

5. Geometrinen jono ja summa

Määritelmä:

Lukujono (a_n) on geometrinen, jos sen peräkkäisten jäsenten suhde

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ on vakio. Tätä vakiota kutsutaan suhdeluvuksi (q) .

Esim1.

Lukujono 2, 6, 18, 54 on geometrinen lukujono, koska seuraava jäsen saadaan kertomalla luvulla 3.

Yleinen termi (lause)

Jos geometrisen lukujonon (a_n) suhdeluku on q , niin yleinen jäsen on

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Esim1.

Geometrisesta lukujonosta (a_n) tiedetään, että $a_3 = 16$ ja $a_4 = 32$.

a) Määritä a_1 ja a_{10}

b) Onko luku 10240 lukujonon jäsen? Jos on, niin kuinka mones jäsen?

Ratk.

a) Suhdeluku

$$q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{32}{16} = 2$$

Yleinen termi

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Selvitetään lukujonon ensimmäinen jäsen a_1 kolmannen jäsenen $a_3 = 16$ avulla

$$a_3 = a_1 \cdot q^{3-1}$$

$$16 = a_1 \cdot 2^2$$

$$4a_1 = 16 \quad || : 4$$

$$a_1 = 4$$

Lasketaan a_{10}

$$\begin{aligned}
 a_{10} &= a_1 \cdot q^{n-1} \\
 &= 4 \cdot 2^{10-1} \\
 &= 4 \cdot 2^9 \\
 &= 4 \cdot 512 \\
 &= 2048
 \end{aligned}$$

V: $a_1 = 4$ ja $a_{10} = 2048$

b) Yleinen jäsen $a_n = 4 \cdot 2^{n-1}$. Selvitetään saako yleinen jäsen arvoksi 10 240 jollakin n :n arvolla.

$$\begin{aligned}
 a_n &= 10240 \\
 4 \cdot 2^{n-1} &= 10240 \quad || : 4 \\
 2^{n-1} &= 2560 \\
 n - 1 &= \log_2 2560 \\
 n - 1 &= 11,32... \\
 n &= 12,32...
 \end{aligned}$$

V: n :n arvoksi ei saatu kokonaislukua, joten 10240 ei ole lukujonon $a_n = 4 \cdot 2^{n-1}$ jäsen

Geometrisen summa (lause)

Geometrisen lukujonon $a_1, a_2, \dots, a_n$ n :n ensimmäisen jäsenen summa

$$S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}, \quad q \neq 1$$

Esim2.

Geometrisessa lukujonossa $a_1 = 3$ ja $q = 4$.

a) Laske 5 ensimmäisen jäsenen summa

b) summa $\sum_{n=5}^{10} (a_n)$

c) Kuinka monta jäsentä pitää laskea yhteen, jotta tulos ylittää 100 ?

Ratk.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } S_5 &= \frac{a_1 (1 - q^5)}{1 - q} \\
 &= \frac{3 \cdot (1 - 4^5)}{1 - 4} \\
 &= 1\,023
 \end{aligned}$$

b) Lukujonon yleinen jäsen

$$\begin{aligned}
 a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \\
 a_5 &= 3 \cdot 4^{5-1} \\
 &= 768
 \end{aligned}$$

Lukujonossa yhteenlaskettavien jäsenten lukumäärä:

$$10 - 4 = 6$$

Lukujonon summa:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=5}^{10} (a_n) &= \frac{768 \cdot (1 - 4^6)}{1 - 4} \\
 &= 1\,048\,320
 \end{aligned}$$

$$\text{v: } \sum_{n=5}^{10} (a_n) = 1\,048\,320$$

$$\text{c) } S_n = 100$$

$$\frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} = 100$$

$$\text{a_1:=3} \quad \blacktriangleright \quad 3$$

$$\text{q:=4} \quad \blacktriangleright \quad 4$$

$$\text{s_n:=100} \quad \blacktriangleright \quad 100$$

$$\text{solve}\left(\text{s_n} = \frac{\text{a_1} \cdot (1 - \text{q}^n)}{1 - \text{q}}, n\right) \quad \blacktriangleright \quad n = 3.32911$$

Pyöristetään ylöspäin, jotta summa ylittää 100 eli $n = 4$

V: Lukujonon neljän ensimmäisen jäsenen summa ylittää 100

Tehtävät: 1, 3, 6, 14