

SARJA D

1. Määritä funktion $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{3x^2 + 9x}$ raja-arvo kohdissa -3 ja 0 .

2. Määritä funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 31$ kuvajan

- a) x -akselin suuntaisten tangenttien
b) y -akselin suuntaisten normaalien yhtälöt.

3. Pahvilevy, jonka mitat ovat $5 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$, taitetaan 5 cm pitkäksi tulitikkurasiaksi, jonka toinen raapaisupinta on kaksinkertainen. Mikä on rasian suurin mahdollinen tilavuus?

4. On päätetty rakentaa joka kohdasta yhtä syvä uima-allas, joka ylhäältä katsottuna on suorakulmio ja jonka pituus on kaksi kertaa niin suuri kuin leveys. Uima-altaan tilavuudeksi on päätetty 120 m^3 . Altaan pohja ja seinät kaakeloidaan. Määritä altaan mitat niin, että kaakelia kuluu mahdollisimman vähän. Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.

5. Paraabeli, jonka akseli on y -akselin suuntainen, kulkee pisteen $(0, 5)$ kautta ja sivuaa suoraa $y = x + 1$ pisteessä $(3, 4)$. Mikä paraabelin yhtälö on?

6. Osoita, että olipa a mikä reaali-luku tahansa, niin yhtälöllä $x^3 + ax^2 + a^2x - \frac{1}{2} = 0$ on tasan yksi juuri välillä $]0, 1[$.

SARJA E

1. Paraabelille $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$ pisteeseen

$(2, -3)$ piirretyt tangentti ja normaali rajaavat yhdessä y -akselin kanssa kolmion. Laske kolmion pinta-ala.

2. Osoita, että käyrät $y = \frac{1}{x}$ ja $y = \frac{1}{34 - 16x}$ leikkaavat toisensa kohtisuorasti.

3. Jätevedet johdetaan lietealtaasta puhdistamoon pitkin suoraa kourua, jonka poikkileikkauksen pinta-alan suuruudeksi on määrätty 1 m^2 . Virtausvastuksen minimoimiseksi kourun seinien ja pohjan yhteenlasketun pinta-alan tulee olla mahdollisimman pieni. Mitkä tulee asettaa poikkileikkauksen mitoiksi? Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.

4. Muodosta funktion $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ erotusosamäärä kohdassa 1 ja määritä erotusosamäärän raja-arvo kohdassa 1 . Tarkista tulos muodostamalla derivointikaavojen avulla derivaattafunktio $f'(x)$ ja laskemalla funktion arvo $f'(1)$.

5. Paraabelin $y = x^2 + 1$ pisteeseen, joka ei ole paraabelin huippu, piirretään paraabelin tangentti. Sivuauspiste ja y -akseli erottavat tangentista janan. Osoita, että janan keskipiste on suoralla $y = 1$.

6. Lankun poikkileikkaus on suorakulmio, jonka ympärysmitta on määrätty. Mikä lankun paksuuden suhde leveyteen tulee olla, jotta lankun kantokyky olisi mahdollisimman suuri? Lankun kantokyky on suoraan verrannollinen lankun paksuuden neliöön ja suoraan verrannollinen lankun leveyteen.

- (A) ① $-3 < x < -1$; ③ $2,58 \text{ m}$ ja $5,16 \text{ m}$; ④ $24,5 \text{ m}$ ja $49,0 \text{ m}$; ⑤ mää. juuret: R ; ⑥ $\frac{1}{6}$
 (B) ① 1 ; ② 63 m ; ③ 8 m :n pääte; ⑥ 10 -kohta
 (C) ① a) 5 , b) $\frac{1}{5}$; ② a) 12 m :n pääte, b) 17% , c) 6 m :n pääte; ③ 5 cm ; ④ $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$;
 ⑤ $a \leq -\frac{1}{4}$ tai $a \geq \frac{1}{4}$; ⑥ $-1 < a < 1$, suurin arvo: $\frac{8}{27}$
 (D) ① -2 ja -1 ; ② a) $y = 31$, b) $x = 0$, $x = 4$; ③ 30 cm^3 ; ④ $4,48 \text{ m} \times 8,96 \text{ m} \times 2,99 \text{ m}$;
 ⑤ $y = \frac{4}{9}x^2 - \frac{5}{3}x + 5$
 (E) ① 5 ; ③ $0,71 \text{ m}$ ja $1,41 \text{ m}$; ④ $f'(1) = -\frac{1}{2}$; ⑥ 2