokonaislukujen tulona niin,
että yksi tulon tekijöistä on luku 5.

Perustellaan, miksi
väite on tosi.

Siis summa on jaollinen luvulla 5. $\square$

4.10

- a) Oletetaan, että luku a on jaollinen luvulla 28 ja luku b on jaollinen luvulla 21.

Kirjoitetaan oletus (eli lähtötiedot) näkyviin.

Tehtävänä on osoittaa, että luku $a + b$ on jaollinen luvulla 7.

Kirjoitetaan väite näkyviin.

Koska luku a on jaollinen luvulla 28, voidaan merkitä $a = 28q$,
ja koska luku b on jaollinen luvulla 21, voidaan merkitä $b = 21r$,
missä luvut q ja r ovat kokonaislukuja.

Aloitetaan päättely oletuksesta.

Muokataan summan lauseketta.

$$\begin{aligned} a + b &= 28q + 21r \\ &= 7 \cdot 4q + 7 \cdot 3r \\ &= 7 \cdot (4q + 3r) \end{aligned}$$

Luku $a + b$ voidaan esittää kokonaislukujen tulona niin, että yksi tulon tekijöistä on luku 7.

Perustellaan, miksi väite on tosi.

Siis luku $a + b$ on jaollinen luvulla 7. $\square$

b) Oletetaan, että luku a on jaollinen luvulla 28 ja luku b on jaollinen luvulla 21.

Tehtävänä on osoittaa, että luku ab on jaollinen luvulla 12.

Koska luku a on jaollinen luvulla 28, voidaan merkitä $a = 28q$,
ja koska luku b on jaollinen luvulla 21, voidaan merkitä $b = 21r$,
missä luvut q ja r ovat kokonaislukuja.

Muokataan tulon lauseketta.

$$\begin{aligned} ab &= 28q \cdot 21r \\ &= 4 \cdot 7q \cdot 3 \cdot 7r \\ &= 12 \cdot 49qr \end{aligned}$$

Luku ab voidaan esittää kokonaislukujen tulona niin, että yksi tulon tekijöistä on luku 12.

Siis luku ab on jaollinen luvulla 12. $\square$

Kirjoitetaan oletus (eli lähtötiedot) näkyviin.

Kirjoitetaan väite näkyviin.

Aloitetaan päättely oletuksesta.

Perustellaan, miksi väite on tosi.

4.11

a) Koska

$$6 \cdot 6 = 36 < 38 \text{ ja } 6 \cdot 7 = 42 > 38,$$

niin luku 38 ei ole jaollinen luvulla 6.

b) Koska $72 = 6 \cdot 12$, niin luku 72 on jaollinen luvulla 6.

c) Koska

$$6 \cdot (-8) = -48 > -52 \text{ ja } 6 \cdot (-9) = -54 < -52,$$

niin luku -52 ei ole jaollinen luvulla 6.

d) Koska $102 = 6 \cdot 17$, niin luku 102 on jaollinen luvulla 6.

Vastaus

a) ei

b) on

c) ei

d) on

4.12

- a) Koska $2020 : 4 = 505$, vuosi 2016 oli karkausvuosi.
- b) Koska $1998 : 4 = 499,5$, vuosi 1998 ei ollut karkausvuosi.
- c) Koska $1880 : 4 = 470$, vuosi 1880 oli karkausvuosi.
- d) Koska $1800 : 400 = 4,5$, vuosi 1800 ei ollut karkausvuosi.
- e) Koska $2000 : 400 = 5$, vuosi 2000 oli karkausvuosi.

Vastaus

- a) on
- b) ei
- c) on
- d) ei
- e) on

4.13

a) $51 : 2 = 25,5$

Jakolaskun $51 : 2$ osamäärä on 25
ja jakojäännös $51 - 2 \cdot 25 = 1$.

Jakoyhtälö on $52 = 2 \cdot 25 + 1$.

b) $93 : 3 = 31$

Jakolaskun $93 : 3$ osamäärä on 31
ja jakojäännös 0.

Jakoyhtälö on $93 = 3 \cdot 31 + 0$.

c) Laskimella saadaan $103 : 4 = 25,75$.

Jakolaskun $103 : 4$ osamäärä on 25
ja jakojäännös $103 - 25 \cdot 4 = 3$.

Jakoyhtälö on $103 = 4 \cdot 25 + 3$.

d) Laskimella saadaan $1005 : 8 = 125,625$.

Jakolaskun $1005 : 8$ osamäärä on 125
ja jakojäännös $1005 - 125 \cdot 8 = 5$.

Jakoyhtälö on $105 = 8 \cdot 125 + 5$.

Vastaus

a) osamäärä 25, jakojäännös 1, jakoyhtälö on $52 = 2 \cdot 25 + 1$

b) osamäärä 31, jakojäännös 0, jakoyhtälö on $93 = 3 \cdot 31 + 0$

c) osamäärä 25, jakojäännös 3, jakoyhtälö on $103 = 4 \cdot 25 + 3$

d) osamäärä 125, jakojäännös 5, jakoyhtälö on $1005 = 8 \cdot 125 + 5$

4.14

a) $111 : 10 = 11,1$

Jakolaskun $111 : 10$ osamäärä on 11
ja jakojäännös $111 - 11 \cdot 10 = 1$.

Jakoyhtälö on $111 = 10 \cdot 11 + 1$.

b) $1000 : 10 = 100$

Jakolaskun $1000 : 10$ osamäärä on 100
ja jakojäännös 0.

Jakoyhtälö on $1000 = 10 \cdot 100 + 0$.

c) $-109 : 10 = -10,9$.

Etsitään suurin luvun 10 monikerta, joka on pienempi kuin -109 .

$$10 \cdot (-10) = -100 > -109$$

$$10 \cdot (-11) = -110 < -109$$

Lasketaan lukujen -109 ja -110 erotus.

$$-109 - (-110) = 1$$

Jakoyhtälö on $-109 = 30 \cdot (-11) + 1$.

d) $-998 : 10 = -99,8$.

Etsitään suurin luvun 10 monikerta, joka on pienempi kuin -998 .

$$10 \cdot (-99) = -990 > -998$$

$$10 \cdot (-100) = -1000 < -998$$

Lasketaan lukujen -998 ja -1000 erotus.

$$-998 - (-1000) = 2$$

Jakoyhtälö on $-998 = 10 \cdot (-100) + 2$.

Vastaus

a) $111 = 10 \cdot 11 + 1$

b) $1000 = 10 \cdot 100 + 0$

c) $-109 = 30 \cdot (-11) + 1$

d) $-998 = 10 \cdot (-100) + 2$

4.15

a) Appletilla kokeilemalla saadaan $37 = 18 \cdot 2 + 1$.

Siis $q = 2$ ja $r = 1$.

b) Appletilla kokeilemalla saadaan $6 = 18 \cdot 0 + 6$.

Siis $q = 0$ ja $r = 6$.

c) Appletilla kokeilemalla saadaan $-128 = 18 \cdot (-8) + 16$.

Siis $q = -8$ ja $r = 16$.

Vastaus

a) $q = 2$ ja $r = 1$

b) $q = 0$ ja $r = 6$

c) $q = -8$ ja $r = 16$

4.16

Oletetaan, että n on kokonaisluku.

Kirjoitetaan oletus
(eli lähtötiedot)
näkyviin.

Tehtävänä on osoittaa, että luku $n(n+1)(2n+1)$
on jaollinen luvulla 6.

Kirjoitetaan väite
näkyviin.

Jakoyhtälön nojalla jokainen kokonaisluku n voidaan
esittää muodossa

Aloitetaan päättely
oletuksesta.

$$n = 6q, \quad n = 6q + 1, \quad n = 6q + 2, \quad n = 6q + 3, \\ n = 6q + 4 \quad \text{tai} \quad n = 6q + 5,$$

missä q on kokonaisluku.

1) Jos $n = 6q$, niin

$$\begin{aligned} & n(n+1)(2n+1) \\ &= 6q(6q+1)(2 \cdot 6q+1) \\ &= 6q(6q+1)(12q+1). \end{aligned}$$

2) Jos $n = 6q + 1$, niin

$$\begin{aligned} & n(n+1)(2n+1) \\ &= (6q+1)((6q+1)+1)(2(6q+1)+1) \\ &= 432q^3 + 324q^2 + 78q + 6 \\ &= 6 \cdot (72q^3 + 54q^2 + 13q + 1). \end{aligned}$$

Sievennetään
CAS-laskimella.

3) Jos $n = 6q + 2$, niin

$$\begin{aligned} & n(n+1)(2n+1) \\ &= (6q+2)(6q+2+1)(2 \cdot (6q+2)+1) \\ &= 432q^3 + 540q^2 + 222q + 30 \\ &= 6(72q^3 + 90q^2 + 37q + 5). \end{aligned}$$

4) Jos $n = 6q + 3$, niin

$$\begin{aligned} & n(n+1)(2n+1) \\ &= (6q+3)(6q+3+1)(2 \cdot (6q+3)+1) \\ &= 432q^3 + 756q^2 + 438q + 84 \\ &= 6(72q^3 + 126q^2 + 73q + 14). \end{aligned}$$

5) Jos $n = 6q + 4$, niin

$$\begin{aligned} & n(n+1)(2n+1) \\ &= (6q+4)(6q+4+1)(2 \cdot (6q+4)+1) \\ &= 432q^3 + 972q^2 + 726q + 180 \\ &= 6(72q^3 + 162q^2 + 121q + 30). \end{aligned}$$

6) Jos $n = 6q + 5$, niin

$$\begin{aligned} & n(n+1)(2n+1) \\ &= (6q+5)(6q+5+1)(2 \cdot (6q+5)+1) \\ &= 432q^3 + 1188q^2 + 1086q + 330 \\ &= 6(72q^3 + 198q^2 + 181q + 55). \end{aligned}$$

Jokaisessa tapauksessa luku $n(n+1)(2n+1)$ voidaan esittää kokonaislukujen tulona niin, että yksi tulon tekijöistä on luku 6.

Perustellaan, miksi väite on tosi.

Siis luku $n(n+1)(2n+1)$ on jaollinen luvulla 6. $\square$

4.17

Oletetaan, että n on kokonaisluku.

Kirjoitetaan oletus
(eli lähtötiedot)
näkyviin.

Tehtävänä on osoittaa, että luku $(n+1)^2 - (n-1)^2$
on jaollinen luvulla 4.

Kirjoitetaan väite
näkyviin.

Muokataan väitteen lauseketta.

$$\begin{aligned}(n+1)^2 - (n-1)^2 \\&= n^2 + 2n + 1 - (n^2 - 2n + 1) \\&= n^2 + 2n + 1 - n^2 + 2n - 1 \\&= 4n\end{aligned}$$

Luku $(n+1)^2 - (n-1)^2$ voidaan esittää
kokonaislukujen tulona niin, että yksi tulon tekijöistä
on luku 4.

Perustellaan, miksi
väite on tosi.

Siis luku $(n+1)^2 - (n-1)^2$ on jaollinen luvulla 4.

□

4.18

- a) Oletetaan, että a on kokonaisluku, c on positiivinen kokonaisluku ja $c \mid a$.

Kirjoitetaan oletus (eli lähtötiedot) näkyviin.

Tehtävänä on osoittaa, että $c \mid na$, missä n on kokonaisluku.

Kirjoitetaan väite näkyviin.

Oletuksen mukaan luku a on jaollinen luvulla c . Siten $a = cq$, missä q on jokin kokonaisluku.

Tästä seuraa, että $na = ncq = cnq$.

Koska $na = c \cdot nq$, niin luku na on jaollinen luvulla c .

Perustellaan, miksi väite on tosi.

Väite $c \mid na$ pitää paikkansa. $\square$

Esimerkiksi $2 \mid 6$ ja $2 \mid 5 \cdot 6$.

b) Oletetaan, että
 a ja b ovat kokonaislukuja,
 c on positiivinen kokonaisluku,
 $c \mid a$ ja $c \mid b$.

Kirjoitetaan oletus
(eli lähtötiedot)
näkyviin.

Tehtävänä on osoittaa, että $c \mid a + b$.

Kirjoitetaan väite
näkyviin.

Oletuksen mukaan $a = cq$ ja $b = cr$,
missä q ja r ovat jotkin kokonaisluvut.

Tästä seuraa, että $a + b = cq + cr = c(q + r)$.

Koska $a + b = c(q + r)$, niin luku $a + b$ on
jaollinen luvulla c .

Perustellaan, miksi
väite on tosi.

Väite $c \mid a + b$ pitää paikkansa. $\square$

Esimerkiksi $2 \mid 4$, $2 \mid 6$ ja $2 \mid 4 + 6$.

c) Oletetaan, että
 a ja b ovat kokonaislukuja,
 c on positiivinen kokonaisluku,
 $c \mid a$ ja $c \nmid b$.

Kirjoitetaan oletus
(eli lähtötiedot)
näkyviin.

Tehtävänä on osoittaa, että $c \nmid a + b$.

Kirjoitetaan väite
näkyviin.

Oletetaan vastoin väitettä, että $c \mid a + b$,
ja osoitetaan, että siitä seuraa ristiriita.

Osoitetaan, että jos
väite ei ole tosi,
niin seuraa ristiriita.

Alkuoletuksen mukaan luku a on jaollinen
luvulla c , mutta luku b ei ole jaollinen luvulla c .

Siten $a = cq$, missä q on jokin kokonaisluku.

Jos $c \mid a + b$, niin $a + b = cr$, missä r on jokin
kokonaisluku.

Tästä seuraa, että $b = cr - a = cr - cq = c(r - q)$

Tämän mukaan luku b on jaollinen luvulla c ,
mikä on ristiriidassa alkuoletuksen kanssa.

Koska oletus $c \mid a + b$ johtaa ristiriitaan,
niin väite $c \nmid a + b$ pitää paikkansa. $\square$

Perustellaan, miksi
väite on tosi.

Esimerkiksi $2 \mid 4$, $2 \nmid 5$ ja $2 \nmid 4 + 5$.

4.19

Oletetaan, että a on pariton kokonaisluku.

Kirjoitetaan oletus
(eli lähtötiedot)
näkyviin.

Tehtävänä on osoittaa, että luku $a^2 - 1$
on jaollinen luvulla 8.

Kirjoitetaan väite
näkyviin.

Koska a on pariton luku, niin $a = 2n + 1$,
missä n on jokin kokonaisluku.

Aloitetaan päättely
oletuksesta.

Muokataan väitteen lauseketta.

$$\begin{aligned}a^2 - 1 &= (2n + 1)^2 - 1 \\&= 4n^2 + 4n + 1 - 1 \\&= 4n^2 + 4n \\&= 4n(n + 1)\end{aligned}$$

Koska luvut n ja $n + 1$ ovat kaksi peräkkäistä
kokonaislukua, niin toinen niistä on parillinen ja
voidaan esittää tulona $2q$, missä q on jokin
kokonaisluku.

Luku $a^2 - 1$ voidaan siis esittää kokonaislukujen
tulona niin, että yksi tulon tekijöistä on luku $4 \cdot 2 = 8$.

Perustellaan, miksi
väite on tosi.

Luku $a^2 - 1$ on jaollinen luvulla 8. $\square$

4.20

Oletetaan, että n on kokonaisluku.

Kirjoitetaan oletus
(eli lähtötiedot)
näkyviin.

Tehtävänä on osoittaa, että 11 peräkkäisen kokonaisluvun summa

Kirjoitetaan väite
näkyviin.

$$n + (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + 10)$$

on jaollinen luvulla 11.

Muokataan summan lauseketta.

Aloitetaan päättely
oletuksesta.

$$\begin{aligned} & n + (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + 10) \\ &= \underbrace{n + n + \dots + n}_{11 \text{ kpl}} + \underbrace{1 + 2 + \dots + 10}_{10 \text{ peräkkäistä lukua}} \\ &= 11n + 55 \\ &= 11 \cdot (n + 5) \end{aligned}$$

Summa voidaan esittää kokonaislukujen tulona niin, että yksi tulon tekijöistä on luku 11.

Perustellaan, miksi
väite on tosi.

Siiis summa on jaollinen luvulla 11. $\square$

4.21

Oletetaan, että n ja k ovat kokonaislukuja. Tällöin luvut

$$n, n+1, n+2, \dots, n+k-1$$

ovat k peräkkäistä kokonaislukua. Lasketaan niiden summa tehtävässä annetulla kaavalla.

$$\begin{aligned} & n + (n+1) + (n+2) + \dots + (n+k-1) \\ &= \underbrace{n + n + \dots + n}_{k \text{ kpl}} + \underbrace{1 + 2 + \dots + (k-1)}_{k-1 \text{ peräkkäistä lukua}} \\ &= kn + \frac{(k-1)(k-1+1)}{2} \\ &= kn + \frac{(k-1)k}{2} \\ &= k\left(n + \frac{k-1}{2}\right) \end{aligned}$$

Summa on jaollinen luvulla k täsmälleen silloin, kun luku $\frac{k-1}{2}$ on kokonaisluku. Luku $\frac{k-1}{2}$ on kokonaisluku täsmälleen silloin, kun k on pariton luku.

4.22

- a) Oletetaan, että a ja b ovat kokonaislukuja, ja $a^3 + b^3$ on jaollinen luvulla 3.

Kirjoitetaan oletus (eli lähtötiedot) näkyviin.

Tehtävänä on osoittaa, että $(a + b)^3$ on jaollinen luvulla 3

Kirjoitetaan väite näkyviin.

Oletuksen mukaan $a^3 + b^3 = 3q$, missä q on jokin kokonaisluku.

Aloitetaan päättely oletuksesta.

Muokataan väitteen lauseketta.

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 \\ &= 3q + 3a^2b + 3ab^2 \\ &= 3(q + 3a^2b + 3ab^2)\end{aligned}$$

Voidaan sieventää CAS-laskimella.

Koska luku $(a + b)^3$ voidaan esittää tulona, jonka yksi tekijä on 3, niin se on jaollinen luvulla 3.

Perustellaan, miksi väite on tosi.

Väite pitää paikkansa. $\square$

b) Oletetaan, että a ja b ovat kokonaislukuja, ja $(a + b)^3$ on jaollinen luvulla 3.

Kirjoitetaan oletus (eli lähtötiedot) näkyviin.

Tehtävänä on osoittaa, että $a^3 + b^3$ on jaollinen luvulla 3

Kirjoitetaan väite näkyviin.

Oletuksen mukaan $(a + b)^3 = 3q$, missä q on jokin kokonaisluku.

Aloitetaan päättely oletuksesta.

Muokataan lauseketta.

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= 3q \\ a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 &= 3q \\ a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 &= 3q \\ a^3 + b^3 &= 3q - 3a^2b - 3ab^2 \\ &= 3(q - a^2b - ab^2)\end{aligned}$$

Voidaan sieventää CAS-laskimella.

Koska luku $a^3 + b^3$ voidaan esittää tulona, jonka yksi tekijä on 3, niin se on jaollinen luvulla 3.

Perustellaan, miksi väite on tosi.

Väite pitää paikkansa. $\square$

4.23

Tehtävänä on osoittaa, että $997^3 + 2003^3$ on jaollinen luvulla 3.

Tehtävän 4.22 b-kohdassa todistetaan lause:

Jos luku $(a + b)^3$ on jaollinen luvulla 3,
niin luku $a^3 + b^3$ on jaollinen luvulla 3.

Koska

$$\begin{aligned}(997 + 2003)^3 &= 3000^3 \\ &= (3 \cdot 1000)^3 \\ &= 3^3 \cdot 1000^3 \\ &= 3 \cdot 3^2 \cdot 1000^3,\end{aligned}$$

niin luku $(997 + 2003)^3$ on jaollinen luvulla 3.

Tehtävän 4.22 perusteella luku $997^3 + 2003^3$ on jaollinen luvulla 3.