

TEHTÄVÄSARJOUJA

SARJA A

1. Ratkaise epäyhtälö $\frac{3x+5}{x+1} < 2$.
2. Osoita, että yhtälöllä $x^9 + x^7 - 1 = 0$ on juuri, jonka kolmeedesimaalinen likiarvo on 0,917, ja että yhtälöllä ei ole muita juuria.

3. Suorakulmaisen särmiön muotoisen katoksen neljän muotoiset päädylt, katto ja toinen sivuseinät rakennetaan aaltopellistä. Pellin on käytettävissä 40 m². Määritä vajan mitat niin, että sen tilavuus on mahdollisimman suuri. Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.

4. Kahden kadun kulmaukseen rajattavan suorakulmion muotoisen tontin pinta-alaaksi on määrätty 1 200 m². Rakennuskeloaue ulottuu 10 metrin päähän pääkadusta ja 5 metrin päähän sivukadusta. Määritä tontin mitat niin, että jäljelle jäävä rakentamiskelpoinen alue on mahdollisimman suuri.

5. Osoita, että funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^4 - 3x^3 + x^2 + 5}$$

koko reaali lukujen joukko \mathbb{R}

6. Käyrälle $y = x^3$ pisteeseen (a, a^3) , missä $a \neq 0$, piirretty tangentti ja normaali rajaavat yhdessä y-akselin kanssa kolmion. Mitä raja-arvoa kolmion pinta-ala lähenee, kun a lähenee nolaa?

SARJA B

1. Ratkaise yhtälö $\frac{x}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{2}{x^2-4}$.

2. Jos kappale singotaan Kuun pinnalta vinosti ylöspäin 45°:n kulmassa, kappaleen lentorata noudattaa parabolista $y = x - \frac{1,6}{v^2}x^2$, missä v on lähtönopeus (m/s). Heittopaikka on origossa ja yksikkönä on metri. Kuinka korkealla lähtönopeudella 20 m/s heitetty höyhen käy?

3. Matti on varannut muutaman vaollisen vaarisperunoistaan myytäväksi kylän kesätorilla. Nostettuun joiakin varsia muista vaaoista hän laski, että myytäviä perunoita on 120 kg. Hän arvioi, että perunaerä paino lisääntyy kahdeksalla kilogrammalla vuorokaudessa. Päivän hinta kesätorilla on 6,20 euroa kilolta, ja kilohinta laskee 20 senttiä joka päivä. Kuinka monen päivän kuluttua Mattin kannattaa kaivaa perunat maasta ja myydä ne torilla?

4. Osoita, että funktion

$$f(x) = -2x^3 + 4x^2 - x + 3$$

arvon 1 kohdalle piirretty tangentti on myös funktion f kuvaajan normaali.

5. Osoita, että kaikilla muuttujan x arvoilla on $(x+1)^4 \geq \frac{1}{2}x + \frac{5}{16}$.

6. Polynomifunktiosta f tiedetään, että sen derivaatta kohdassa 1 on positiivinen ja että $f''(x) = x^3 + x^2 - 2$. Kuinka monta nollakohtaa funktiolla f on?

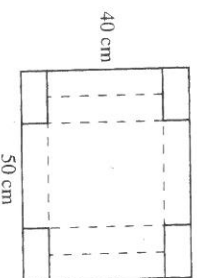
SARJA C

1. Olkoon $f(x) = x^2 - 6x + 14$. Mikä on

- a) funktion f pienin arvo
b) funktion $\frac{1}{f}$ suurin arvo?

2. Tautiepidemian kulun ennustamiseen käytettiin seuraavaa matemaattista mallia: Kun taudin leviämisen alkamisesta on kulunut x vuorokautta, sairastavien osuus prosentteina koko kaupungin väestöstä on $f(x) = -0,02x^3 + 0,36x^2$.
- a) Kuinka monta vuorokautta kestää, ennen kuin sairastavien määrä kääntyy laskuun?
b) Kuinka monta prosenttia väestöstä on enimmillään sairana?
c) Kuinka monen vuorokauden kuluttua sairastavien määrä lisääntyy nopeimmmin?

3. Suorakulmion muotoisen pahvillevyn sivujen pituudet ovat 40 cm ja 50 cm. Levyn jokaisesta nurkasta leikataan kuvion mukaisesti samanlainen suorakulmion muotoinen pala, jonka sivujen suhde on 1 : 2. Jäljelle jäänyt levy taiteaan katkoviivoja pitkin laatikoksi, jonka toiset leikkattavan palan lyhyemmän sivun tulee olla, jotta laatikon tilavuus olisi mahdollisimman suuri?



4. Pisteet $P(x_1, y_1)$ ja $Q(x_2, y_2)$ ovat kaksi eri pistettä parabolilla $y = ax^2$ (missä $a \neq 0$). Parabolille piirretään pisteiden P ja Q kautta kulkevan suoran suunnitainen tangentti. Mikä on sivuamispisteen x -koordinaatti?

5. Millä vakion a arvoilla funktio

$$f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4ax + 1$$

on kaikkialla aidosti kasvava tai kaikkialla aidosti vähenevä?

6. Mihin käyrän $y = (x-1)^2$ pisteisiin piirretty käyrän tangentti rajaa kolmion yhdessä positiivisten koordinaatiksielien kanssa? Mikä näin saatavaan kolmion suurin mahdollinen pinta-ala on?