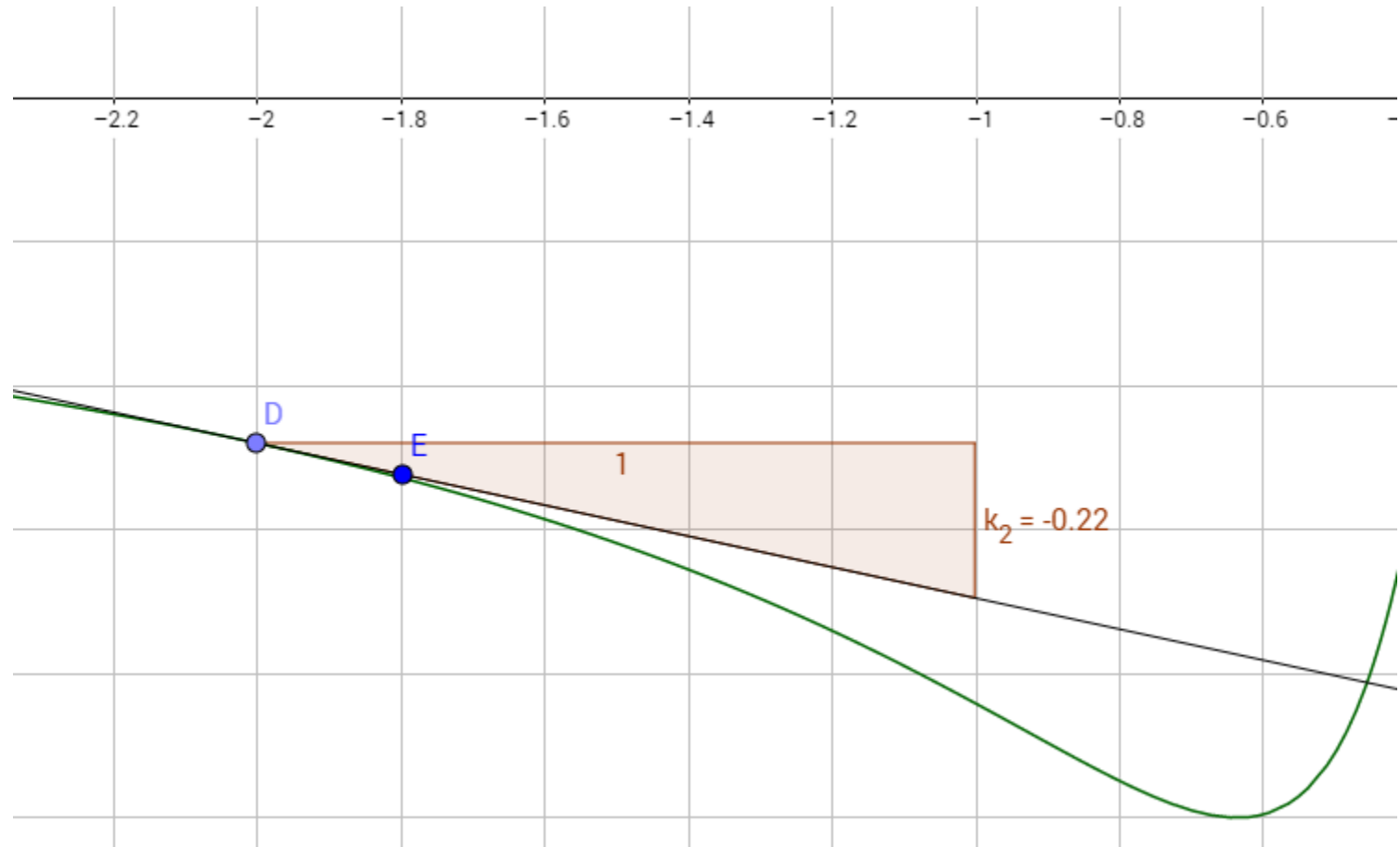


Muutosnopeus ja derivaatta

- Funktion f muutosnopeutta kohdassa a sanotaan funktion derivaataksi kohdassa a ja merkitään $f'(a)$.
- Jos funktiolle voidaan piirtää kohtaan a yksikäsitteinen tangentti, joka ei ole y -akselin suuntainen, niin silloin:

Funktion derivaatta kohdassa a on funktion kuvaajalle muuttujan arvon a kohdalle piirretyn tangentin kulmakerroin.

Esimerkki



Derivaatta ja erotusosamäärä

- Funktion derivaatta kohdassa a on erotusosamäärän raja-arvo

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

mikäli raja-arvo on olemassa.

Esimerkki

- Muodosta funktion $\sin \frac{1}{x}$ erotusosamäärä kohdassa -2 ja määritä sen avulla funktion derivaatta numeerisesti.
- Erotusosamäärä on

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{\sin \frac{1}{x} - \sin\left(\frac{1}{-2}\right)}{x - (-2)} \\ &= \frac{\sin \frac{1}{x} + \sin\left(\frac{1}{2}\right)}{x + 2} = e_1(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= -\sin(-x) \text{ eli} \\ -\sin\left(-\frac{1}{2}\right) &= \sin\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

- Lasketaan funktion $e_1(x)$ arvoja lähellä kohtaa -2 .

| x | $e_1(x)$ | x | $e_1(x)$ |
|------------|--------------------|------------|--------------------|
| $-1,9$ | $-0,229256159993$ | $-2,1$ | $-0,210287339415$ |
| $-1,99$ | $-0,2203465692106$ | $-2,01$ | $-0,2184522280919$ |
| $-1,999$ | $-0,219490393839$ | $-2,001$ | $-0,219300962269$ |
| $-1,9999$ | $-0,21940511243$ | $-2,0001$ | $-0,21938616927$ |
| $-1,99999$ | $-0,2193965876$ | $-2,00001$ | $-0,2193946933$ |

- Erotusosamäärän raja-arvo kohdassa -2 on noin $-0,2194$.
- $f'(-2) = -0,2194$

Derivaatta ja erotusosamäärä

- Jos erotusosamäärän lausekkeessa merkitään $x - a = h$, niin $x = a + h$. Tällöin saadaan erotusosamäärän toinen muoto.
- Funktion derivaatta kohdassa a on

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Esimerkki

- Muodosta funktion $\sin \frac{1}{x}$ erotusosamäärä kohdassa -2 ja määritä sen avulla funktion derivaatta numeerisesti.
- Erotusosamäärä on

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\sin \frac{1}{-2+h} - \sin \frac{1}{-2}}{h} \\ &= \frac{\sin \frac{1}{-2+h} + \sin \frac{1}{2}}{h} = e_2(h) \end{aligned}$$

- Lasketaan funktion $e_2(h)$ arvoja lähellä kohtaa $h = 0$.

| h | $e_2(h)$ | h | $e_2(h)$ |
|---------|------------------|----------|------------------|
| 0,1 | -0,229256159993 | -0,1 | -0,2102873394151 |
| 0,01 | -0,2203465692106 | -0,01 | -0,2184522280919 |
| 0,001 | -0,219490393839 | -0,001 | -0,219300962269 |
| 0,0001 | -0,21940511243 | -0,0001 | -0,21938616927 |
| 0,00001 | -0,2193965876 | -0,00001 | -0,2193946933 |

- Erotusosamäärän raja-arvo kun h lähestyy nollaa on noin $-0,2194$.
- $f'(-2) = -0,2194$

Numeerinen derivaatta

- Derivaatan numeerisessa määrittämisessä käytetään yleensä kaavaa, jossa tutkitaankin tangentin sijaan suoraa, joka kulkee kohtia $a - h$ ja $a + h$ vastaavien pisteiden kautta.
- Jos funktio f on derivoituva kohdassa a , niin

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h},$$

kun h on pieni

Esimerkki

Määritä funktion $\sin \frac{1}{x}$ derivaatta numeerisesti kohdassa -2 .

- Numeerinen derivaatta on $f'(-2) \approx$

$$\frac{f(-2+h) - f(-2-h)}{2h} = \frac{\sin \frac{1}{-2+h} - \sin \frac{1}{-2-h}}{2h} = g(h)$$

- Lasketaan funktion $g(h)$ arvoja taulukkoon pienillä h :n arvoilla.

| h | g(h) |
|-------------|--------------------|
| 0,1 | -0,219771749704135 |
| 0,01 | -0,21939939865125 |
| 0,001 | -0,219395678054 |
| 0,0001 | -0,21939564085 |
| 0,00001 | -0,21939564045 |
| 0,000001 | -0,2193956405 |
| 0,0000001 | -0,21939564 |
| 0,00000001 | -0,2193956 |
| 0,000000001 | -0,219396 |
| 10^{-10} | -0,2194 |
| 10^{-11} | -0,2194 |
| 10^{-12} | -0,219 |
| 10^{-13} | 0 |

- Tulosten perusteella $f'(-2) \approx -0,2194$
- Tähän tarkkuuteen riittäisi vähempikin laskeminen, mutta tässä huomaa, että h :n pienentyminen ei lisää tarkkuutta.