

7.lk matematiikka

Geometria 3

Versio 2.8 (2025)

Janne Koponen

Geometria 3

Tämä moniste on tehty 7.lk. geometrian opetukseen ja olen käyttänyt sitä itse Hatanpään koulussa. Jos joku opettaja haluaa tätä kuitenkin käyttää omassa opetuksessaan, on se sallittua. Monisteen eteenpäin myyminen ja omiin nimiin ottaminen on kuitenkin kielletty.

Muokkaan ja korjailen monistetta omien tarpeideni mukaan ja julkaisen uusimman version (jos muutoksia tulee) osoitteessa:

<https://peda.net/p/joykop/mm>

Tämä moniste on suunniteltu siten, että oppilas tekee suurimman osan tehtävistä tähän monisteeseen. Osa tehtävistä on kuitenkin vihkotehtäviä.

Tämä moniste sisältää 7.lk. geometriasta viimeisen osion, noin yhden kolmanneksen. Monisteet Geometria 1 ja Geometria 2 sisältävät alkuosat. Arvioinnin kannalta näiden kolmen monisteen arvostelu on ollut kahden koealueen asiat, eli omassa arvostelussani huomioin jokaisen monisteen sisällöt 2/3 painotuksella verrattuna tyyppilliseen koealueeseen. Tämä siis tiedoksi omille oppilailleni, joku muuhan voi arvioida toisenlaisella painotuksella.

Janne Koponen

Sisälllys

16.	Kolmio	4
17.	Nelikulmiot.....	8
18.	Monikulmiot.....	12
19.	Pituuksien ja pinta-alojen muutokset	16
20.	Pinta-aloja ja piiri	18
21.	Yhtenevyys	24
22.	Symmetria suoran ja pisteen suhteen	28
23.	Kierto ja siirto (jousto)	35
24.	Kertaus 3	36
	Vastauksia	38

16. Kolmio

Kolmiossa on kolme suoraa sivua ja kolme kulmaa.

Kolmion merkitsemiseen on käytössä oma symboli Δ

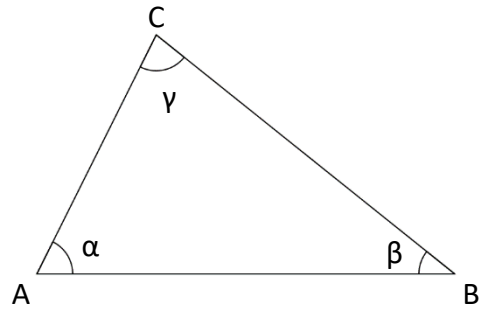
Kolmio nimetään sen kulmapisteiden avulla, esim.

Viereinen kolmion on:

$$\text{Kolmio } ABC = \Delta ABC$$

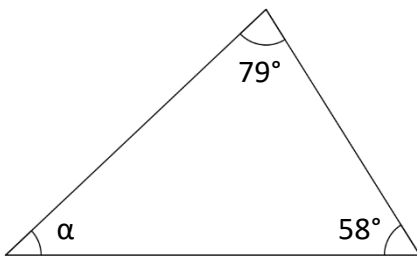
Kolmion kulmien summa on aina 180° .

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$



Esimerkki 1

Määritä kolmiosta kulma α .



Koska kolmion kulmien summa on aina 180° , saadaan kolmas kulma laskettua laskulla:

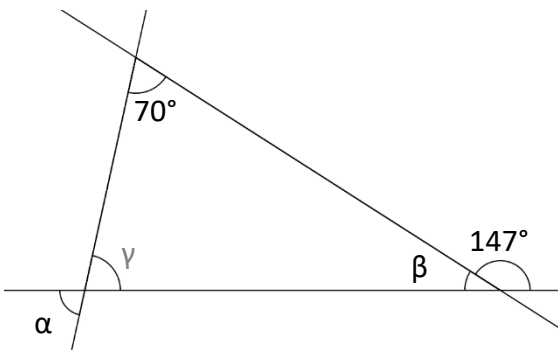
$$\alpha = 180^\circ - 79^\circ - 58^\circ = 43^\circ$$

Joskus sama lasku on kätevämpi laskea toisella pidemmällä tavalla, joka tuottaa kuitenkin saman tuloksen.

$$\alpha = 180^\circ - (79^\circ + 58^\circ) = 180^\circ - 137^\circ = 43^\circ$$

Esimerkki 2

Määritä kulmat α ja β



β saadaan laskettua vieruskulman avulla.

$$\beta = 180^\circ - 147^\circ = 33^\circ$$

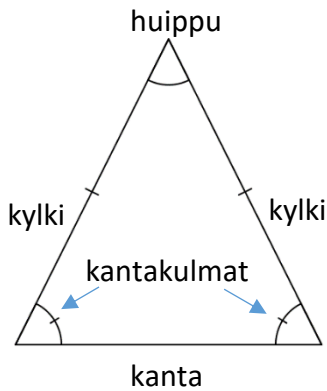
Kuvaan on merkitty kulma γ (harmaalla), jotta α voidaan laskea.

$$\gamma = 180^\circ - 70^\circ - 33^\circ = 77^\circ$$

$$\alpha = 77^\circ \text{ ristikulma}$$

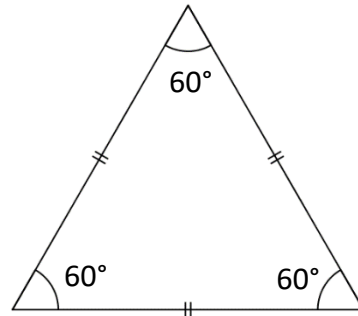
Tasakylkinen kolmio:

- Kaksi yhtä pitkää sivua, kyljet
- Kaksi yhtä suurta kulmaa, kantakulmat
- Kolmas kulma on huippu, huippukulma



Tasasivuinen kolmio:

- Kaikki kolme sivua yhtä pitkiä
- Kaikki kolme kulmaa yhtä suuria
- On myös tasakylkinen, erikoistapaus



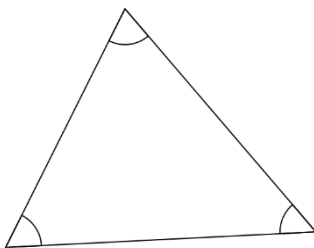
Yllä olevissa kuvissa on "koristeltu" sivuja ja kulmia väkäsin.

- Sivut, joissa on yhtä monta väkästä, ovat keskenään yhtä suuria.
- Vastaavasti kulmat, joissa on yhtä monta väkästä, ovat keskenään yhtä suuria.

Kolmioiden yleinen luokittelu

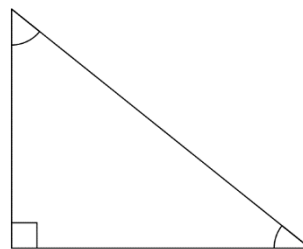
Teräväkulmainen kolmio

- Kaikki kolme kulmaa ovat teräviä



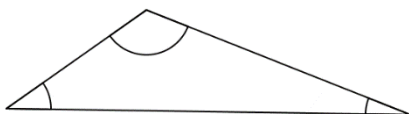
Suorakulmainen kolmio

- Yksi kulma on suorakulma
- Kaksi muuta kulmaa ovat aina teräviä
- Tärkein tunnistaa



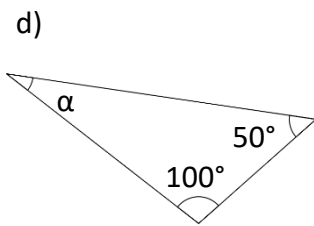
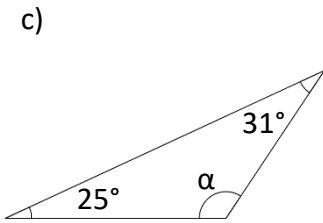
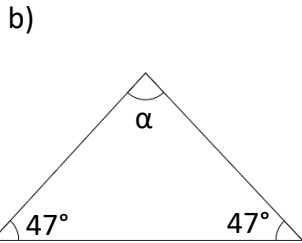
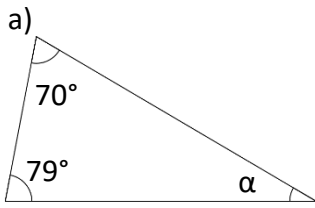
Tylppäkulmainen kolmio

- Yksi kolmion kulmista on tylppä
- Kaksi muuta kulmaa ovat aina teräviä

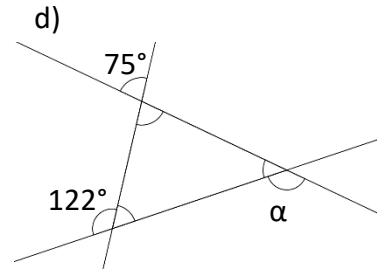
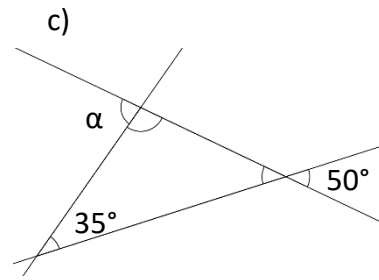
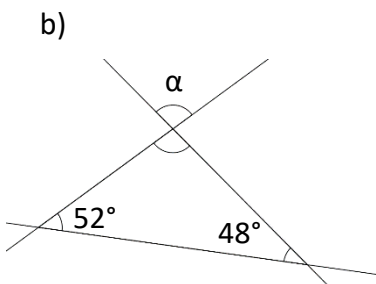
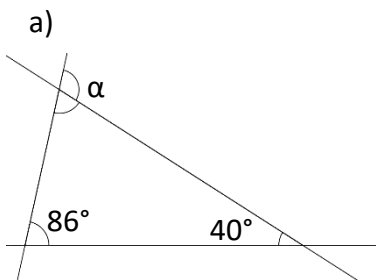


Tehtäviä

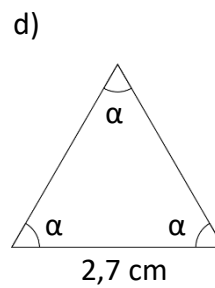
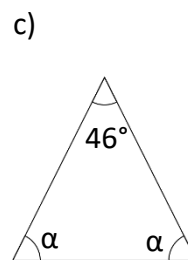
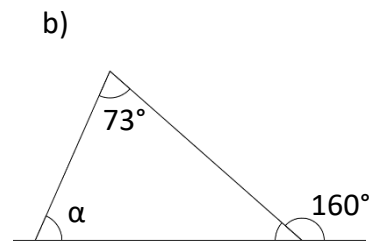
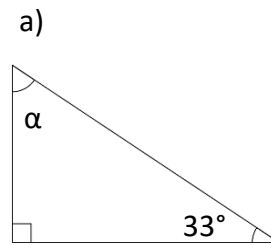
1. Määritä kulma α



2. Määritä kulma α

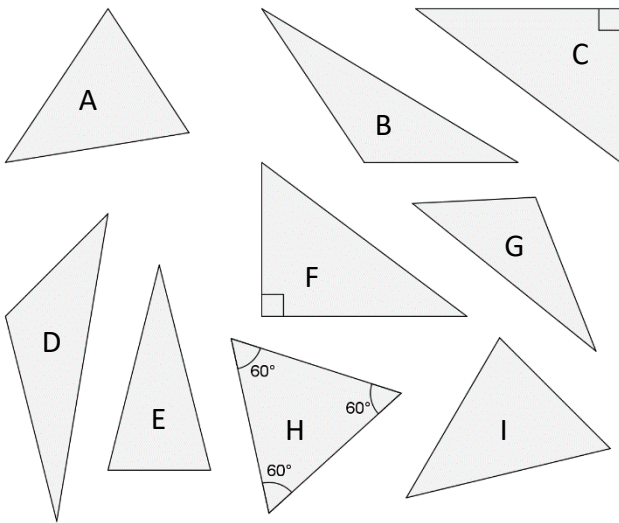


3. Määritä kulma α



4. Mitkä kolmioista ovat:

- a) teräväkulmaisia b) tylppäkulmaisia
 c) suorakulmaisia d) tasakylkisiä
 e) tasasivuisia f) ei mitään edellisistä

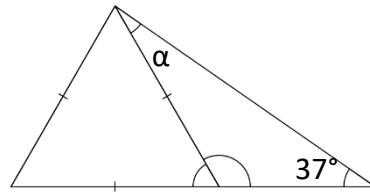


5. Kuinka monta tylppää kulmaa kolmiossa voi olla? Perustelee.

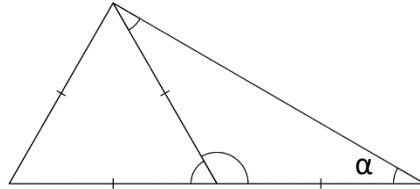
6. Kuinka monta suoraa kulmaa kolmiossa voi olla? Perustelee.

7. Ratkaise kulma α

a) (Huomaa kolme yhtä pitkää sivua.)

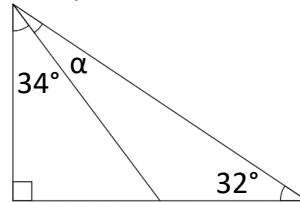


b) (Huomaa neljä yhtä pitkää sivua.)

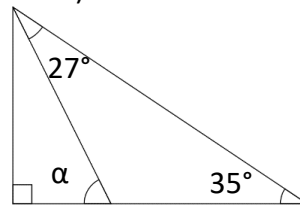


8. Ratkaise kulma α .

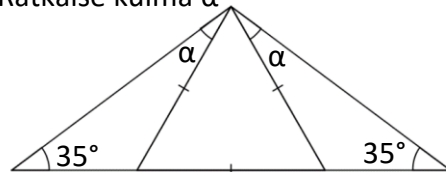
a)



b)



9. Ratkaise kulma α



10. Todista vihkoosi, että kolmion kulmien summa on 180°

Todistaminen tarkoittaa sitä, että sinun pitää vanhojen tietojen avulla perustella aukottomasti, miksi jokaisen kolmion kulmien summa on 180° .

Käytä apuna tietoja: vieruskulma, ristikulma ja samankohtaisten kulmien yhtäsuuruus (kun suorat ovat yhdensuuntaisia).

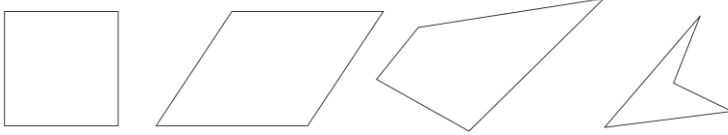
Piirroksella kannattaa havainnollistaa asiaa.

17. Nelikulmiot

Nelikulmiossa on neljä suoraa sivua ja neljä kulmaa.

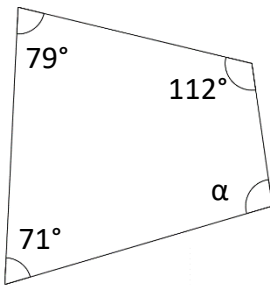
Nelikulmion kulmien summa on 360°

Erilaisia nelikulmioita



Esimerkki 1.

Ratkaise kuviosta α .



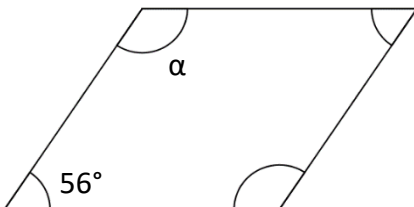
Kulmien summa on 360° , joten α saadaan laskulla

$$\alpha = 360^\circ - (112^\circ + 79^\circ + 71^\circ) = 360^\circ - 262^\circ = 98^\circ$$

Simppeliä

Esimerkki 2.

Ratkaise suunnikkaasta kulma α .



Suunnikkaasta kerrotaan seuraavalla sivulla. Tiedämme siksi, että kaksi merkitsemätöntä kulmaa ovat yhtä suuret kuin niiden vastakkaisetkin kulmat. Ratkaisutapoja on useita, alla näytetään kaksi esimerkkiä.

Tapa 1.

Muodostetaan yhtälö

$$2\alpha + 2 \cdot 56^\circ = 360^\circ$$

$$2\alpha + 112^\circ = 360^\circ$$

$$2\alpha = 360^\circ - 112^\circ$$

$$2\alpha = 248^\circ \quad || : 2$$

$$\frac{2\alpha}{2} = \frac{248^\circ}{2}$$

$$\alpha = 124^\circ$$

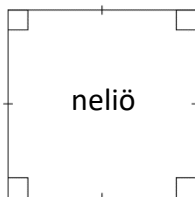
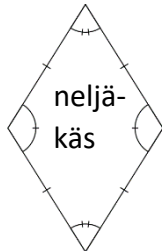
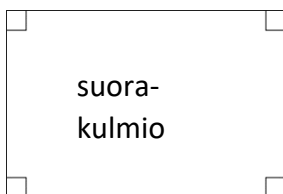
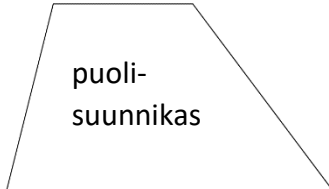
Tapa 2

Suunnikkaassa kaksi kappaletta kumpaakin kulmaa. Tällöin vierekkäisten kulmien summa on puolet koko suunnikkaan kulmien summasta eli 180° . α saadaan siis vähennyslaskulla

$$\alpha = 180^\circ - 56^\circ = 124^\circ$$

(Huomaa, että tässä pelkkä lasku ei oikeastaan riitä, vaan tarvitaan sanallinenkin perustelu, että tällä tavalla saa laskea.)

Nelikulmioiden luokittelu (kirjoita itse nuolen viereen, mitä lisäominaisuuksia milloinkin tulee)



Nelikulmio:

- neljä kulmaa
- neljä suoraa sivua

Kaikki seuraavat ovat nelikulmioita, vaikkei sitä erikseen enää sanota.

Puolisuunnikas:

- kaksi sivua samansuuntaisia

Suunnikas:

- vastakkaiset sivut samansuuntaisia
- vastakkaiset sivut yhtä pitkiä
- vastakkaiset kulmat yhtä suuria
- * Kun yksi toteutuu, toteutuvat muutkin

Suorakulmio:

- vastakkaiset sivut samansuuntaisia
- vastakkaiset sivut yhtä pitkiä
- kaikki kulmat suorakulmia
- * Jos viimeinen toteutuu, toteutuvat kaksi ensimmäistäkin kohtaa

Neljäkäs:

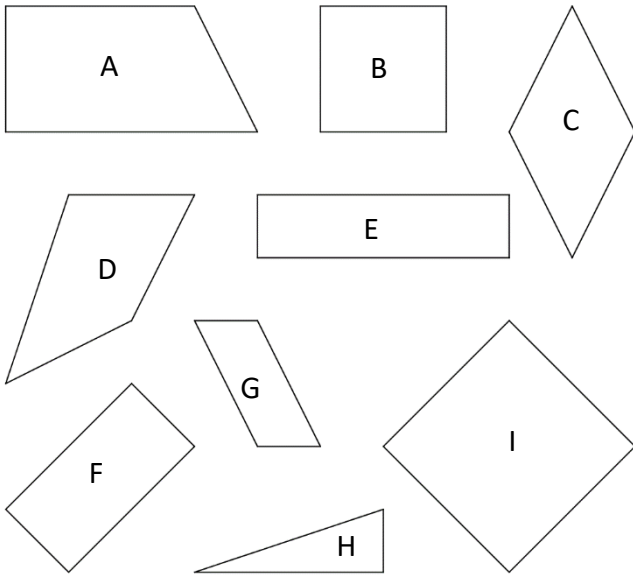
- vastakkaiset sivut samansuuntaisia
- kaikki sivut yhtä pitkiä
- vastakkaiset kulmat yhtä suuria

Neliö:

- vastakkaiset sivut samansuuntaisia
- kaikki sivut yhtä pitkiä
- kaikki kulmat suorakulmia

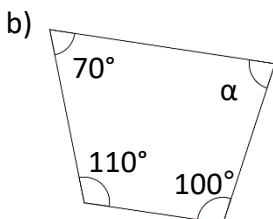
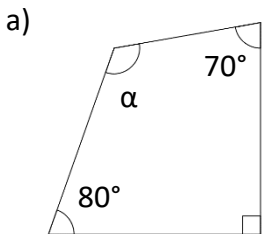
Tehtäviä

1. Mitkä seuraavista kuvioista ovat
 a) suunnikkaita b) neliöitä
 c) suorakulmioita d) puolisuunnikkaita

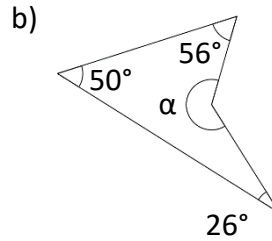
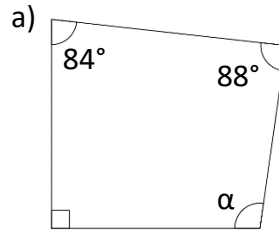


2. Tee seuraavat selitystehtävät vihkoosi. Perustele huolellisesti. Pelkkä vastaus "kyllä" tai "ei" ei ole riittävä vastaus.
 a) Onko suunnikas aina myös suorakulmio?
 b) Onko neliö aina myös suunnikas.
 c) Voiko puolisuunnikas olla myös suunnikas.
 d) Voiko neliö olla myös nelikulmio.

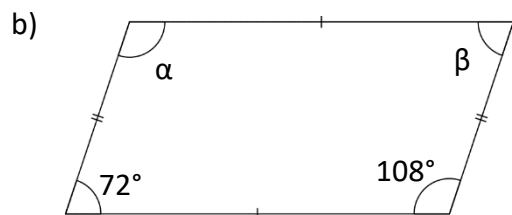
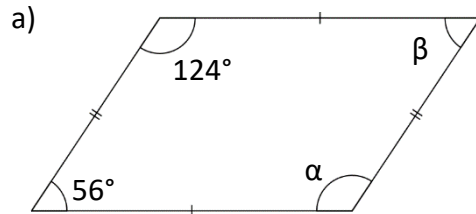
3. Ratkaise kuvioista α



4. Ratkaise kuvioista α

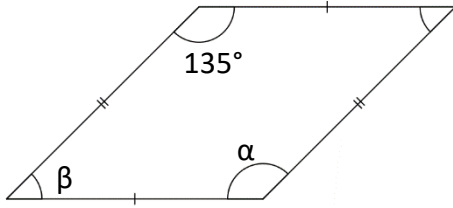


5. Ratkaise suunnikkaasta α ja β . Perustele.

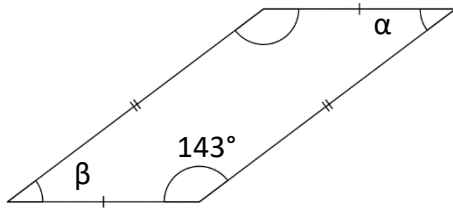


6. Ratkaise suunnikkaasta α ja β . Perustele.

a)



b)



7. Tee seuraavat selitystehtävät vihkoosi. Kannattaa piirtää myös havainnollistava kuva.

- Jos suunnikkaan yksi kulma on 30° , kuinka suurina ovat muut kulmat.
- Jos suunnikkaan yksi kulma on 50° , kuinka suurina ovat muut kulmat.
- Jos suunnikkaan yksi kulma on 90° , kuinka suurina ovat muut kulmat.

8. Piirrä vihkoosi nelikulmio, jossa on

- tasan yksi tylppä kulma
- tasan kaksi tylppää kulmaa
- tasan kolme tylppää kulmaa
- tasan neljä tylppää kulmaa.

9. Piirrä vihkoosi nelikulmio, jossa on

- yksi kupera kulma ja yksi tylppä kulma
- yksi kupera kulma, mutta ei yhtään tylppää kulmaa.

10. Todista vihkoosi, että nelikulmion kulmien summa on 360° .

Todistaminen tarkoittaa sitä, että sinun pitää vanhojen tietojen avulla perustella aukottomasti, miksi jokaisen nelikulmion kulmien summa on 360° .

Käytä apuna tietoa siitä, että kolmion kulmien summa on 180° . Piirroksilla kannattaa havainnollistaa asiaa.

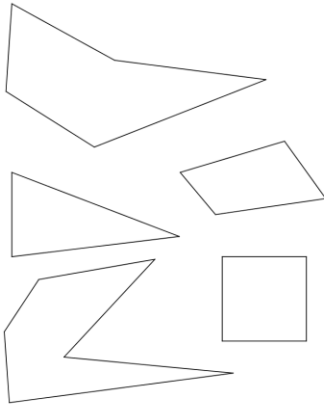
Tehtävä ei ole helppo, mutta kun sen tajuaa, on ratkaisu ilmiselvä

18. Monikulmiot

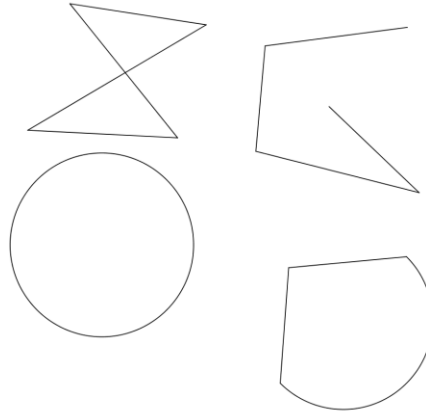
Monikulmio muodostuu suljetusta murtoviivasta, joka ei leikkaa itseään.

- Murtoviiva on janojen ketju, joista seuraava alkaa siitä pisteestä, mihin edellinen loppuu.
- Suljettu tarkoittaa sitä, että murtoviiva loppuu samaan paikkaan, mistä alkoi.

Monikulmioita



Ei-monikulmioita



Monikulmioiden nimeäminen

Monikulmiot nimetään sen mukaan, kuinka monta kulmaa siinä on.

Esimerkiksi kuusikulmainen monikulmio on kuusikulmio ja 35-kulmainen on 35-kulmio.

Kolmio on nimenä erityistapaus ja lisäksi muutamien lukusanojen kohdalla on käytössä ”vanhah-tavalta” kuulostava muoto. Eli poikkeuksia, jotka kannattaa huomata:

- Kolmio (3 kulmaa)
- Nelikulmio (4 kulmaa)
- Seitsenkulmio (7 kulmaa)
- Kymmenkulmio (10 kulmaa) ja sen johdannaiset

Monikulmion kulmien (astelukujen) summa

Monikulmion kulmien summa saadaan laskettua kaavalla

$$(n - 2) \cdot 180^\circ,$$

missä n on kulmien määrä.

Käytännössä, kun monikulmioon tulee yksi kulma lisää, kasvaa sen kulmien summa aina 180° :lla.

Kolmion kulmien summa on 180° .

Nelikulmion kulmien summa on $180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$.

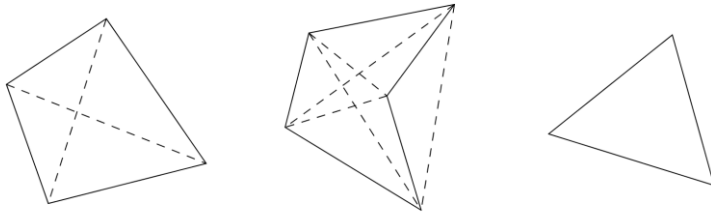
Viisikulmion kulmien summa on $360^\circ + 180^\circ = 540^\circ$

Kun tämän tajuaa, ei ensimmäisille kulmille kaavaa tarvitse muistaa, mutta isommille kulmioille kyllä.

Monikulmion lävistäjät

Lävistäjä on jana, joka kulkee monikulmion kulmasta ei-viereiseen kulmaan.

Alla esimerkkeinä lävistäjiä (katkoviivoilla). Huomaa, että joskus lävistäjä voi kulkea myös monikulmion ulkopuolella, jos monikulmiossa on kuperia kulmia.

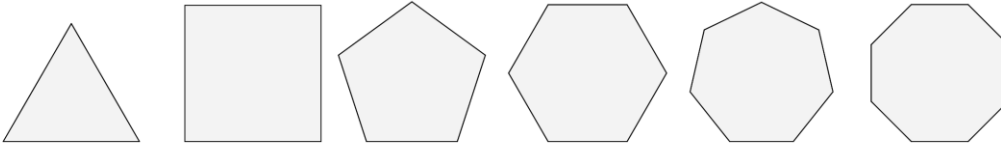


Huom!
Kolmiolla ei ole yhtään lävistäjä. Miksi?

Säännölliset monikulmiot

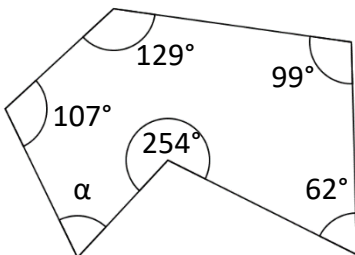
Monikulmion on säännöllinen, jos sen kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja kaikki kulmat yhtä suuria.

Alla kuusi ensimmäistä säännöllistä monikulmiota.



Esimerkki 1.

Laske kulma α .



Kuusikulmion kulmien summa

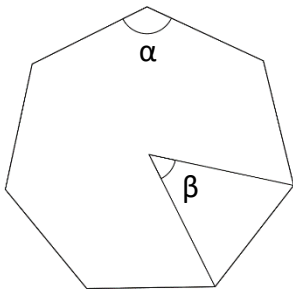
$$(6 - 2) \cdot 180^\circ = 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$$

Sen avulla saadaan α

$$\begin{aligned} \alpha &= 720^\circ - (107^\circ + 129^\circ + 99^\circ + 62^\circ + 254^\circ) \\ &= 720^\circ - 651^\circ = 69^\circ \end{aligned}$$

Esimerkki 2.

Laske kulmat α ja β kuvan säännöllisestä seitsemänsäkulmiöstä yhden desimaalin tarkkuudella.



Seitsemänsäkulmion kulmien summa

$$(7 - 2) \cdot 180^\circ = 5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$$

Koska kaikki seitsemänsäkulman kulmat ovat yhtä suuria kuin α , saadaan se laskulla

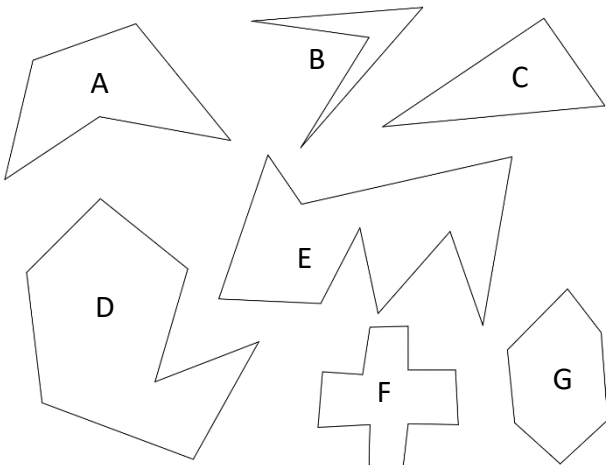
$$\alpha = \frac{900^\circ}{7} = 128,5714 \dots^\circ \approx 128,6^\circ$$

Vastaavasti β on seitsemäsosa täydestä ympyrästä ja se saadaan laskulla

$$\beta = \frac{360^\circ}{7} = 51,42857 \dots^\circ \approx 51,4^\circ$$

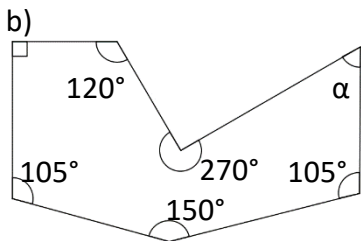
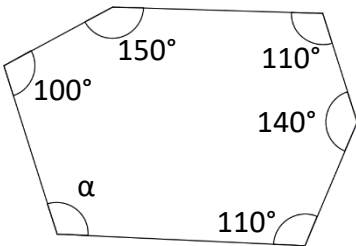
Tehtäviä

1. Nimeä monikulmiot

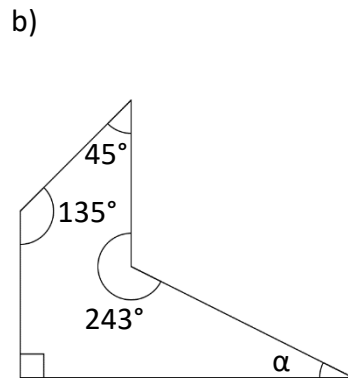
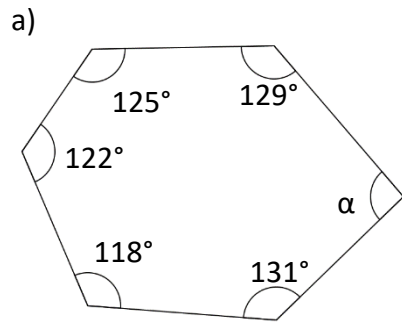


- | | |
|---|---|
| A | B |
| C | D |
| E | F |
| G | |

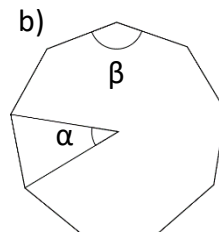
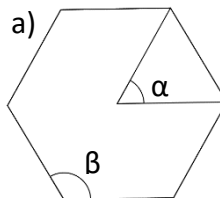
2. Laske kulma α . (Vinkki: Esim. 1.)



3. Laske kulma α



4. Ratkaiset säännöllisistä monikulmioista kulmat α ja β .

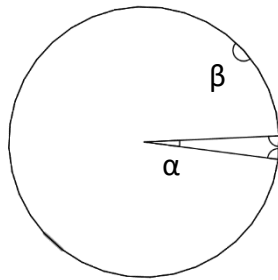


5. Ratkaise vihkoosi säännöllisen monikulmion yhden kulman suuruus
 a) kahdeksankulmiosta,
 b) 12 kulmiosta ja
 c) 20 kulmiosta.

Seuraava ei ole perustehtävä. Saa hypätä yli ja palata tekemään myöhemmin.

6. Kuvassa on säännöllinen 36-kulmio (näyttää jo melkein ympyrältä). Kulmat α ja β ovat vastavia, mitä tehtävän 4. tapauksissa. Ratkaise kulmat α ja β .

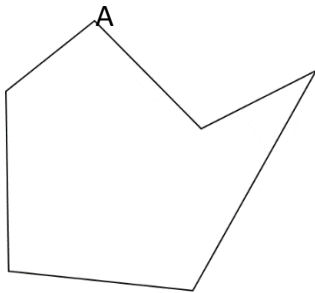
Vinkki. Ratkaise ensin α . β :n ratkaisemisessa käyttää apuna kahta kuvaan merkittyä ylimääräistä kulmaa.



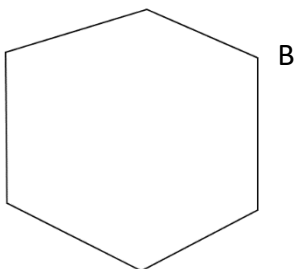
Tehtävä kannattaa tehdä vihkoon. Saa tehdä havainnollistavia apupiirroksia.

ps. Älä välitä siitä, että kuvassa oikeasti on 32-kulmio. Laske siten kuin olisi 36-kulmio.

7. Piirrä kuvioon kaikki lävistäjät, jotka lähtevät pisteestä
 a) A

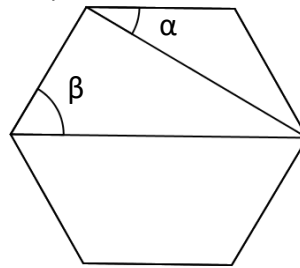


- b) B

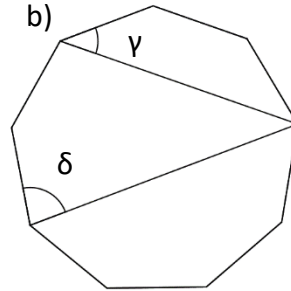


8. Kuvien monikulmiot ovat säännöllisiä. Ratkaise merkityt kulmat.

a)



b)



9. Todistustehtävä todellisille huipuille.

Todista, että n-kulmion kulmien astelukujen summa on oikeasti $(n-2)180^\circ$.

Tässä käytetään niin kutsuttua induktiotodistusta.

Vaiheessa 1. todista, että kaava pätee pienimmälle mahdolliselle monikulmiolle. (Helppo, kun tajuat, missä monikulmiossa on vähiten kulmia)

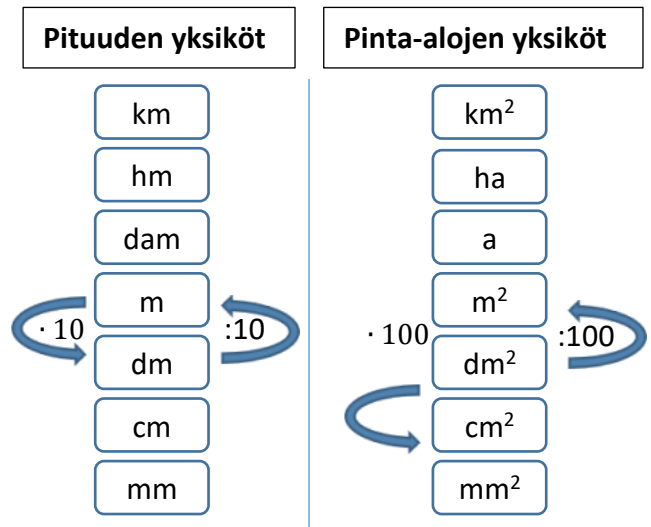
Vaiheessa 2. todista, että kun kaava on totta $(n-1)$ -kulmiolle, on se totta myös n-kulmiolle. Tämä vaihe vaatii selittelyä ja esimerkkipiirroksiaan eivät ole pahasta.

19. Pituuksien ja pinta-alojen muutokset

Yksikkömuunnoksissa käytetään apuna suhdelukua, jolla muutettava luku kerrotaan tai jaetaan.

- Pituuksien muunnoksissa suhdeluku on 10
- Pinta-alojen muunnoksissa suhdeluku on 100.

Viereisessä kuviossa havainnollistetaan sitä, milloin suhdeluvulla kerrotaan ja milloin jaetaan



Esimerkki 1

Pituuden muutoksia:

2,1 m = 21 dm (pilkku 1 oikealle)
 2,1 m = 210 cm (pilkku 2 oikealle)
 2,1 m = 2100 mm (pilkku 3 oikealle)

2,1 m = 0,21 dam (pilkku 1 vasemmalle)
 2,1 m = 0,021 hm (pilkku 2 vasemmalle)
 2,1 m = 0,0021 km (pilkku 3 vasemmalle)

Pinta-alamuutoksia:

2,1 m² = 210 dm² (pilkku 2 oikealle)
 2,1 m² = 21000 cm² (pilkku 4 oikealle)
 2,1 m² = 2100000 mm² (pilkku 6 oikealle)

2,1 m² = 0,021 a (pilkku 2 vasemmalle)
 2,1 m² = 0,00021 ha (pilkku 4 vasemmalle)
 2,1 m² = 0,0000021 km² (pilkku 6 vasemmalle)

Kuten edeltä huomaat, eivät numerot itsessään muutu, ainoastaan pilkkua siirretään.

Geometria 3

Tehtäviä:

1. Muunna metreihin

- a) 3,5 dm =
- b) 4,75 cm =
- c) 2,5 mm =
- d) 5,6 dam =
- e) 3,8 hm =
- f) 7,2 km =

2. Muunna neliömetreihin

- a) 4,5 dm² =
- b) 2,5 cm² =
- c) 7,25 mm² =
- d) 6,9 a =
- e) 2,88 ha =
- f) 5,2 km² =

3. Muunna senttimetreihin

- a) 6,5 dm =
- b) 75 mm =
- c) 1,35 m =
- d) 56 dm =

4. Muunna neliösenttimetreihin

- a) 3,5 dm² =
- b) 715 mm² =
- c) 0,35 m² =
- d) 5,6 m² =

5. Muunna annettuun yksikköön

- a) 12,5 m = km
- b) 3,5 cm = m
- c) 12,5 cm² = mm²
- d) 32 m² = a
- e) 3,2 km² = ha
- f) 5,4 km = m

6. Muunna annettuun yksikköön

- a) 118,5 cm² = m²
- b) 0,0043 m² = cm²
- c) 12500 cm² = m²
- d) 0,0028 m² = cm²

7. Muunna annettuun yksikköön

- a) 1,5 m² = cm²
- b) 430000 mm² = m²
- c) 12500 cm² = m²
- d) 28 ha = km²

8. Muunna annettuun yksikköön

- a) 65,87 cm² = mm²
- b) 4300 m² = ha
- c) 1200 cm² = m²
- d) 0,00003723 km² = m²

9. Mitä pinta-alan yksikköä käytetään tai on mielekästä käyttää kuvaamaan seuraavia asioita?


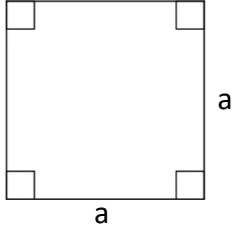
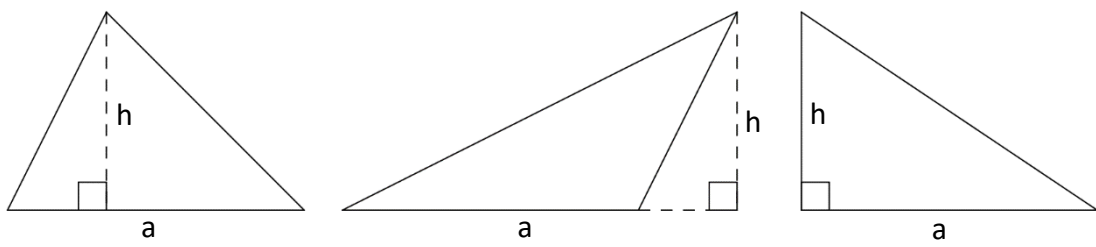
- a) Pellon pinta-ala
- b) Asunnon/talon pinta-ala
- c) Suomen pinta-ala
- d) Kynsien pinta-ala
- e) Huoneen seinän pinta-ala
- f) Tontin pinta-ala
- g) Maatilan metsien pinta-ala
- h) ”pienen” pellon pinta-ala

10. Tee vihkoon. Selvitä seuraavien maiden pinta-ala ja asukasmäärä. Kuinka paljon jokaisella maan asukkaalla on tilaa neliömetreinä.


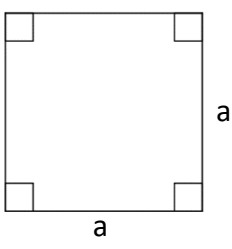
- a) Suomessa
- b) Intiassa
- c) Italiassa
- d) Venäjällä

20. Pinta-aloja ja piiri

Pinta-alaa merkitään isolla A-kirjaimella. Seuraavassa tärkeimmät/helppoisimmat pinta-alakaavat.

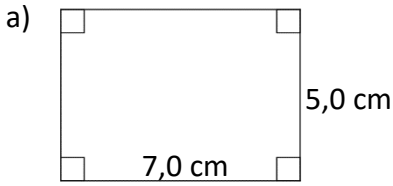
<p>Suorakulmion pinta-ala</p> $A = \text{kanta} \cdot \text{korkeus} = ab$ 	<p>Neliön pinta-ala</p> $A = a \cdot a = aa = a^2$ 
<p>Kolmion pinta-ala</p> $A = \frac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2} = \frac{ah}{2}$ 	

Piiriä merkitään pienellä p-kirjaimella.

<p>Monikulmion piiri</p> <p>Monikulmion piiri saadaan laskemalla siihen kuuluvien janojen pituudet yhteen. Tätä ajatusta sovelletaan kaikkiin monikulmioihin. Erikoistapauksina voidaan pitää suorakulmiota ja neliötä.</p>	
<p>Suorakulmion piiri</p> $p = 2a + 2b$ 	<p>Neliön piiri</p> $p = 4a$ 

Esimerkki 1

Laske kuvioiden pinta-alat ja piirit

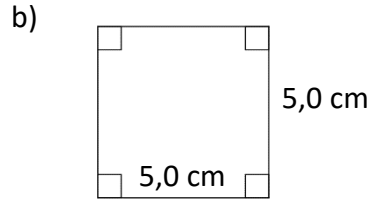


Pinta-ala

$$A = 7,0 \text{ cm} \cdot 5,0 \text{ cm} = 35 \text{ cm}^2$$

Piiri

$$p = 2 \cdot 7,0 \text{ cm} + 2 \cdot 5,0 \text{ cm} = 24,0 \text{ cm}$$



Pinta-ala

$$A = 5,0 \text{ cm} \cdot 5,0 \text{ cm} = 25 \text{ cm}^2$$

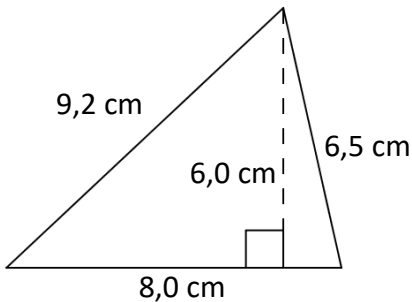
Piiri

$$p = 4 \cdot 5,0 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

Jos kolmiossa ei ole suoraa kulmaa, ei korkeusjanaa käytetä kuin pinta-alalaskuissa. Kannattaa siis olla tarkkana, mitä annetuista luvusta tarvitaan. Tästä seuraava esimerkki.

Esimerkki 2.

Laske kolmion pinta-ala ja piiri.



Pinta-ala

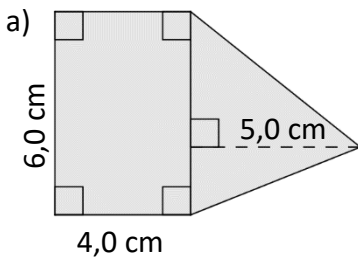
$$A = \frac{8,0 \text{ cm} \cdot 6,0 \text{ cm}}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

Piiri

$$p = 8,0 \text{ cm} + 6,5 \text{ cm} + 9,2 \text{ cm} = 23,7 \text{ cm}$$

Esimerkki 3.

Laske väritetyn alueen pinta-ala



Suorakulmio

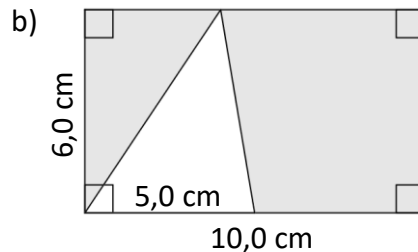
$$A_1 = 4,0 \text{ cm} \cdot 6,0 \text{ cm} = 24 \text{ cm}^2$$

Kolmio

$$A_2 = \frac{6,0 \text{ cm} \cdot 5,0 \text{ cm}}{2} = 15 \text{ cm}^2$$

Koko kuvio

$$A = A_1 + A_2 = 24 \text{ cm}^2 + 15 \text{ cm}^2 = 39 \text{ cm}^2$$



Suorakulmio

$$A_1 = 10,0 \text{ cm} \cdot 6,0 \text{ cm} = 60 \text{ cm}^2$$

Kolmio

$$A_2 = \frac{5,0 \text{ cm} \cdot 6,0 \text{ cm}}{2} = 15 \text{ cm}^2$$

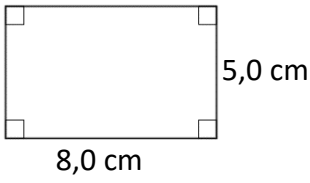
Koko kuvio

$$A = A_1 - A_2 = 60 \text{ cm}^2 - 15 \text{ cm}^2 = 45 \text{ cm}^2$$

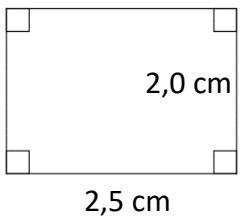
Tehtäviä

1. Laske kuvion piiri ja pinta-ala. Ilmoita vastaus senttimetreinä tai neliösenttimetreinä.

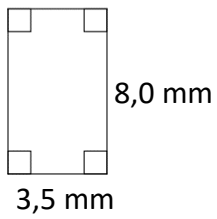
a)



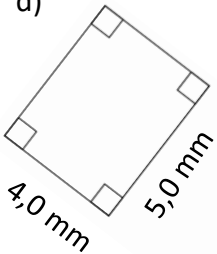
b)



c)

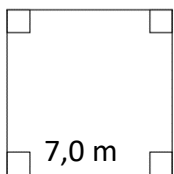


d)

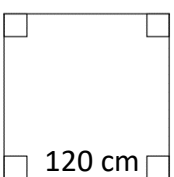


2. Laske neliön piiri ja pinta-ala, ilmoita vastausmetreinä tai neliömetreinä.

a)

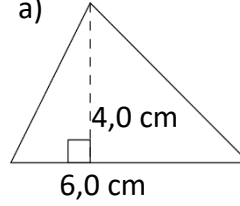


b)

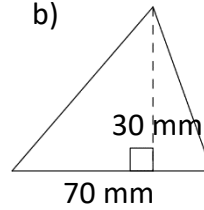


3. Laske kolmioiden pinta-ala. Vastaus neliösenttimetreinä.

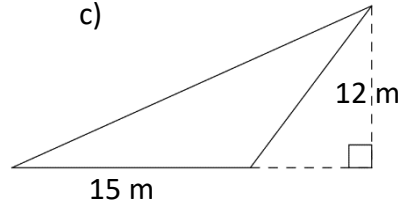
a)



b)

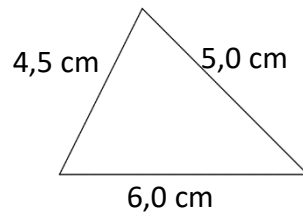


c)

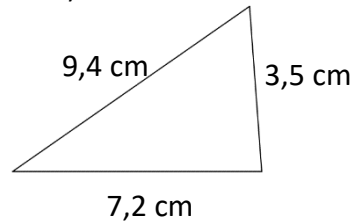


4. Laske kolmioiden piirit

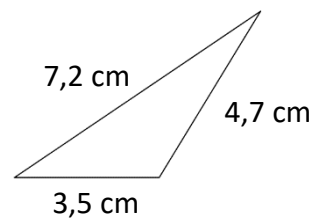
a)



b)



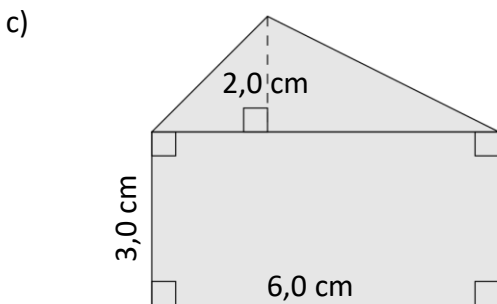
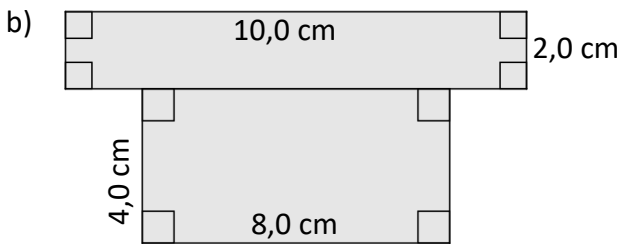
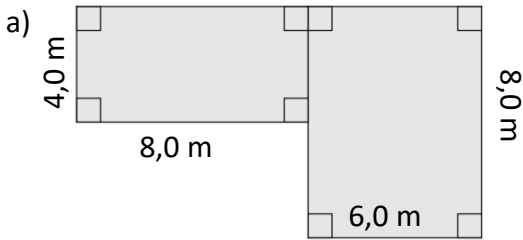
c)



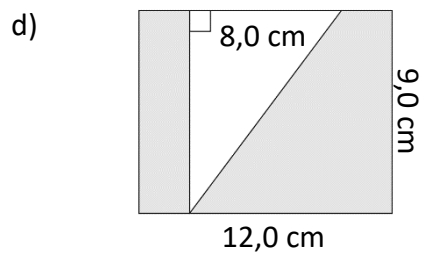
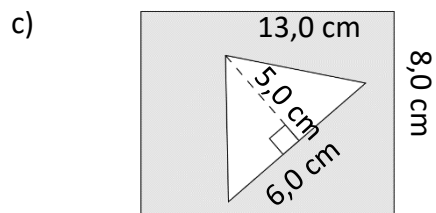
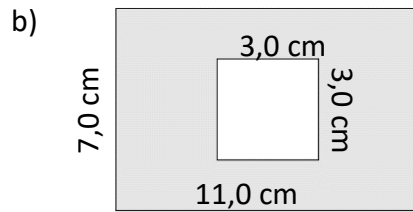
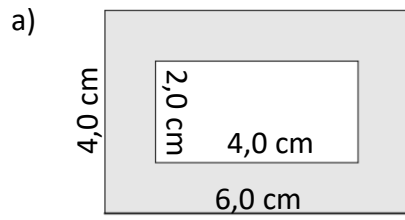
Geometria 3

Seuraavien tehtävien kuviin pitää välivaiheiden takia merkitä alueet esim A_1 ja A_2 ja kirjoittaa lyhyet selitetekstit (katso esim. 3.)

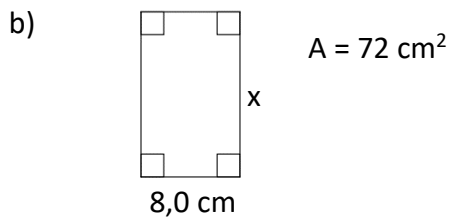
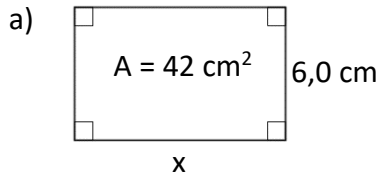
5. Laske väritytyn kuvion pinta-ala. Vastaus neliömetreinä.



6. Laske väritytyn alueen pinta-ala



7. Ratkaise yhtälön avulla x . Muista laittaa myös yksikkö lopputulokseen.



8. Ratkaise yhtälön avulla vihkoon

a) Mikä on kolmion kanta, jos sen korkeus on $5,0 \text{ cm}$ ja pinta-ala 15 cm^2

b) Mikä on kolmion korkeus, jos sen kanta on 12 cm ja pinta-ala 60 cm^2

21. Yhtenevyys

Yhtenevyys

Jos kaksi kuviota ovat saman muotoisia ja kokoisia, sanotaan niiden olevan **yhteneviä**.

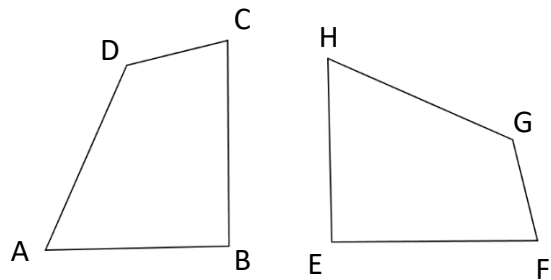
Yhtenevyyteen hyväksytään myös peilikuvat.

Yhtenevyyttä merkitään merkillä \cong

Esimerkiksi viereiset kuviot:

$$ABCD \cong HEFG$$

Pitää olla tarkkana, että vastinpisteet ovat samassa järjestyksessä



Yhtenevien kuvioiden ominaisuuksia:

- Vastinkulmat ovat yhtä suuria
- Vastinsivut ovat yhtä pitkiä

Jos perusyhtenevyyksasia on liian helppoa, voi opetella lisäksi kolmioiden yhtenevyyssäännöt. Ne eivät ole kokeeseen tulevaa asiaa (bonusmahdollisuus aina on).

Kolmioiden yhtenevyyssäännöt (extraaa)

Kolmioiden kohdalla on olemassa tietyt edellytykset, joiden perusteella voidaan sanoa heti, ovatko kolmiot yhteneviä vai eivät.

- **ksk**: kulma-sivu-kulma

Tämä tarkoittaa siis sitä, että molemmissa kolmioissa on yksi samansuuruinen kulma, sen vieressä yhtä pitkä sivu ja vielä sen vieressä samansuuruinen kulma. Tällöin kolmiot ovat yhteneviä.

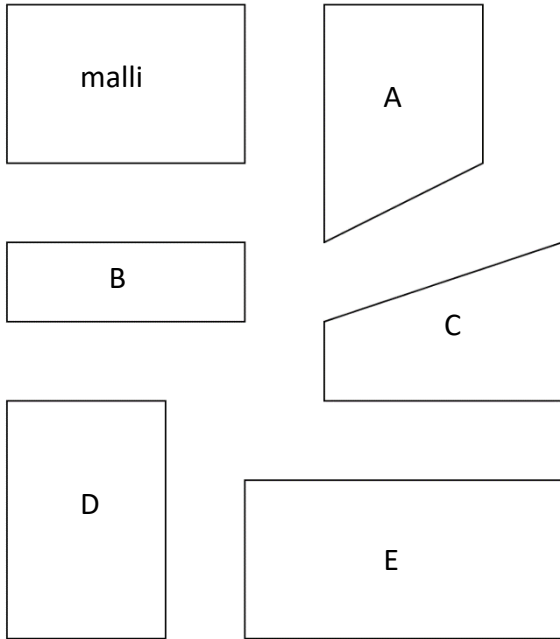
- **sss**: sivu-sivu-sivu
- **sks**: sivu-kulma-sivu
- **kks**: kulma-kulma-sivu

Edellä mainitut neljä yhdistelmää ovat sellaisia, että jos kahdessa kolmiossa ne toteutuvat samanlaisina, ovat kolmioiden loputkin vastinsivut ja kulmat yhteneviä, jolloin myös kolmiot ovat yhteneviä.

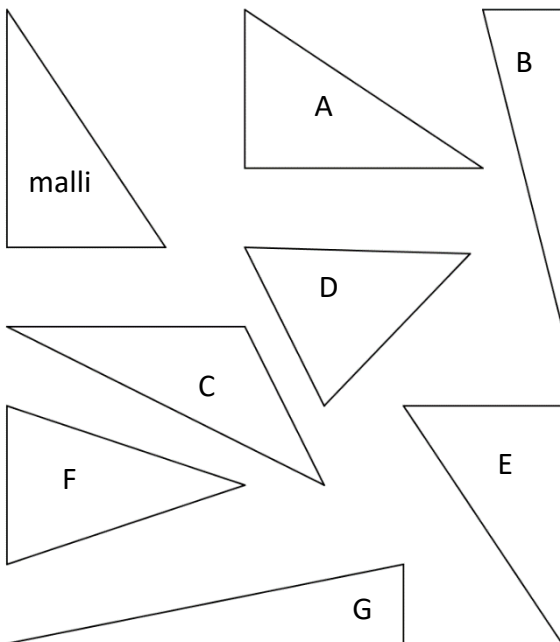
Tehtäviä

Kahdessa ensimmäisessä tehtävässä riittää silmämääräinen arvio. Varsinkin noin pienien kulmien mittaaminen ei helpolla onnistu.

1. Mitkä kuviot ovat yhteneviä mallin kanssa?



2. Mitkä kuviot ovat yhteneviä mallin kanssa?



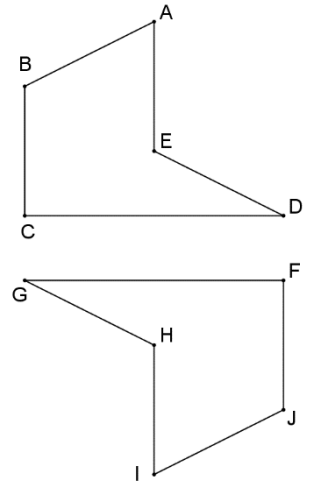
3. Kuvassa on kaksi yhtenevää monikulmiota.

a) Merkitse yhtenevä kuvio

$ABCDE \cong$

b) Merkitse taulukon vastinosat

$\sphericalangle A$	
$\sphericalangle C$	
	$\sphericalangle H$
	$\sphericalangle J$
$\sphericalangle D$	
AB	
DE	
	HI
	FG
BC	



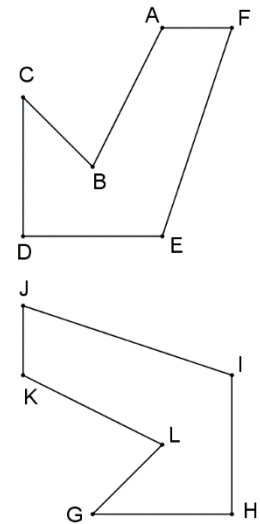
4. Kuvassa on kaksi yhtenevää monikulmiota.

a) Merkitse yhtenevä kuvio

$ABCDEF \cong$

b) Merkitse taulukon vastinosat

$\sphericalangle A$	
$\sphericalangle B$	
	$\sphericalangle H$
	$\sphericalangle G$
$\sphericalangle E$	
AF	
DE	
	GL
	KL
CD	



5. Jos kahdella kuviolla on tietyt ominaisuudet, ovatko ne yhteneviä? Perustelee.

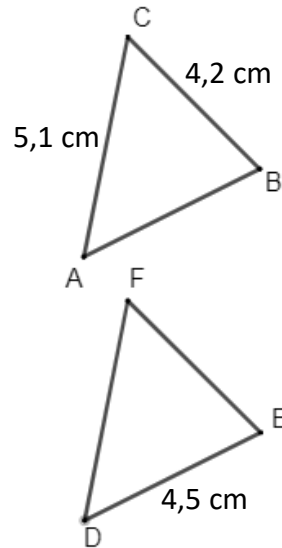
- Kaksi neliötä, joiden molempien yhden sivun pituus on 5,0 m.
- Kaksi suorakulmiota, joiden molempien yhden sivun pituus on 5,0 m.
- Kaksi ympyrää, joiden molempien säde on 12,5 cm.
- Kaksi kolmiota, joiden molempien kaikki kulmat ovat 60° .

6. Kolmiot ABC ja DEF ovat yhtenevät. Määritä sivujen pituudet

a) $AB =$

b) $EF =$

c) $DF =$



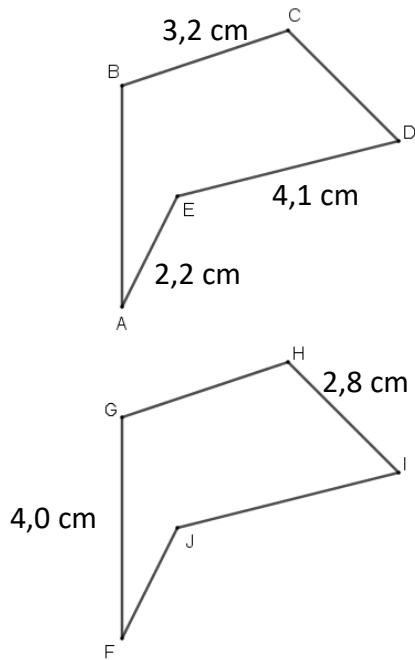
7. Kuviot ABCDE ja FGHIJ ovat yhtenevät. Määritä sivujen pituudet

a) $GH =$

b) $JF =$

c) $AB =$

d) $CD =$



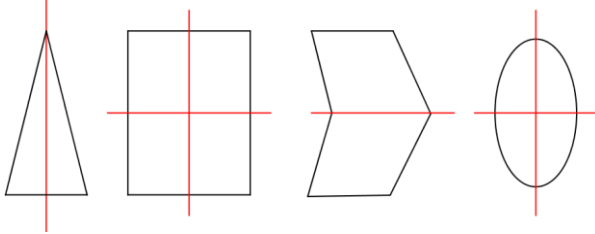
8.

22. Symmetria suoran ja pisteen suhteen

Suoran suhteen symmetria tarkoittaa sitä, että jokaiselle kuvion pisteelle löytyy yhtä kaukaa suoran toiselta puolelta vastaava piste.

Suoraa, jonka suhteen kuvio on symmetrinen, kutsutaan **symmetria-akseliksi**.

Alla muutama kuvio, joihin on punaisella piirretty symmetria-akseli/akselit.

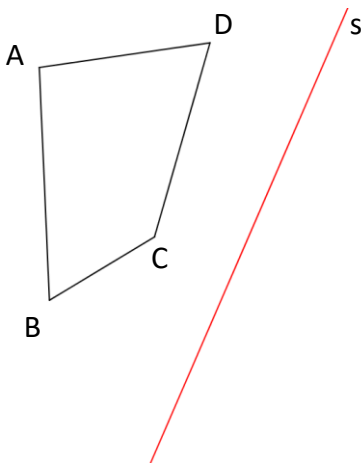


Kuvion peilaaminen suoran suhteen tarkoittaa sitä, että annettua suoraa käyttäen piirretään kuviolle suoran suhteen symmetriset pisteet. Tästä seuraava esimerkki

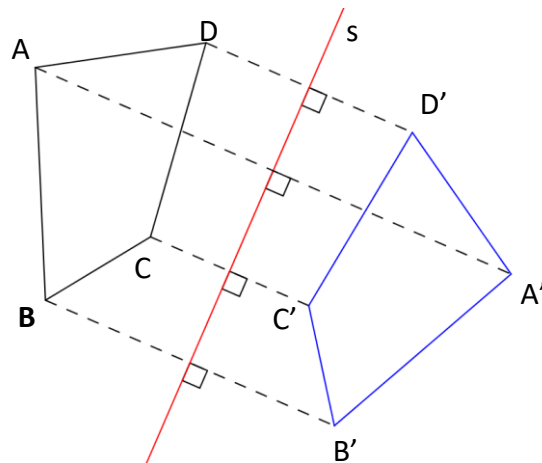
Esimerkki 1.

Peilaa nelikulmio ABCD suoran s suhteen.

Lähtökohta:



Lopputulos

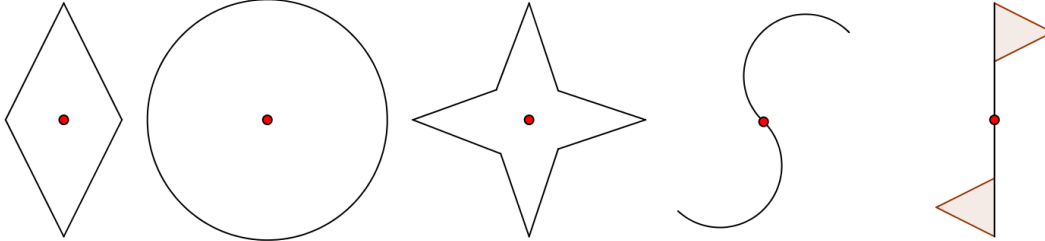


Eli jokaiselle pisteelle A, B, C ja D on mitattu suorakulmassa suoraan s nähden oma vastinpiste. Kun nämä vastinpisteet yhdistetään janoilla, saadaan suoran s suhteen peilattu kuvio.

Pisteen suhteen symmetria tarkoittaa sitä, että jokaiselle kuvion pisteelle löytyy yhtä kaukaa pisteen toiselta puolelta vastaava piste.

Pistettä, jonka suhteen kuvio on symmetrinen, kutsutaan **symmetria-pisteeksi**.

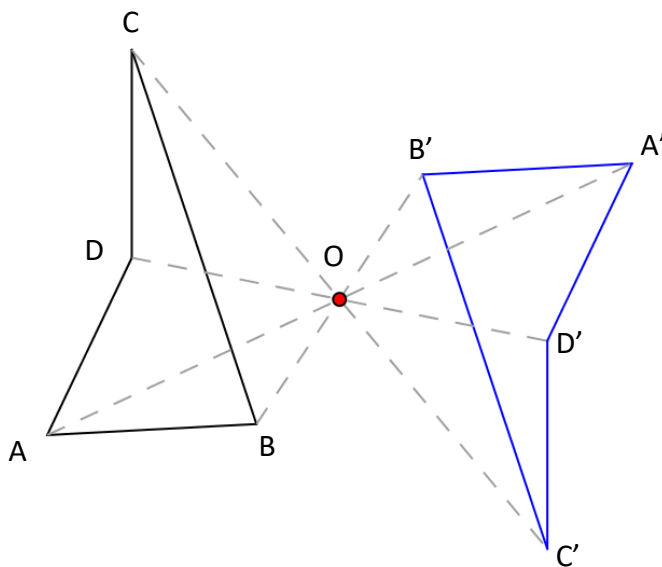
Alla muutama kuvio, joihin on punaisella piirretty symmetria-piste.



Kuvion peilaaminen symmetriapisteen ympäri tehdään samalla tavalla kuin suorankin tapauksessa. Suorakulmista ei tarvitse tässä enää välittää vaan jokaiselle pisteelle vain piirretään symmetriapisteen toiselle puolelle vastinpiste ja ne yhdistetään.

Esimerkki 2.

Alla nelikulmio ABCD on peilattu pisteen O suhteen. Peilauspiste (symmetriapiste) punaisella ja peilattu kuvio sinisellä.



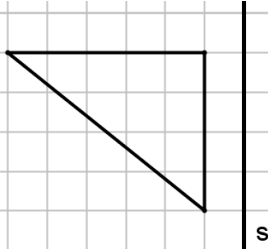
Tarkkasilmäiset varmasti huomaavatkin, että pisteen suhteen symmetrian tekeminen ei tehnytkään kuvioista peilikuvaa vaan käänsi sen symmetriapisteen suhteen ylösalaisin.

Tämän kappaleen tehtävät erikseen

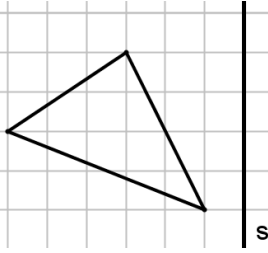
Tehtäviä

1. Peilaa kuvio suoran s suhteen. Voit käyttää ruutuja apuna.

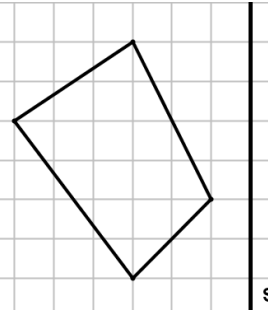
a)



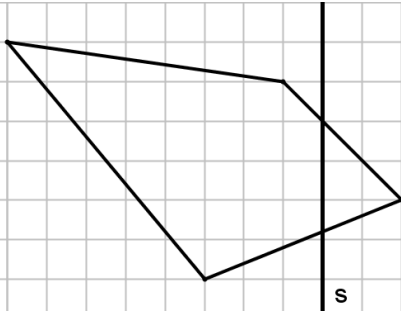
b)



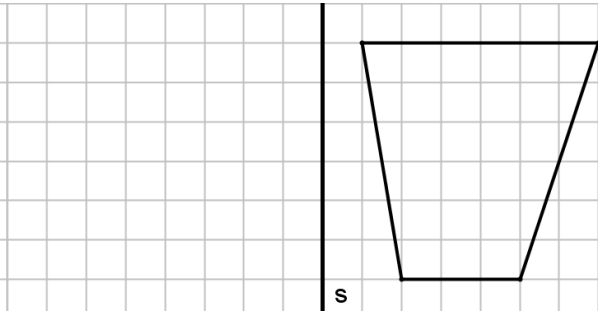
c)



d)

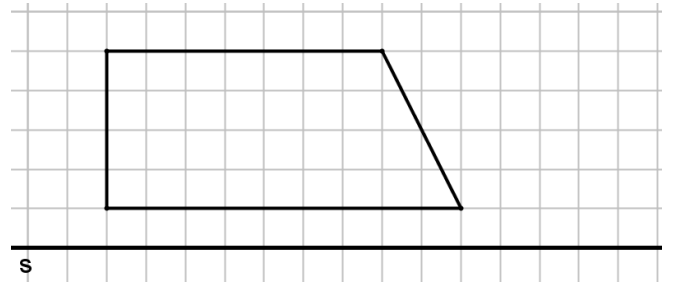


e)



2. Peilaa kuvio suoran s suhteen. Voit käyttää ruutuja apuna.

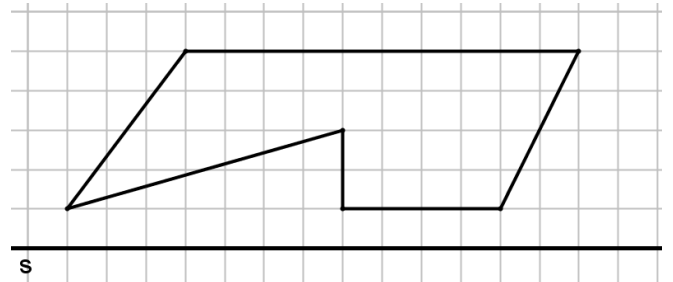
a)



b)

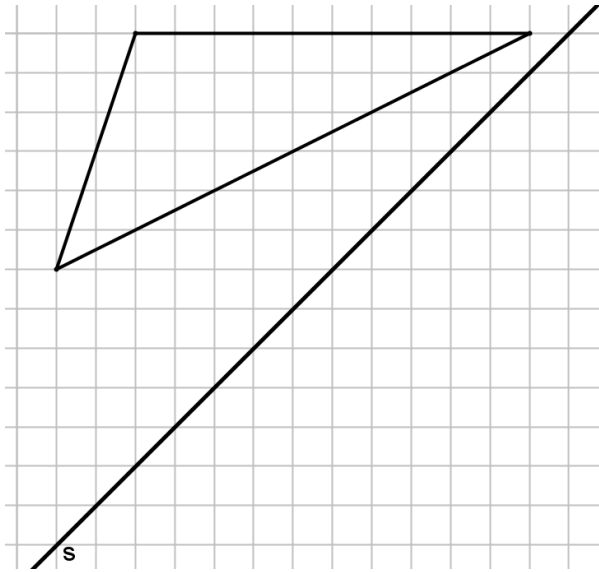


c)

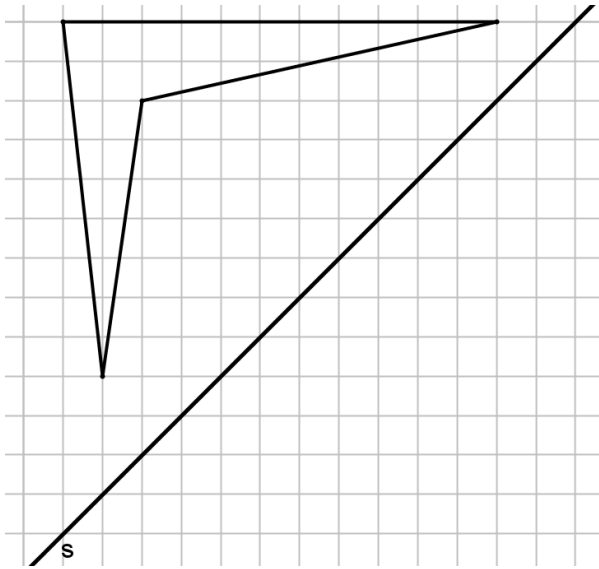


3. Peilaa kuvio suoran s suhteen. Voit käyttää ruutuja apuna.

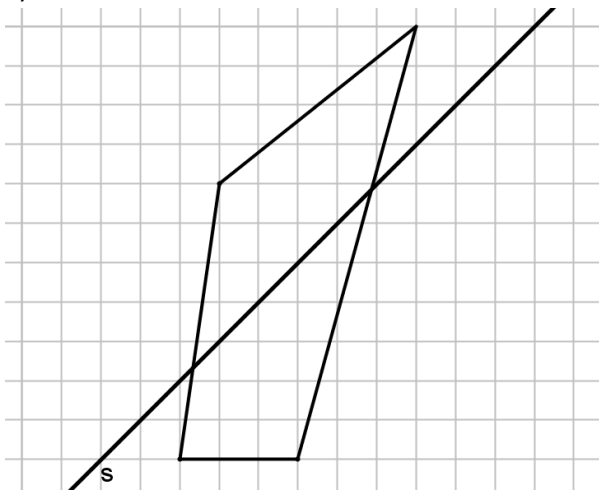
a)



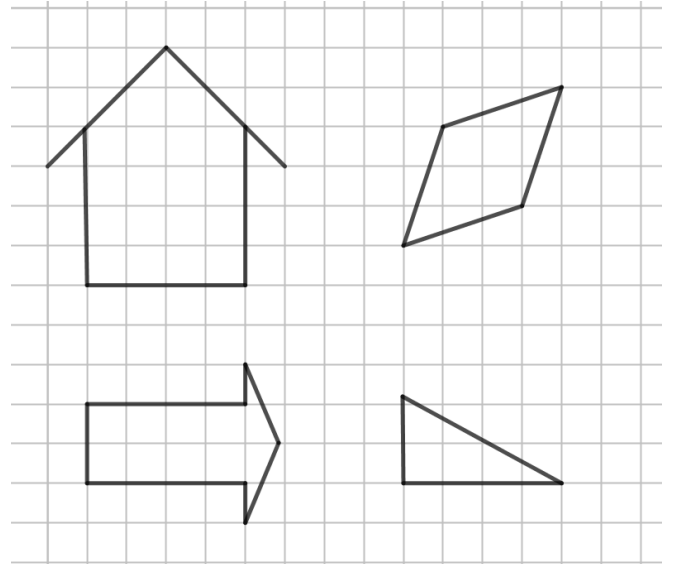
b)



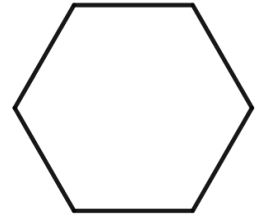
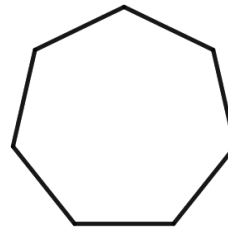
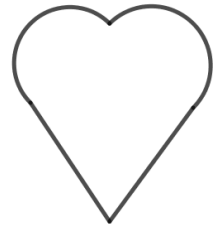
c)



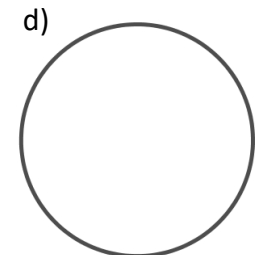
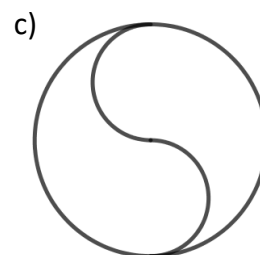
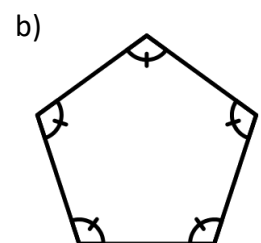
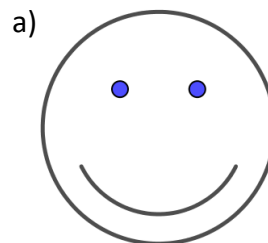
4. Piirrä seuraaviin kuviin symmetria-akselit.



5. Piirrä seuraaviin kuviin symmetria-akselit.

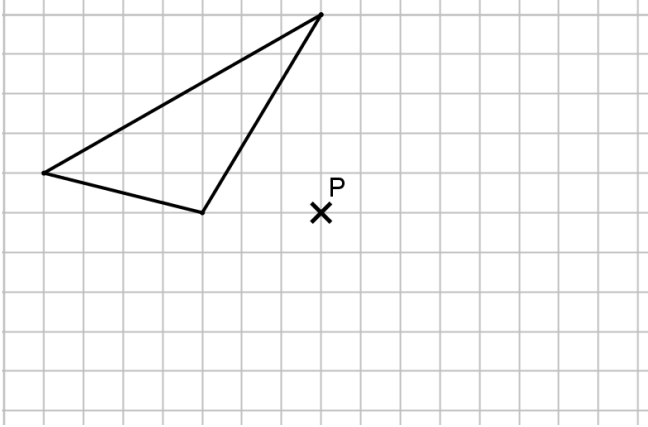


6. Kuinka monta symmetria-akselia seuraavilla kuvilla on?

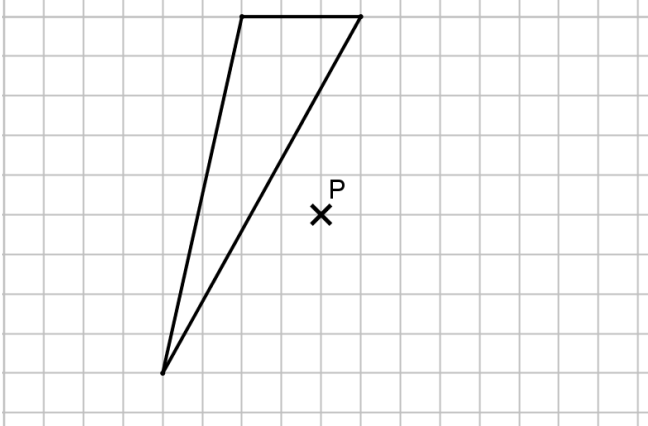


7. Peilaa kuvio pisteen P suhteen. Voit käyttää ruutuja apuna.

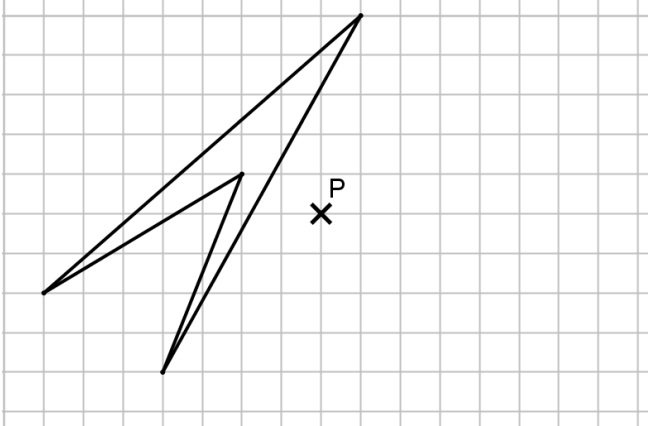
a)



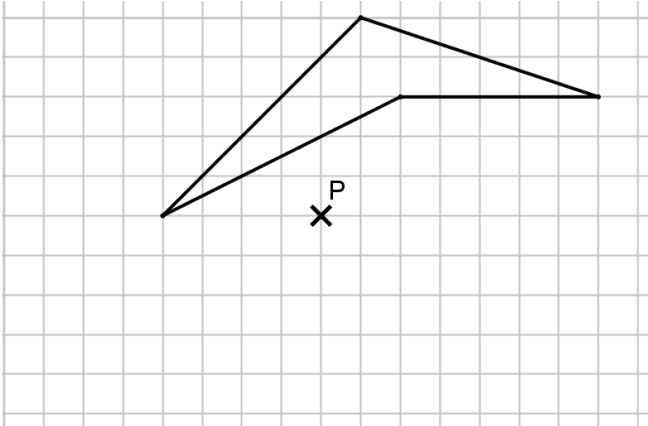
b)



c)

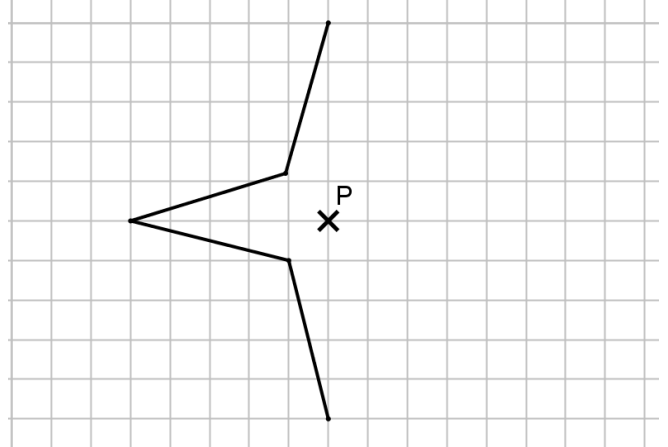


d)

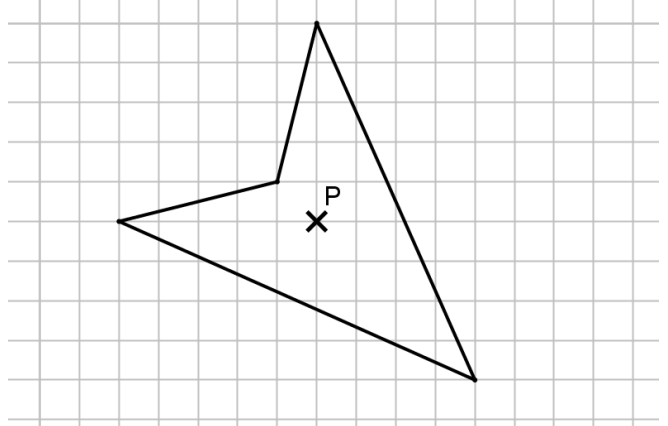


8. Peilaa kuvio pisteen P suhteen. Voit käyttää ruutuja apuna.

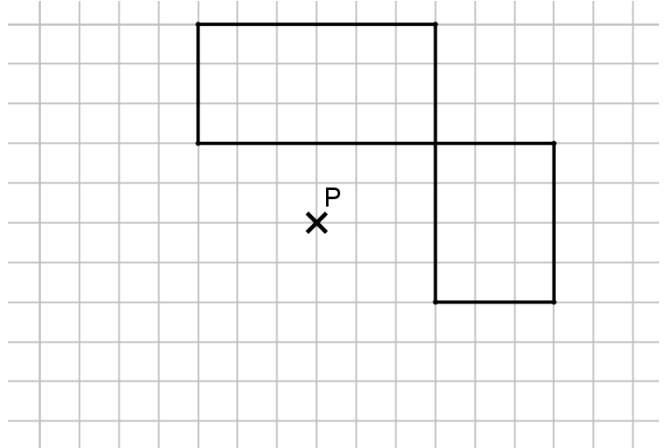
a)



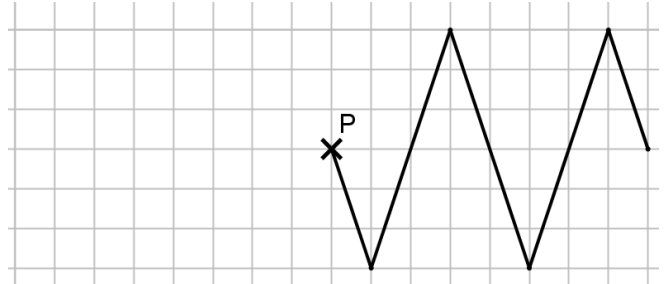
b)



c)

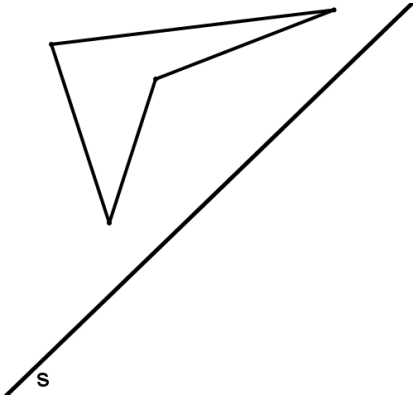


d)

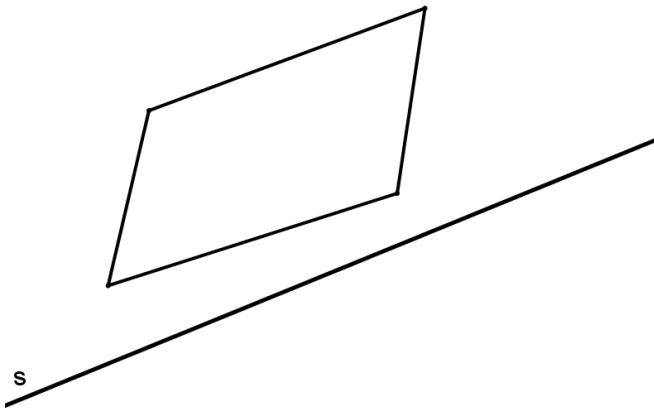


9. Peilaa kuvio suoran s suhteen. Nyt ei ole ruutuja, joten käytä piirtokolmiota (geokolmiota).

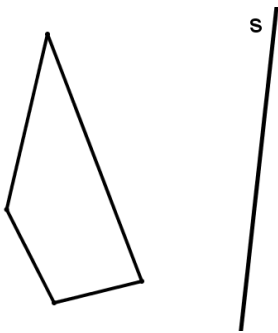
a)



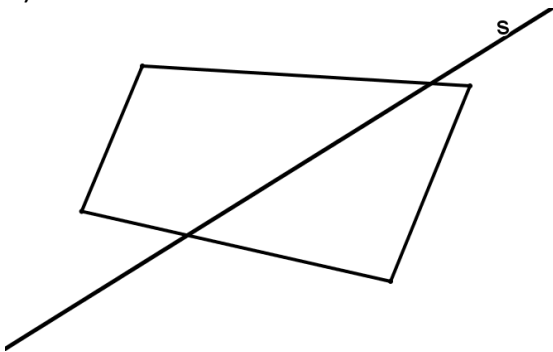
b)



c)

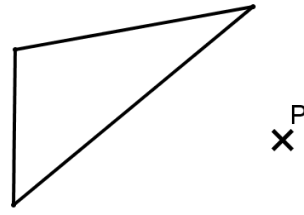


d)

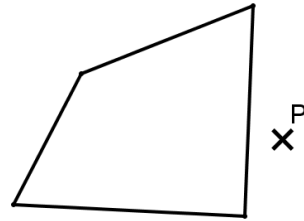


10. Peilaa kuvio pisteen P suhteen. Ruutuja ei ole käytössä, joten käytä piirtokolmiota.

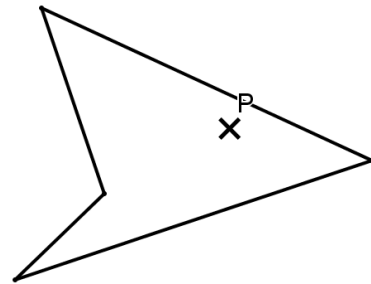
a)



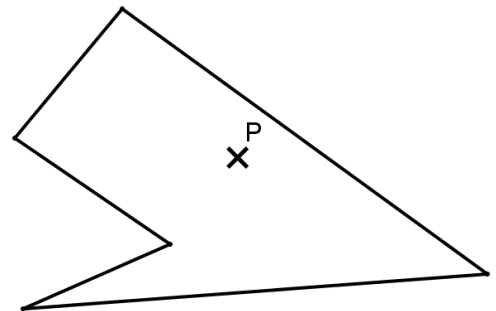
b)



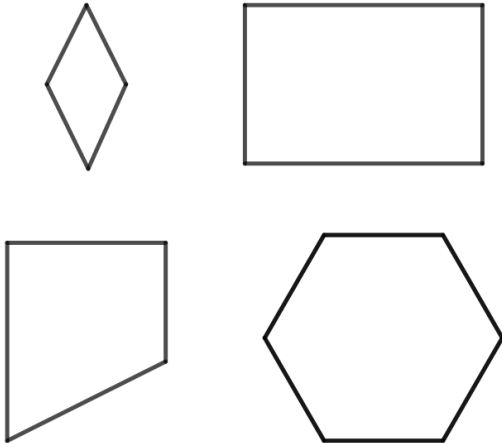
c)



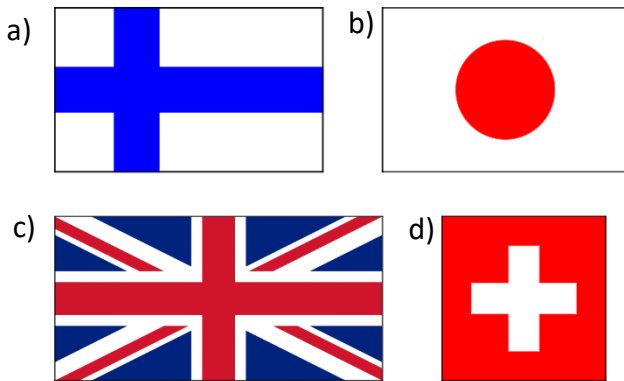
d)



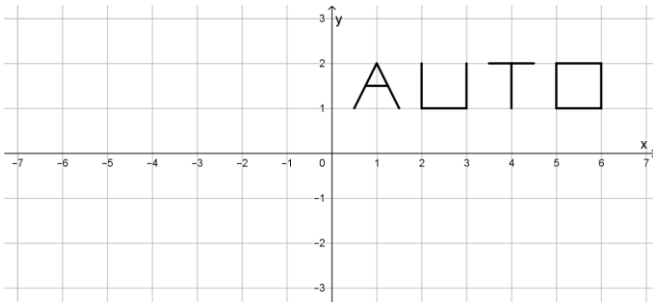
11. Piirrä seuraaviin kuviin symmetriakeskukset, jos voit.



12. Mitkä seuraavista lipuista ovat pisteen suhteen symmetrisiä?



13. Peilaa oheisen kuvan teksti auto
 a) x-akselin suhteen,
 b) y-akselin suhteen,
 c) origon eli pisteen (0, 0) suhteen.



Tee seuraavat tehtävät vihkoosi

14. Kirjoita oma nimesi koordinaatistoon ja peilaa se x-akselin suhteen, kuten edellisessä tehtävässä. Voit tehdä peilaukset myös y-akselin ja origon suhteen.

15. Mitkä kaikki (isot) kirjaimet ja numerot ovat suoran suhteen symmetrisiä?
16. Mitkä kaikki (isot) kirjaimet ja numerot ovat pisteen suhteen symmetrisiä?
17. Piirrä vihkoosi kaikki liikennemerkkit,
 a) jotka ovat suoran suhteen symmetrisiä, merkitse myös symmetriasuora.
 b) jotka ovat pisteen suhteen symmetrisiä, merkitse myös symmetriakeskus.
18. Etsi netistä logoja ja symboleja, jotka ovat symmetrisiä joko suoran tai pisteen suhteen. Hahmottele niiden kuvat vihkoosi.
19. Ihmisten kasvoja pidetään usein symmetrisinä. Tästä syystä onkin yllättävää huomata, että oikeasti ihmisen kasvojen puoliskot ovat hieman erilaisia. Hakusanoilla "face symmetry" löytyy paljon ihmisten kuvista tehtyjä muokkauksia, jossa kasvokuvasta on tehty kaksi eri kuvaa peilaamalla kummatkin kasvopuoliskot. Ja toki kännykkäänkin voi ladata useita sovelluksia, joilla tätä voi kokeilla omillakin kuvilla. Jos jaksoit lukea tänne asti, niin ehkä arvaat, mitä pitää tehdä.

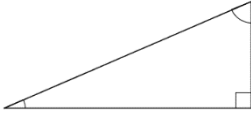
23. Kierto ja siirto (jousto)

Tosi nopeille ylimääräisenä. Valmistuu, kunhan kerkeän tehdä

24. Kertaus 3

1. Nimeä monikulmiot mahdollisimman tarkasti

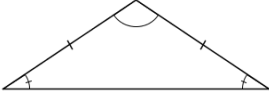
a)



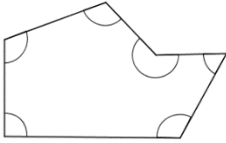
b)



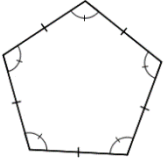
c)



d)



e)

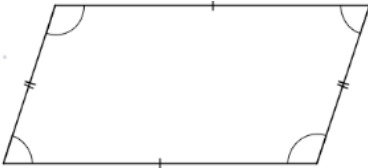


2. a) Mitkä edellisen tehtävän monikulmioista olivat säännöllisiä?

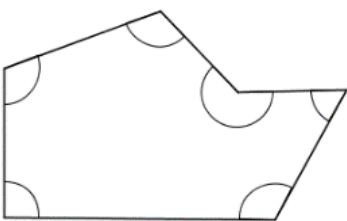
b) Mikä on säännöllisen monikulmion vaatimukset?

3. Piirrä lävistäjät seuraaville monikulmioille

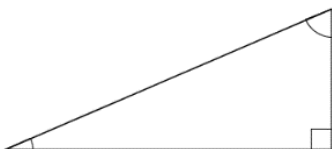
a)



b)

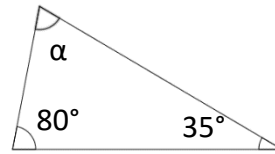


c)

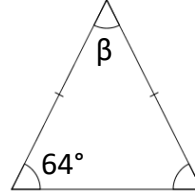


4. Laske tuntemattoman kulmaan suuruus.

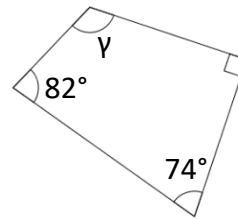
a)



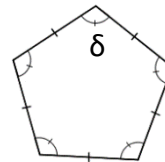
b)



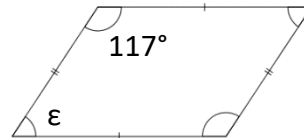
c)



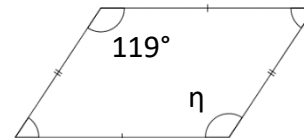
d)



e)



f)



Geometria 3

5. Muunna annettuun yksikköön

a) $120 \text{ cm} = \underline{\hspace{2cm}}$ m

b) $340 \text{ m} = \underline{\hspace{2cm}}$ km

c) $1,23 \text{ m} = \underline{\hspace{2cm}}$ mm

d) $0,34 \text{ m} = \underline{\hspace{2cm}}$ dam

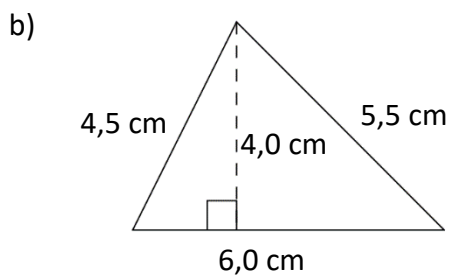
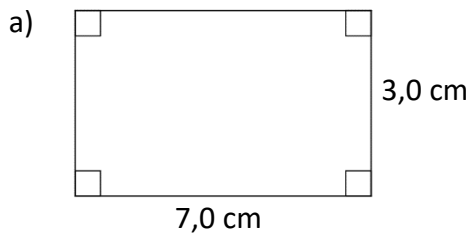
e) $34 \text{ cm}^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ mm²

f) $250 \text{ cm}^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ m²

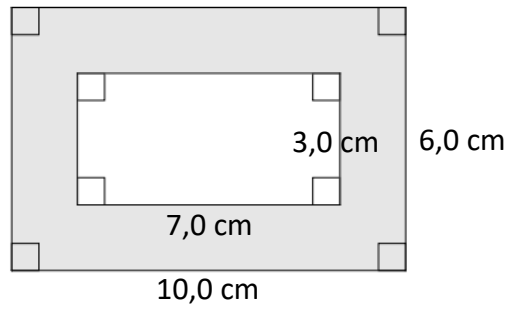
g) $13 \text{ a} = \underline{\hspace{2cm}}$ m²

h) $0,345 \text{ cm}^2 \underline{\hspace{2cm}}$ m²

6. Laske kuvioiden piirit ja pinta-alat



7. Laske väritetyn alueen pinta-ala.



Tähän lisää sitten vielä tehtäviä yhtenevyydestä ja peilauksesta.

25. Vastauksia

16 Kolmio

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| a) $\alpha = 31^\circ$ | b) $\alpha = 86^\circ$ |
| c) $\alpha = 124^\circ$ | d) $\alpha = 30^\circ$ |
- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| a) $\alpha = 126^\circ$ | b) $\alpha = 80^\circ$ |
| c) $\alpha = 85^\circ$ | d) $\alpha = 133^\circ$ |
- | | |
|------------------------|------------------------|
| a) $\alpha = 57^\circ$ | b) $\alpha = 87^\circ$ |
| c) $\alpha = 67^\circ$ | d) $\alpha = 60^\circ$ |
- | | |
|-----------------|----------------|
| a) A, E, H ja I | b) B, D ja G |
| c) C ja F | d) A, E ja H |
| e) H | f) Ei yksikään |
- Yksi. Tylpän kulman suuruus on suurempi kuin 90° . Jos kolmiossa olisi kaksi tylppää kulmaa, olisi niiden summa yli 180° , mikä on enemmän kuin kolmion kulmien summa.
- Yksi. Suorakulman suuruus on 90° . Jos kolmiossa olisi kaksi suorakulmaa, olisi niiden summa 180° , jolloin kolmannen kulman pitäisi olla 0° .
- | | |
|------------------------|------------------------|
| a) $\alpha = 23^\circ$ | b) $\alpha = 30^\circ$ |
|------------------------|------------------------|
- | | |
|------------------------|------------------------|
| a) $\alpha = 24^\circ$ | b) $\alpha = 62^\circ$ |
|------------------------|------------------------|
- $\alpha = 25^\circ$

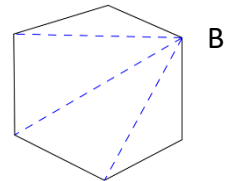
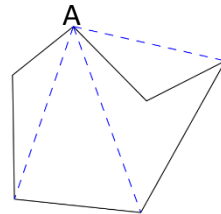
17 Nelikulmiot

- | | |
|-----------------------|--------------------------|
| a) B, C, E, F, G ja I | b) B ja I |
| c) B, E, F ja I | d) A, B, C, E, F, G ja I |
- | | |
|----------|----------|
| a) Ei | b) Kyllä |
| c) Kyllä | d) Kyllä |
- | | |
|-------------------------|------------------------|
| a) $\alpha = 120^\circ$ | b) $\alpha = 80^\circ$ |
|-------------------------|------------------------|
- | | |
|------------------------|-------------------------|
| a) $\alpha = 98^\circ$ | b) $\alpha = 228^\circ$ |
|------------------------|-------------------------|
- | | |
|---|---|
| a) $\alpha = 124^\circ, \beta = 56^\circ$ | b) $\alpha = 108^\circ, \beta = 72^\circ$ |
|---|---|
- | | |
|---|--|
| a) $\alpha = 135^\circ, \beta = 45^\circ$ | b) $\alpha = 37^\circ, \beta = 37^\circ$ |
|---|--|
- | | |
|---|---|
| a) $30^\circ, 150^\circ$ ja 150° | b) $50^\circ, 130^\circ$ ja 130° |
| c) $90^\circ, 90^\circ$ ja 90° | |

18 Monikulmiot

- | | |
|------------------------------------|--------------------|
| A = viisikulmio | B = nelikulmio |
| C = kolmio (suorakulmainen kolmio) | |
| D = seisenkulmio | E = yhdeksänkulmio |
| F = 12-kulmio | G = kuusikulmio |

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| a) $\alpha = 110^\circ$ | b) $\alpha = 60^\circ$ |
|-------------------------|------------------------|
- | | |
|------------------------|------------------------|
| a) $\alpha = 95^\circ$ | b) $\alpha = 27^\circ$ |
|------------------------|------------------------|
- | | |
|---|---|
| a) $\alpha = 60^\circ, \beta = 120^\circ$ | b) $\alpha = 40^\circ, \beta = 140^\circ$ |
|---|---|
- | | |
|----------------|----------------|
| a) 135° | b) 150° |
| c) 162° | |
- $\alpha = 10^\circ, \beta = 170^\circ$
- | | |
|----|----|
| a) | b) |
|----|----|



- | | |
|--|---|
| a) $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ$ | b) $\gamma = 40^\circ, \delta = 80^\circ$ |
|--|---|

19 Pituuksien ja pinta-alojen muutokset

- | | |
|-------------|-------------|
| a) 0,35 m | b) 0,0475 m |
| c) 0,0025 m | d) 56 m |
| e) 380 m | f) 7200 m |
- | | |
|-----------------------------|--------------------------|
| a) $0,045 \text{ m}^2$ | b) $0,00025 \text{ m}^2$ |
| c) $0,00000725 \text{ m}^2$ | d) 690 m^2 |
| e) 28800 m^2 | f) 5200000 m^2 |
- | | |
|-----------|-----------|
| a) 65 cm | b) 7,5 cm |
| c) 135 cm | d) 560 cm |
- | | |
|------------------------|-------------------------|
| a) 350 cm^2 | b) $7,15 \text{ cm}^2$ |
| c) 3500 cm^2 | d) 56000 cm^2 |
- | | |
|------------------------|------------|
| a) 0,0125 km | b) 0,035 m |
| c) 1250 mm^2 | d) 0,32 a |
| e) 320 ha | f) 5400 m |
- | | |
|--------------------------|----------------------|
| a) $0,01185 \text{ m}^2$ | b) 43 cm^2 |
| c) $1,25 \text{ m}^2$ | d) 28 cm^2 |
- | | |
|-------------------------|------------------------|
| a) 15000 cm^2 | b) $0,43 \text{ m}^2$ |
| c) $1,25 \text{ m}^2$ | d) $0,28 \text{ km}^2$ |
- | | |
|------------------------|------------------------|
| a) 6587 mm^2 | b) 0,43 ha |
| c) $0,12 \text{ m}^2$ | d) $37,23 \text{ m}^2$ |
- | | |
|------------------|------------------------------------|
| a) ha | b) m^2 |
| c) km^2 | d) cm^2 tai mm^2 |
| e) m^2 | f) m^2 tai ha |
| g) ha | h) a |

20 Pinta-aloja ja piiri

- | | |
|--------------------------|------------------------|
| a) $p = 26,0 \text{ cm}$ | $A = 40 \text{ cm}^2$ |
| b) $p = 9,0 \text{ cm}$ | $A = 5,0 \text{ cm}^2$ |

- c) $p = 2,30 \text{ cm}$ $A = 0,28 \text{ cm}^2$
 a) $p = 1,80 \text{ cm}$ $A = 0,20 \text{ cm}^2$
2. a) $p = 28,0 \text{ m}$ $A = 49 \text{ m}^2$
 b) $p = 4,8 \text{ m}$ $A = 1,44 \text{ m}^2 \approx 1,4 \text{ m}^2$
3. a) 12 cm^2 b) $10,5 \text{ cm}^2 \approx 11 \text{ cm}^2$
 c) $90 \text{ m}^2 = 900\,000 \text{ cm}^2$
4. a) $15,5 \text{ cm}$ b) $20,1 \text{ cm}$
 c) $15,4 \text{ cm}$
5. a) 80 m^2
 b) $52 \text{ cm}^2 = 0,0052 \text{ m}^2$
 c) $24 \text{ cm}^2 = 0,0024 \text{ m}^2$
6. a) 16 cm^2 b) 68 cm^2
 c) 89 cm^2 d) 72 cm^2
7. a) $x = 7,0 \text{ cm}$ b) $9,0 \text{ cm}$
8. a) $6,0 \text{ cm}$ b) 10 cm

21 Yhtenevyys

1. D
 2. A ja E
 3. a) $ABCDE \cong IJFGH$

b)

$\sphericalangle A$	$\sphericalangle I$
$\sphericalangle C$	$\sphericalangle F$
$\sphericalangle E$	$\sphericalangle H$
$\sphericalangle B$	$\sphericalangle J$
$\sphericalangle D$	$\sphericalangle G$
AB	IJ
DE	GH
EA	HI
CD	FG
BC	JF

4. a) $ABCDEF \cong KLGHIJ$

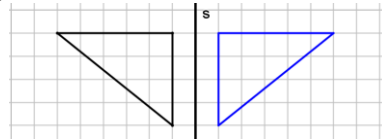
b)

$\sphericalangle A$	$\sphericalangle K$
$\sphericalangle B$	$\sphericalangle L$
$\sphericalangle D$	$\sphericalangle H$
$\sphericalangle C$	$\sphericalangle G$
$\sphericalangle E$	$\sphericalangle I$
AF	KJ
DE	HI
CB	GL
AB	KL
CD	GH

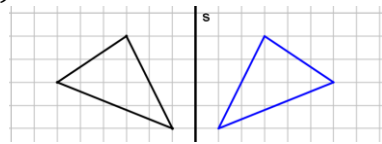
5. a) Kyllä b) Ei
 c) Kyllä d) Ei
6. a) $4,5 \text{ cm}$ b) $4,2 \text{ cm}$
 c) $5,1 \text{ cm}$
7. a) $3,2 \text{ cm}$ b) $2,2 \text{ cm}$
 c) $4,0 \text{ cm}$ d) $2,8 \text{ cm}$

22 Symmetria suoran ja pisteen suhteen

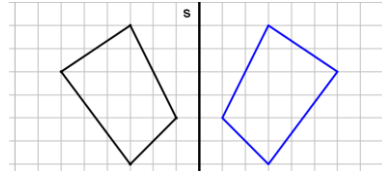
1. a)



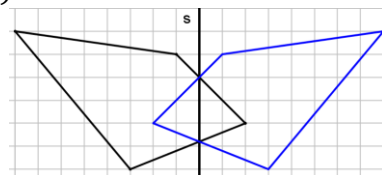
- b)



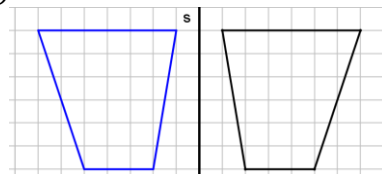
- c)



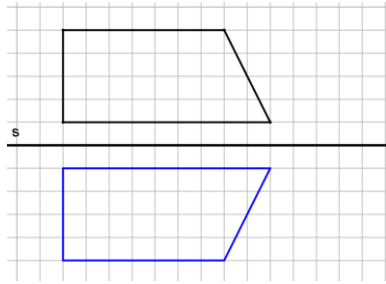
- d)



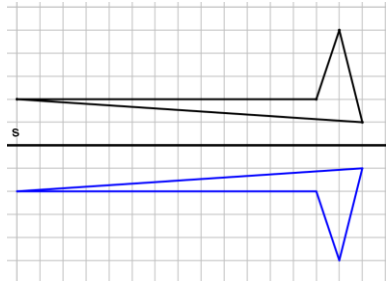
- e)



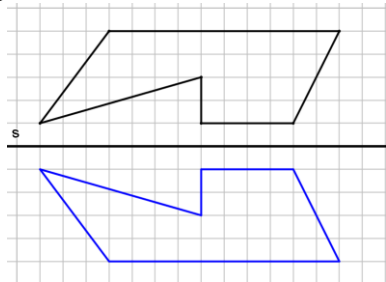
2. a)



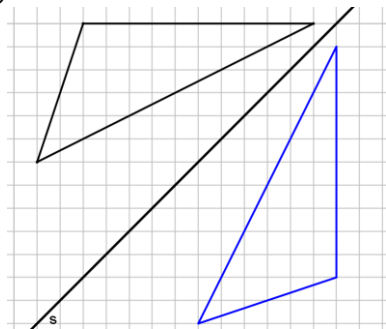
b)



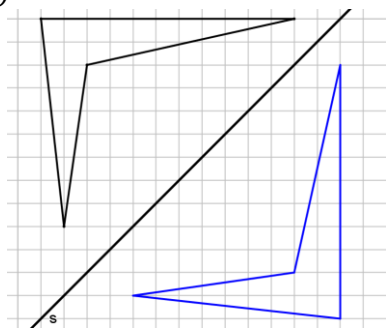
c)



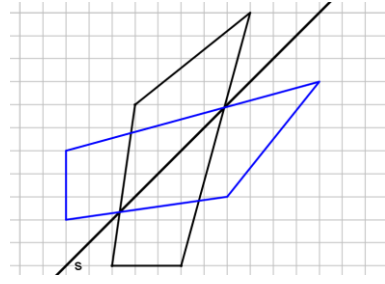
a)



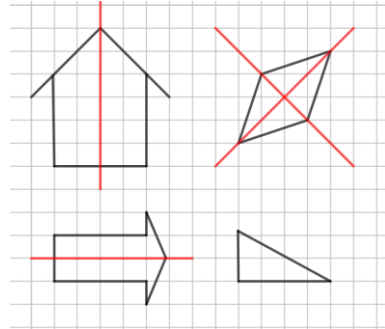
b)



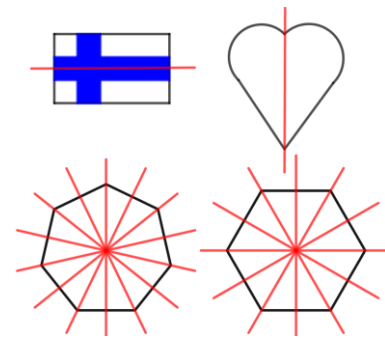
c)



3.



4.



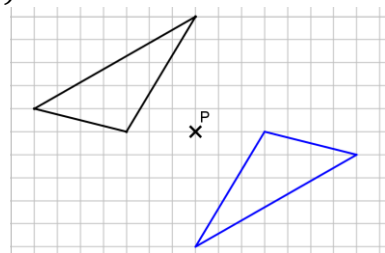
5. a) 1

b) 5

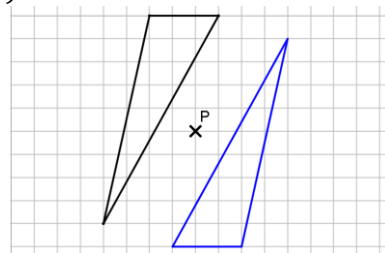
c) 0

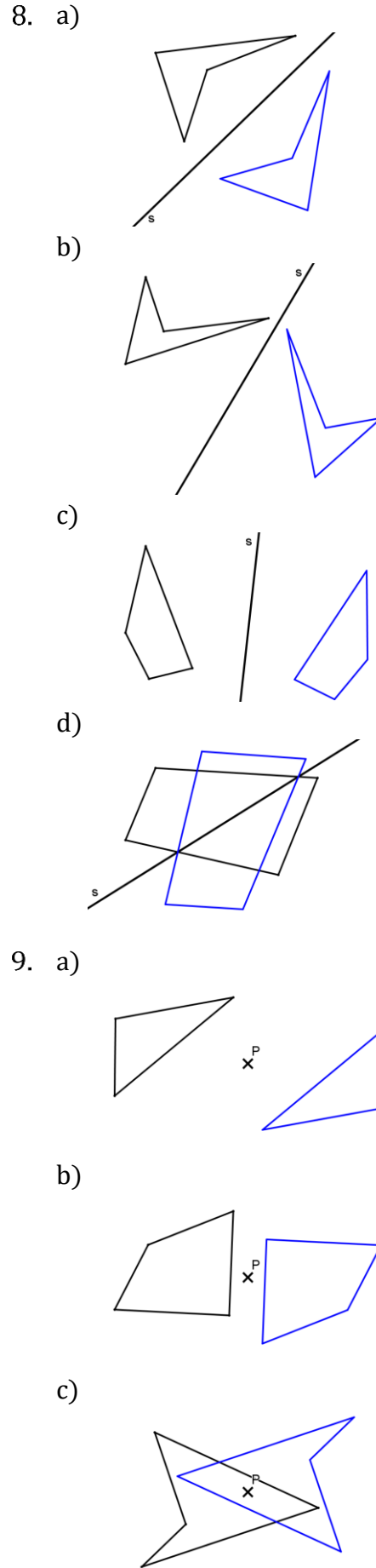
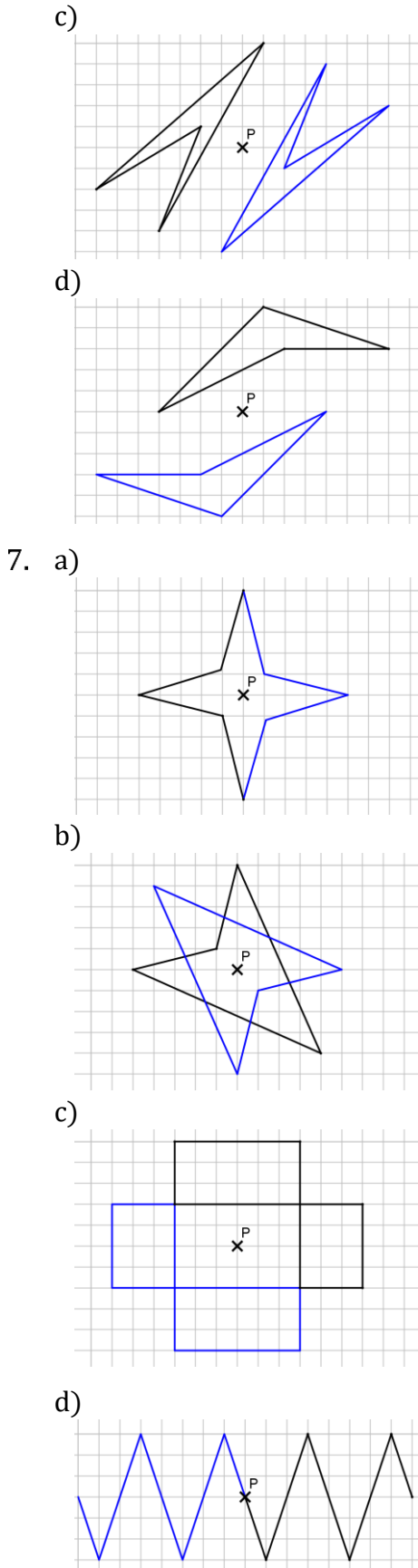
d) Äärettömän monta

6. a)



b)





Geometria 3

6. a) $p = 20,0 \text{ cm}$ $A = 21 \text{ cm}^2$
 b) $p = 16,0 \text{ cm}$ $A = 12 \text{ cm}^2$
7. $A = 39 \text{ cm}^2$
- 8.