

K1.

- a) Lasketaan 1,7 %:n korko vuoden ajalta.

$$0,017 \cdot 27\,500 = 467,50 \text{ (€)} \quad 1,7 \% = 0,017$$

Korosta pankki perii ja tilittää valtiolle 30 %:n lähdeveron. Lasketaan 30 % korosta 467,50 €.

$$0,30 \cdot 467,50 = 140,25 \text{ (€)} \quad 30 \% = 0,30$$

Lähdeveron pyöristyssäännön mukaan lähdeveron suuruus on 140,20 €.

$$\text{Leevi saa korkoa } 467,50 \text{ €} - 140,20 \text{ €} = 327,30 \text{ €}.$$

- b) Talletuksen reaaliarvon muutos saadaan selville laskemalla tilin pääoma vuoden kuluttua ja vertaamalla sitä pääomaan, jossa huomioidaan inflaatio eli yleisen hintatason muutos.

Tilin pääoma koron lisäämisen jälkeen on
 $27\,500,00 \text{ €} + 327,30 \text{ €} = 27\,827,30 \text{ €}.$

Talletusaikana inflaatio oli 0,8 %, joten pääoman 27 500 € ostovoima säilyy samana, jos pääoma kasvaa 0,8 %.

$$1,008 \cdot 27\,500,00 \text{ €} = 27\,720,00 \text{ €} \quad 100 \% + 0,8 \% = 100,8 \% \\ = 1,008$$

Verrataan pääomaa 27 827,30 € pääomaan 27 720,00 €.

$$\frac{27\,827,30}{27\,720,00} \approx 1,0039 = 100,39 \%$$

Pääoman reaaliarvo kasvoi $100,39 \% - 100 \% = 0,39 \%$.

Talletuksen reaalikorkokanta oli 0,39 %.

Vastaus

a) 327,30 €

b) 0,39 %

K2.

- a) Korkoa ei makseta laskun eräpäivältä, joten ensimmäinen korkopäivä on 21. kesäkuuta ja viimeinen 3. elokuuta.

Saksalaisessa korkotavassa jokaisessa kuukaudessa ajatellaan olevan 30 päivää ja vuodessa 360 päivää.

Korkopäiviä on
kesäkuussa $30 - 20 = 10$
heinäkuussa 30 ja
elokuussa 3.

Korkopäiviä on yhteensä $10 + 30 + 3 = 43$, joten korkoaika vuosina on
 $t = \frac{43}{360}.$

Lasketaan viivästyskoron suuruus.

$$\begin{aligned} r &= 800,05 \cdot 0,070 \cdot \frac{43}{360} & r &= Kit, \\ & & \text{missä } K &= 800,05; i = 0,070 \text{ ja} \\ &\approx 6,69 \text{ (€)} & t &= \frac{43}{360} \end{aligned}$$

Viivästyskoron suuruus on 6,69 €.

- b) Merkitään korkopäivien lukumäärää kirjaimella n ja muodostetaan lauseke viivästyskorolle.

$$\begin{aligned} r &= 800,05 \cdot 0,070 \cdot \frac{n}{360} & r &= Kit, \\ & & \text{missä } K &= 800,05; i = 0,070 \text{ ja} \\ & & t &= \frac{n}{360} \end{aligned}$$

Ratkaistaan, kuinka monessa korkopäivässä kertyy 15 euron viivästyskorko.

$$800,05 \cdot 0,070 \cdot \frac{n}{360} = 15 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella}$$
$$n \approx 96,4$$

Viivästyskorko olisi ylittänyt 15 euroa 97 päivän kuluttua.

Korkopäiviä on

kesäkuussa $30 - 20 = 10$

heinäkuussa 30 ja

$$10 + 30 = 40$$

elokuussa 30.

$$40 + 30 = 70$$

Tähän mennessä kertyneitä korkopäiviä on 70. Lisäksi tarvitaan $97 - 70 = 27$ syyskuun päivää. Kertyneen koron määrä ylittää 15 euroa 27.9.

Vastaus

a) 6,69 €

b) 27.9.

K3.

Lasketaan tilin nettokorkokanta.

$$0,70 \cdot 1,90 \% = 1,33 \%$$

$$100 \% - 30 \% = 70 \% = 0,70$$

Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla.

Kirjoitetaan sarakkeeseen A kuukausitalletukset.

Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 12 kuukautta, toinen 11 kuukautta ja niin edelleen. Viimeinen talletus kasvaa korkoa yhden kuukauden.

Kirjoitetaan sarakkeeseen B kunkin talletuksen korkoaika kuukausina.

Lasketaan soluun C2 ensimmäisen talletuksen koron suuruus kaavalla $r = Kit$ ja kopioidaan kaavaa soluihin C3–C13. Tilin nettokorkokanta on 1,33 %, joten $i = 0,0133$.

Lasketaan soluun D2 ensimmäisen talletuksen suuruus vuoden lopussa koron lisäämisen jälkeen ja kopioidaan kaavaa soluihin D3–D13.

	A	B	C	D
1	Talletus (€)	Korko- aika (kk)	Koron määrä (€)	Talletus vuoden lopussa (€)
2	253	12	=A2*0,0133*B2/12	=A2+C2
3	253	11		
4	253	10		
⋮	⋮	⋮		
13	253	1		

Ilmaistaan koron määrä ja talletuksen suuruus vuoden lopussa sentin tarkkuudella. Lasketaan lopuksi talletusten summa soluun D14.

	A	B	C	D
1	Talletus (€)	Korko- aika (kk)	Koron määrä (€)	Talletus vuoden lopussa (€)
2	253	12	3,36	256,36
3	253	11	3,08	256,08
4	253	10	2,80	255,80
5	253	9	2,52	255,52
6	253	8	2,24	255,24
7	253	7	1,96	254,96
8	253	6	1,68	254,68
9	253	5	1,40	254,40
10	253	4	1,12	254,12
11	253	3	0,84	253,84
12	253	2	0,56	253,56
13	253	1	0,28	253,28
14			Yhteensä	3057,87

=SUMMA(D2:D13)

Tilillä on rahaa vuoden lopussa koron maksamisen jälkeen 3057,87 €.

Vastaus

3057,87 €

K4.

- a) Lasketaan tilin nettokorkokanta.

$$0,70 \cdot 1,25 \% = 0,875 \%$$

Kun pääomaan lisätään 0,875 %:n nettokorko, niin korkokerroin on $100 \% + 0,875 \% = 100,875 \% = 1,00875$. Lasketaan pääoma viiden vuoden kuluttua.

$$K_5 = 80\,000 \cdot 1,00875^5$$

$$\approx 83\,561,79 \text{ (€)}$$

$$K_n = Kq^n, \text{ missä } K = 80\,000,$$

$$q = 1,00875 \text{ ja } n = 5.$$

Talletus kasvaa viidessä vuodessa 83 561,79 euroksi.

- b) Merkitään vuosien lukumäärää kirjaimella n ja muodostetaan lauseke talletuksen arvolle.

$$K_n = 80\,000 \cdot 1,00875^n$$

$$K_n = Kq^n,$$

$$\text{missä } K = 80\,000 \text{ ja } q = 1,00875.$$

Ratkaistaan, kuinka monen vuoden kuluttua talletuksen arvo on 90 000 euroa.

$$80\,000 \cdot 1,00875^n = 90\,000$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$n \approx 13,5$$

Talletuksen arvo ylittää 90 000 euroa 14 vuodessa.

Vastaus

- a) 83 561,79 euroksi

- b) 14 vuodessa

K5.

Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla.

Kirjoitetaan sarakkeeseen A talletukset. Ensimmäisen talletuksen talletusaika on viisi vuotta, toisen neljä vuotta ja niin edelleen. Viimeisen talletuksen talletusaika on kaksi vuotta.

Kirjoitetaan sarakkeeseen B kunkin talletuksen talletusaika vuosina.

Lasketaan soluun C2 ensimmäisen talletuksen arvo viiden vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksesta ja kopioidaan kaavaa soluihin C3–C5. Tilin nettokorkokanta on $0,70 \cdot 1,70 \% = 1,19 \%$, joten korkokerroin $q = 100 \% + 1,19 \% = 101,19 \% = 1,0119$.

	A	B	C
1	Talletus (€)	Talletusaika (v)	Talletuksen arvo lopussa (€)
2	2000	5	=A2*1,0119^B2
3	3000	4	
4	4000	3	
5	5000	2	

$$K_n = Kq^n$$

Ilmaistaan kasvaneet pääomat sentin tarkkuudella. Lasketaan lopuksi pääomien summa soluun C6.

	A	B	C
1	Talletus (€)	Talletusaika (v)	Talletuksen arvo lopussa (€)
2	2000	5	2121,87
3	3000	4	3145,37
4	4000	3	4144,51
5	5000	2	5119,71
6		Yhteensä	14531,45

$$=\text{SUMMA}(\text{C2:C5})$$

Tilillä on rahaa viiden vuoden kuluttua 14 531,45 €.

Vastaus

14 531,45 €

K6.

Lasketaan syntymäpäivälahjojen nykyarvot. Talletuksen nettokorkokanta on $0,70 \cdot 1,5 \% = 1,05 \%$.

18 vuoden kuluttua annettavan lahjan nykyarvo on

$$1800 \cdot 1,0105^{-18} \approx 1491,48 \text{ (€)}. \quad K_{18} = 1800, \quad q = 1,0105 \text{ ja } n = 18$$

19 vuoden kuluttua annettavan lahjan nykyarvo on

$$1900 \cdot 1,0105^{-19} \approx 1557,99 \text{ (€)}. \quad K_{19} = 1900, \quad q = 1,0105 \text{ ja } n = 19$$

20 vuoden kuluttua annettavan lahjan nykyarvo on

$$2000 \cdot 1,0105^{-20} \approx 1622,94 \text{ (€)}. \quad K_{20} = 2000, \quad q = 1,0105 \text{ ja } n = 20$$

Lasketaan lahjojen nykyarvojen summa.

$$1491,48 + 1557,99 + 1622,94 = 4672,41 \text{ (€)}$$

Pääoman tulee olla vähintään 4673 €.

Vastaus

4673 €

K7.

Merkitään Anjan tilille tehtävän talletuksen arvoa euroina kirjaimella x .
Tällöin Arton tilille tehtävän talletuksen arvo euroina on $9500 - x$.

Anjan talletus on tilillä $21 - 16 = 5$ vuotta. Anjan talletuksen arvo euroina on viiden vuoden kuluttua $x \cdot 1,025^5$.

Arton talletus on tilillä $21 - 12 = 9$ vuotta. Arton talletuksen arvo euroina on yhdeksän vuoden kuluttua $(9500 - x) \cdot 1,025^9$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan Anjan tilille tehtävän talletuksen arvo x .

$$x \cdot 1,025^5 = (9500 - x) \cdot 1,025^9 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x \approx 4984,39 \text{ (€)}$$

Vanhempien on sijoitettava Anjan tilille 4984,39 € ja
Arton tilille $9500 \text{ €} - 4984,39 \text{ €} = 4515,61 \text{ €}$.

Vastaus

Anjan tilille 4984,39 €, Arton tilille 4515,61 €

K8

- a) Määritetään lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä. Lausekkeeseen

$a_n = 10n - n^2$ sijoitetaan n :n arvot 1, 2, 3, 4 ja 5.

$$a_1 = 10 \cdot 1 - 1^2 = 9 \quad \text{Sijoitetaan } n = 1.$$

$$a_2 = 10 \cdot 2 - 2^2 = 16 \quad \text{Sijoitetaan } n = 2.$$

$$a_3 = 10 \cdot 3 - 3^2 = 21 \quad \text{Sijoitetaan } n = 3.$$

$$a_4 = 10 \cdot 4 - 4^2 = 24 \quad \text{Sijoitetaan } n = 4.$$

$$a_5 = 10 \cdot 5 - 5^2 = 25 \quad \text{Sijoitetaan } n = 5.$$

- b) Lukujonon ensimmäisen jäsen $a_1 = 8$.

Toisesta jäsenestä alkaen käytetään rekursiokaavaa $a_n = 2 \cdot a_{n-1} - 3$.

Määritetään lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä.

$$a_1 = 8$$

$$a_2 = 2 \cdot 8 - 3 = 13$$

$$a_3 = 2 \cdot 13 - 3 = 23$$

$$a_4 = 2 \cdot 23 - 3 = 43$$

$$a_5 = 2 \cdot 43 - 3 = 83$$

Vastaus

- a) Viisi ensimmäistä jäsentä ovat 9, 16, 21, 24 ja 25.
b) Viisi ensimmäistä jäsentä ovat 8, 13, 23, 43, 83

K9

- a) Luku -40 on lukujonon jäsen, jos löytyy sellainen positiivinen kokonaisluku n , jolla $a_n = -40$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$\begin{aligned}a_n &= -40 && \text{Sijoitetaan } a_n = 17 - 3n. \\17 - 3n &= -40 && | -17 \\-3n &= -57 && | : (-3) \\n &= 19\end{aligned}$$

Ratkaisu $n = 19$ on positiivinen kokonaisluku, joten luku -40 on lukujonon 19. jäsen.

- b) Luku -40 on lukujonon jäsen, jos löytyy sellainen positiivinen kokonaisluku n , jolla $a_n = -40$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$\begin{aligned}a_n &= -40 && \text{Sijoitetaan } a_n = 2n - 6. \\2n - 6 &= -40 && | +6 \\2n &= -34 && | : 2 \\n &= -17\end{aligned}$$

Ratkaisu $n = -17$ ei ole positiivinen kokonaisluku, joten luku -40 ei ole lukujonon jäsen.

Vastaus

- a) on, 19. jäsen
b) ei ole

K10

- a) Kirjoitetaan sarakkeeseen A jäsenten järjestysluvut 1, 2, 3, ..., 20. Lasketaan sarakkeeseen B lukujonon 20 ensimmäistä jäsentä ja niiden summa.

	A	B
1	n	jäsen
2	1	-4
3	2	-1
4	3	4
5	4	11
6	5	20
7	6	31
8	7	44
9	8	59
10	9	76
11	10	95
12	11	116
13	12	139
...
20	19	356
21	20	395
22	Summa	2770

"=A2^2 - 5

30. jäsen

"=summa(B2:B21)

Kahdeskymmenes jäsen on 395 ja kahdenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa 2770.

- b) Kirjoitetaan sarakkeeseen A jäsenten järjestysluvut 1, 2, 3, ..., 20. Lasketaan sarakkeeseen B lukujonon 20 ensimmäistä jäsentä ja niiden summa.

	A	B
1	n	jäsen
2	1	-4
3	2	3
4	3	24
5	4	87
6	5	276
7	6	843
8	7	2544
9	8	7647
10	9	22 956
11	10	68 883
12	11	206 664
13	12	620 007
...
20	19	1 355 971 704
21	20	4 067 915 127
22	Summa	6 101 872 550

"=3*B2 + 15

30. jäsen

"=summa(B2:B21)

Kahdeskymmenes jäsen on 4 067 915 127 ja kahdenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa 6 101 872 550.

Vastaus

- a) kahdeskymmenes jäsen on 395;
kahdenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa 2770
- b) kahdeskymmenes jäsen on 4 067 915 127;
kahdenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa 6 101 872 550

K11

- a) Jonon erotusluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten erotus.

$$d = 6 - (-3) = 9$$

$$d = a_2 - a_1$$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= -3 + (n-1) \cdot 9 & a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ &= -3 + 9n - 9 \\ &= 9n - 12 \end{aligned}$$

Lasketaan jonon 10. jäsen.

$$a_{10} = 9 \cdot 10 - 12 = 78$$

- b) Jonon suhdeluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten suhde.

$$q = \frac{6}{-3} = -2$$

$$q = \frac{a_2}{a_1}$$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = -3 \cdot (-2)^{n-1} \qquad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Lasketaan jonon 10. jäsen.

$$a_{10} = -3 \cdot (-2)^9 = 1536$$

Vastaus

a) $a_n = 9n - 12$, $a_{10} = 78$

b) $a_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$, $a_{10} = 1536$

K12

- a) Jonon erotusluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten erotus.

$$d = 6 - 2 = 4$$

$$d = a_2 - a_1$$

Lasketaan jonon 25. jäsen.

$$a_{25} = 2 + 24 \cdot 4 = 98$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 2$, viimeinen yhteenlaskettava $a_{25} = 98$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 25$. Lasketaan aritmeettisen summan arvo.

$$S_{25} = 25 \cdot \frac{2 + 98}{2} = 1250$$

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

- b) Jonon suhdeluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten suhde.

$$q = \frac{6}{2} = 3$$

$$q = \frac{a_2}{a_1}$$

Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 2$, jonon suhdeluku $q = 3$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 25$. Lasketaan geometrisen summan arvo.

$$S_{25} = \frac{2 \cdot (1 - 3^{25})}{1 - 3}$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

$$= 847\,288\,609\,442$$

Vastaus

a) 1250

b) 847 288 609 442

K13

- a) Ensimmäinen yhteenlaskettava on 21 ja viimeinen yhteenlaskettava 636.

Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä aritmeettisen jonon 21, 26, ..., 636 yleisen jäsenen lausekkeen avulla.

Ensimmäinen jäsen $a_1 = 21$ ja erotusluku $d = 26 - 21 = 5$.
Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned}a_n &= 21 + (n-1) \cdot 5 & a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\&= 21 + 5n - 5 \\&= 5n + 16\end{aligned}$$

Ratkaistaan, kuinka mones jonon jäsen on luku 636.

$$\begin{aligned}a_n &= 636 & \text{Sijoitetaan } a_n &= 5n + 16. \\5n + 16 &= 636 & \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\n &= 124\end{aligned}$$

Luku 636 on jonon 124. jäsen, joten yhteenlaskettavien lukumäärä on 124.

Lasketaan aritmeettisen summan arvo.

$$S_{124} = 124 \cdot \frac{21 + 636}{2} = 40\,734 \quad S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

b) Ensimmäinen yhteenlaskettava on 1 ja suhdeluku $q = \frac{3}{1} = 3$.

Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä geometrisen jonon 1, 3, ..., 1 594 323 yleisen jäsenen lausekkeen avulla.

Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1} \qquad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Ratkaistaan, kuinka mones jonon jäsen on luku 1 594 323.

$$\begin{array}{ll} a_n = 1\,594\,323 & \text{Sijoitetaan } a_n = 3^{n-1}. \\ 3^{n-1} = 1\,594\,323 & \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ n = 14 & \end{array}$$

Luku 1 594 323 on jonon 14. jäsen, joten yhteenlaskettavien lukumäärä on 14.

Lasketaan geometrisen summan arvo.

$$S_{14} = \frac{1 \cdot (1 - 3^{14})}{1 - 3} = 2\,391\,484 \qquad S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Vastaus

a) 40 734

b) 2 391 484

K14

a) Jonon erotusluku on

$$d = 492 - 500 = -8.$$

$$d = a_2 - a_1$$

Jonon yleisen jäsenen lauseke on

$$a_n = 500 + (n - 1) \cdot (-8)$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$= 500 - 8n + 8$$

$$= 508 - 8n$$

Tapa 1. Yhtälön avulla

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$a_n = 10$$

$$\text{Sijoitetaan } a_n = 508 - 8n.$$

$$508 - 8n = 10$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$n = 62,25$$

Koska lukujonon jäsenet pienenevät koko ajan, viimeinen kymmentä suurempi jäsen on jonon 62. jäsen.

Jonon 62 ensimmäistä jäsentä ovat suurempia kuin 10.

Tapa 2. Epäyhtälön avulla.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan n .

$$a_n > 10$$

$$\text{Sijoitetaan } a_n = 508 - 8n.$$

$$508 - 8n > 10$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$n < 62,25$$

Suurin positiivinen kokonaisluku n , joka toteuttaa epäyhtälön, on 62.

Jonon 62 ensimmäistä jäsentä ovat suurempia kuin 10.

b) Jonon suhdeluku on

$$q = \frac{490}{500} = 0,98.$$

$$q = \frac{a_2}{a_1}$$

Jonon yleisen jäsenen lauseke on

$$a_n = 500 \cdot 0,98^{n-1}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Tapa 1. Yhtälön avulla

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$a_n = 10$$

$$\text{Sijoitetaan } a_n = 500 \cdot 0,98^{n-1}.$$

$$500 \cdot 0,98^{n-1} = 10$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$n \approx 194,64$$

Koska lukujonon jäsenet pienenevät koko ajan, viimeinen kymmentä suurempi jäsen on jonon 194. jäsen.

Jonon 194 ensimmäistä jäsentä ovat suurempia kuin 10.

Tapa 2. Epäyhtälön avulla.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan n .

$$a_n > 10$$

$$\text{Sijoitetaan } a_n = 500 \cdot 0,98^{n-1}.$$

$$500 \cdot 0,98^{n-1} > 10$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$n < 194,64$$

Suurin positiivinen kokonaisluku n , joka toteuttaa epäyhtälön, on 194.

Jonon 194 ensimmäistä jäsentä ovat suurempia kuin 10.

Vastaus

a) 62 ensimmäistä jäsentä

b) 194 ensimmäistä jäsentä

K15

a) Jonon erotusluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten erotus.

$$d = 14 - 10 = 4$$

$$d = a_2 - a_1$$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 10 + (n - 1) \cdot 4 \\ &= 10 + 4n - 4 \\ &= 4n + 6 \end{aligned}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Kun lasketaan yhteen jonon n ensimmäistä jäsentä, ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 10$ ja viimeinen yhteenlaskettava on $a_n = 4n + 6$.

Summan arvo on

$$S_n = n \cdot \frac{10 + (4n + 6)}{2} = n \cdot \frac{4n + 16}{2}.$$

Tapa 1. Yhtälön avulla.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$S_n = 10\,000$$

$$\text{Sijoitetaan } S_n = n \cdot \frac{4n + 16}{2}$$

$$n \cdot \frac{4n + 16}{2} = 10\,000$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$n \approx -72,7 \quad \text{tai} \quad n \approx 68,7$$

Koska jonon kaikki jäsenet ovat positiivisia, summan arvo suurenee, kun yhteenlaskettavien jäsenten lukumäärä kasvaa.

On siis laskettava yhteen vähintään 69 lukujonon ensimmäistä jäsentä.

Tapa 2. Epäyhtälön avulla.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan n .

$$S_n > 10\,000 \qquad \text{Sijoitetaan } S_n = n \cdot \frac{4n+16}{2}$$

$$n \cdot \frac{4n+16}{2} > 10\,000 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$n < -72,7 \quad \text{tai} \quad n > 68,7$$

Pienin positiivinen kokonaisluku n , joka toteuttaa epäyhtälön, on 69.

On siis laskettava yhteen vähintään 69 lukujonon ensimmäistä jäsentä.

b) Merkitään yhteenlaskettavien lukumäärää kirjaimella n .

Jonon suhdeluku on

$$q = \frac{11}{10} = 1,1. \qquad q = \frac{a_2}{a_1}$$

Geometrisen jonon 10; 11; 12,1; ... n :n ensimmäisen jäsenen summa on

$$S_n = \frac{10 \cdot (1 - 1,1^n)}{1 - 1,1}. \qquad S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Tapa 1. Yhtälön avulla

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$S_n = 10\,000 \qquad \text{Sijoitetaan } S_n = \frac{10 \cdot (1 - 1,1^n)}{1 - 1,1}.$$

$$\frac{10 \cdot (1 - 1,1^n)}{1 - 1,1} = 10\,000 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$n \approx 48,42$$

Koska lukujonon kaikki jäsenet ovat positiivisia, summan arvo kasvaa, kun yhteenlaskettavien lukumäärä n kasvaa.

On siis laskettava yhteen vähintään 49 lukujonon ensimmäistä jäsentä.

Tapa 2. Epäyhtälön avulla.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan n .

$$S_n > 10\,000 \qquad \text{Sijoitetaan } S_n = \frac{10 \cdot (1 - 1,1^n)}{1 - 1,1}.$$

$$\frac{10 \cdot (1 - 1,1^n)}{1 - 1,1} > 10\,000 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$n > 48,42$$

Pienin positiivinen kokonaisluku n , joka toteuttaa epäyhtälön, on 49.

On siis laskettava yhteen vähintään 49 lukujonon ensimmäistä jäsentä.

Vastaus

a) vähintään 69

b) vähintään 49

K16

- a) Aritmeettisen summan $\sum_{n=5}^{75} (3n - 4)$

ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_5 = 3 \cdot 5 - 4 = 11$,

viimeinen yhteenlaskettava on $a_{75} = 3 \cdot 75 - 4 = 221$ ja

yhteenlaskettavien lukumäärä on $n = 75 - 4 = 71$.

Lasketaan summan arvo.

$$\begin{aligned} S_{71} &= 71 \cdot \frac{11 + 221}{2} \\ &= 8236 \end{aligned}$$

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

- b) Geometrisen summan $\sum_{n=1}^{15} (4 \cdot 3^n)$

ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 4 \cdot 3^1 = 12$,

suhdeluku $q = 3$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 15$.

Lasketaan summan arvo.

$$\begin{aligned} S_{15} &= \frac{12 \cdot (1 - 3^{15})}{1 - 3} \\ &= 86\,093\,436 \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Vastaus

a) 8236

b) 86 093 436

K17

- a) Muodostetaan toisen jäsenen ja viidennen jäsenen perusteella kaksi yhtälöä, joissa muuttujina ovat a_1 ja d . Ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} a_2 = 14 & a_2 = a_1 + d \\ a_5 = 36,5 & a_5 = a_1 + 4d \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + d = 14 \\ a_1 + 4d = 36,5 \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$a_1 = 6,5 \text{ ja } d = 7,5$$

Lukujonon ensimmäinen jäsen on 6,5.

- b) Muodostetaan toisen jäsenen ja neljännen jäsenen perusteella kaksi yhtälöä, joissa muuttujina ovat a_1 ja q . Ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} a_2 = 18 & a_2 = a_1 \cdot q \\ a_4 = 162 & a_4 = a_1 \cdot q^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot q = 18 \\ a_1 \cdot q^3 = 162 \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$a_1 = -6 \text{ ja } q = -3 \text{ tai } a_1 = 6 \text{ ja } q = 3$$

Lukujonon ensimmäinen jäsen on -6 tai 6 .

Vastaus

a) 6,5

b) -6 tai 6

K18

- a) Lukujono on aritmeettinen, jos peräkkäisten jäsenten erotus $a_{n+1} - a_n$ on vakio kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$.

Muodostetaan peräkkäisten jäsenten lausekkeet.

$$a_n = 4 - 17n$$

$$a_{n+1} = 4 - 17(n+1) = 4 - 17n - 17 = -13 - 17n$$

Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotus.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (-13 - 17n) - (4 - 17n) \\ &= -13 - 17n - 4 + 17n \\ &= -17 \end{aligned}$$

Koska $a_{n+1} - a_n = -17$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$, lukujono (a_n) on aritmeettinen. \square

- b) Lukujonon jäsenistä mikään ei ole nolla, joten lukujono on geometrinen, jos peräkkäisten jäsenten suhde $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ on vakio kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$.

Muodostetaan peräkkäisten jäsenten lausekkeet.

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^{4n}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot 3^{4(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot 3^{4n+4}$$

Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhde.

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot 3^{4n+4}}{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot 3^{4n}} & \frac{u^n}{u^m} &= u^{n-m} \\ &= 3^{4n+4-4n} \\ &= 3^4 = 81\end{aligned}$$

Koska $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 81$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$, lukujono (a_n) on geometrinen. \square

K19

Merkitään kuukausittaisen talletuksen suuruutta kirjaimella x .

Mirja tallettaa tilille rahaa yhteensä $12x$ (€).

Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 12 kuukautta, toinen talletus 11 kuukautta ja niin edelleen. Viimeinen talletus kasvaa korkoa 1 kuukauden.

Tilin nettokorkokanta on $0,70 \cdot 2,65 \% = 1,855 \%$.

Muodostetaan lauseke, joka ilmaisee talletukselle kertyvän koron määrän.

$$\begin{aligned} & x \cdot 0,01855 \cdot \frac{12}{12} + x \cdot 0,01855 \cdot \frac{11}{12} + \dots + x \cdot 0,01855 \cdot \frac{1}{12} \\ &= x \cdot 0,01855 \cdot \frac{1}{12} \cdot (12 + 11 + \dots + 1) \\ &= x \cdot 0,01855 \cdot \frac{1}{12} \cdot 12 \cdot \frac{12+1}{2} \\ &= x \cdot 0,01855 \cdot \frac{1}{12} \cdot 78 \end{aligned}$$

Erotetaan
yhteinen
tekijä.
Lasketaan sulkeista
aritmeettinen summa.

Vuoden lopussa koron maksamisen jälkeen tilin pääoma on

$$12x + x \cdot 0,01855 \cdot \frac{1}{12} \cdot 78.$$

Ratkaistaan, kuinka suurella kuukausittaisella talletuksella x tilillä on vuoden lopussa rahaa 3500 €.

$$\begin{aligned} 12x + x \cdot 0,01855 \cdot \frac{1}{12} \cdot 78 &= 3500 \\ x &\approx 289 \text{ (€)} \end{aligned}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Kuukausittaisen talletuksen tulisi olla 289 euroa.

Vastaus

289 €

K20

Tilin nettokorkokanta on 1,25 %. Pääoma kasvaa vuosittain 1,0125-kertaiseksi.

Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa $64 - 45 = 19$ vuotta, toinen talletus 18 vuotta ja niin edelleen. Viimeinen talletus kasvaa korkoa $64 - 55 = 9$ vuotta.

Lasketaan, kuinka paljon tilillä on rahaa Matiaksen 64-vuotispäivänä.

$$\begin{aligned} & 1000 \cdot 1,0125^{19} + 1000 \cdot 1,0125^{18} + \dots + 1000 \cdot 1,0125^{10} + 1000 \cdot 1,0125^9 \\ &= 1000 \cdot 1,0125^9 + 1000 \cdot 1,0125^{10} + \dots + 1000 \cdot 1,0125^{18} + 1000 \cdot 1,0125^{19} \end{aligned}$$

Kyseessä on geometrinen summa, jossa ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 1000 \cdot 1,0125^9$, yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 19 - 8 = 11$ ja suhdeluku $q = 1,0125$. Lasketaan summan arvo.

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1000 \cdot 1,0125^9 \cdot (1 - 1,0125^{11})}{1 - 1,0125} & S_n &= \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \\ &\approx 13\,099,60 \text{ (€)} \end{aligned}$$

Matiaksella on matkarahaa 13 099,60 €

Vastaus

13 099,60 €

K21

Merkitään vuotuisen talletuksen suuruutta kirjaimella x .

Tilin nettokorkokanta on 1,95 %. Pääoma kasvaa vuosittain 1,0195-kertaiseksi.

Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 20 vuotta, toinen talletus 19 vuotta ja niin edelleen. Viimeinen talletus kasvaa korkoa 1 vuoden.

Muodostetaan lauseke, joka ilmaisee tilillä olevan rahamäärän 20 vuoden kuluttua.

$$\begin{aligned} & x \cdot 1,0195^{20} + x \cdot 1,0195^{19} + \dots + x \cdot 1,0195^2 + x \cdot 1,0195^1 \\ &= x \cdot 1,0195^1 + x \cdot 1,0195^2 + \dots + x \cdot 1,0195^{19} + x \cdot 1,0195^{20} \end{aligned}$$

Kyseessä on geometrinen summa, jossa ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = x \cdot 1,0195$, yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 20$ ja suhdeluku $q = 1,0195$. Muodostetaan summan lauseke.

$$S_{20} = \frac{x \cdot 1,0195 \cdot (1 - 1,0195^{20})}{1 - 1,0195} \qquad S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Ratkaistaan, kuinka suurella vuotuisella talletuksella x tilillä on 20 vuoden kuluttua rahaa 8000 €.

$$\frac{x \cdot 1,0195 \cdot (1 - 1,0195^{20})}{1 - 1,0195} = 8000 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x \approx 325 \text{ (€)}$$

Tilille kertyy 8000 €, jos vuotuinen talletus on 325 €.

Vastaus

325 €

K22

- a) Pitää laskea stipendien nykyarvot. Myönnettyjen stipendien yhteenlasketun nykyarvon tulee olla yhtä suuri kuin lahjoitettu rahamäärä 15 000 euroa.

Merkitään yhden stipendin suuruutta kirjaimella x .

Toisen, vuoden kuluttua jaettavan stipendin, nykyarvo on $x \cdot 1,045^{-1}$.

Kahden vuoden kuluttua jaettavan stipendin nykyarvo on $x \cdot 1,045^{-2}$.

...
Viimeisen, 20 vuoden kuluttua jaettavan stipendin, nykyarvo on $x \cdot 1,045^{-20}$.

Joka vuosi jaetaan kaksi stipendiä. Kaikkien stipendien nykyarvojen summa on

$$2x + 2x \cdot 1,045^{-1} + 2x \cdot 1,045^{-2} + \dots + 2x \cdot 1,045^{-20}.$$

Summa on geometrinen summa, jossa yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 20$, ensimmäisen yhteenlaskettava $a_1 = 2x$ ja suhdeluku $q = 1,045^{-1}$.

Summan arvo on

$$\begin{aligned} S_{20} &= \frac{2x \cdot (1 - (1,045^{-1})^{20})}{1 - 1,045^{-1}} & S_n &= \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \\ &= \frac{2x \cdot (1 - 1,045^{-20})}{1 - 1,045^{-1}}. \end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan stipendin suuruus x .

$$\frac{2x \cdot (1 - 1,045^{-20})}{1 - 1,045^{-1}} = 15\,000 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x \approx 551,74 \text{ (€)}$$

Stipendin suuruus voi olla 550 euroa.

- b) Stipendin suuruus on 700 euroa.
Merkitään korkokerrointa kirjaimella q .

a-kohdan perusteella stipendien nykyarvojen summa on

$$\begin{aligned} S_{20} &= \frac{2 \cdot 700 \cdot (1 - (q^{-1})^{20})}{1 - q^{-1}} \\ &= \frac{2 \cdot 700 \cdot (1 - q^{-20})}{1 - q^{-1}}. \end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan korkokerroin q .

$$\frac{2 \cdot 700 \cdot (1 - q^{-20})}{1 - q^{-1}} = 15\,000 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$q \approx 1,0784 \text{ (€)}$$

Korkokerroin $1,0784 = 107,84\%$ vastaa $7,84\%$:n vuotuista korkoa.

Vastaus

- a) 550 €
b) 7,84 %

K23

- a) Merkitään ensimmäisen pallon sädettä kirjaimella r_1 ja sen sisään asetetun kuution särmän pituutta kirjaimella a_1 .

Pallon sisään asetetun kuution avaruuslävistäjä on pallon halkaisija. Kun kuution särmän pituus on a_1 , avaruuslävistäjän pituus on

$$\sqrt{a_1^2 + a_1^2 + a_1^2} = \sqrt{3a_1^2} = \sqrt{3} \cdot a_1.$$

Siis

$$\sqrt{3} \cdot a_1 = 2r_1 \quad | : \sqrt{3}$$

$$a_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} r_1$$

Kuution sisään asetetun pallon halkaisijan pituus on yhtä suuri kuin kuution särmän pituus. Toisen pallon säde on siis puolet ensimmäisen kuution särmän pituudesta.

$$r_2 = \frac{1}{2} a_1 \quad \text{Sijoitetaan } a_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} r_1.$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} r_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} r_1$$

Seuraava pallo sijoitetaan samalla tavalla r_2 -säteisen pallon sisään, joten sen säde on $r_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} r_2$ ja niin edelleen.

Koska seuraavan pallon säde saadaan aina edellisen pallon säteestä kertomalla luvulla $\frac{1}{\sqrt{3}}$, pallojen säteen muodostavat geometrisen

jonon, jonka suhdeluku $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

- b) Kaikki pallot ovat yhdenmuotoisia, joten niiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö. Säteiden suhde on pallojen mittakaava. Siis peräkkäisten pallojen pinta-alojen suhde on

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$

Pinta-alat muodostavat siis geometrisen jonon, jonka suhdeluku $q = \frac{1}{3}$.

- c) Kaikki pallot ovat yhdenmuotoisia, joten niiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio. Säteiden suhde on pallojen mittakaava. Siis peräkkäisten pallojen tilavuuksien suhde on

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1}{(\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Tilavuudet muodostavat siis geometrisen jonon, jonka suhdeluku

$$q = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Vastaus

$$\text{a) } q = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{b) } q = \frac{1}{3} \quad \text{c) } q = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

K24.

- a) Maksueriä on yhteensä $15 \cdot 12 = 180$ kappaletta.

$$\text{Kertalyhennys on } \frac{90\,000 \text{ €}}{180} = 500 \text{ €}.$$

Lasketaan ensimmäisen kuukauden korko.

$$90\,000 \cdot 0,036 \cdot \frac{1}{12} = 270 \text{ (€)} \quad \begin{array}{l} r = Kit, \text{ missä } K = 90\,000, \\ i = 0,036 \text{ ja } t = \frac{1}{12}. \end{array}$$

Lasketaan ensimmäinen takaisinmaksuerä.

$$500 + 270 = 770 \text{ (€)} \quad \text{kertalyhennys} + \text{korko}$$

- b) Viimeisen 500 euron takaisinmaksuerän jälkeen lainapääoma on 0 €.

Lasketaan viimeisen puolivuotiskauden korko.

$$500 \cdot 0,036 \cdot \frac{1}{12} = 1,50 \text{ (€)} \quad \begin{array}{l} r = Kit, \text{ missä } K = 500, \\ i = 0,036 \text{ ja } t = \frac{1}{12}. \end{array}$$

Lasketaan viimeinen
takaisinmaksuerä.

$$500 + 1,50 = 501,50 \text{ (€)} \quad \text{kertalyhennys} + \text{korko}$$

- c) Kuukausittaiset korot muodostavat aritmeettisen summan, jonka ensimmäinen jäsen on 270 € ja viimeinen jäsen on 1,50 €.

Summassa on jäseniä 180 kappaletta.

Lasketaan maksetun koron määrä.

$$\begin{aligned} n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} & \quad n = 180, a_1 = 270 \text{ €, } a_{96} = 1,50 \text{ €} \\ = 180 \cdot \frac{270 \text{ €} + 1,50 \text{ €}}{2} \\ = 24\,435 \text{ €} \end{aligned}$$

Vastaus

- a) 770 € b) 501,50 € c) 24 435 €

K25.

- a) Takaisinmaksueriä on kaikkiaan $\frac{60\,000}{1000} = 60$.

Lainakuukausia on yhtä monta kuin lyhennyseriä, joten lainan takaisinmaksuaika on 60 kk = 5 vuotta.

- b) Vuosikorko 5,00 % = 0,05.

Ensimmäisen kuukauden korko on

$$\begin{aligned} r &= Kit & K &= 60\,000 \text{ €}, i = 0,05, t = \frac{1}{12} \\ &= 60\,000 \text{ €} \cdot 0,05 \cdot \frac{1}{12} \\ &= 250 \text{ €} \end{aligned}$$

Viimeisen kuukauden korko on

$$\begin{aligned} r &= Kit & K &= 1000 \text{ €}, i = 0,05, t = \frac{1}{12} \\ &= 1000 \text{ €} \cdot 0,05 \cdot \frac{1}{12} \\ &\approx 4,17 \text{ €} \end{aligned}$$

Kuukausittaiset korot muodostavat aritmeettisen summan.

$$\begin{aligned} n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} & \quad n = 60, a_1 = 250 \text{ €}, a_{60} = 4,17 \text{ €} \\ &= 60 \cdot \frac{250 \text{ €} + 4,17 \text{ €}}{2} \\ &= 7625,10 \text{ €} \end{aligned}$$

Lainan kokonaiskustannukset koostuvat koroista ja pääomasta.

Kokonaiskustannukset ovat

$$60\,000 \text{ €} + 7625,10 \text{ €} = 67\,625,10 \text{ €} \approx 67\,625 \text{ €}.$$

Vastaus

- a) 5 vuotta
b) 67 625 €

K26.

Huomaa:

Tehtävän voi ratkaista joko ensimmäisen tai viimeisen maksuerän avulla, molempia ei tarvita.

Merkitään lainan alkupääomaa kirjaimella a .

Maksueriä on $18 \cdot 12 = 216$.

Kertalyhennys on $\frac{a}{216}$.

Tapa 1: Ratkaisu ensimmäisen maksuerän avulla

Ensimmäisen kuukauden korko on

$$\begin{aligned} r &= Kit & K = a, i = 0,039, t = \frac{1}{12} \\ &= a \cdot 0,039 \cdot \frac{1}{12} \\ &= \frac{0,039a}{12} \end{aligned}$$

Ensimmäinen maksuerä on $\frac{a}{216} + \frac{0,039a}{12}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a .

$$\begin{aligned} \frac{a}{216} + \frac{0,039a}{12} &= 1875,35 && \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ a &\approx 237\,999,77 \\ &\approx 238\,000 \text{ (€)} \end{aligned}$$

Vastaus

238 000 €

Tapa 2: Ratkaisu viimeisen maksuerän avulla

Viimeisen kuukauden korko on

$$\begin{aligned} r &= Kit & K &= \frac{a}{216}, i = 0,039, t = \frac{1}{12} \\ &= \frac{a}{216} \cdot 0,039 \cdot \frac{1}{12} \\ &= \frac{0,039a}{216 \cdot 12} \end{aligned}$$

Viimeinen maksuerä on $\frac{a}{216} + \frac{0,039a}{216 \cdot 12}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a .

$$\begin{aligned} \frac{a}{216} + \frac{0,039a}{216 \cdot 12} &= 1105,43 && \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ a &\approx 237\,999,38 \\ &\approx 238\,000 \text{ (€)} \end{aligned}$$

Vastaus

238 000 €

K27.

- a) Maksueriä on yhteensä $17 \cdot 12 = 204$ kappaletta.

Lasketaan maksukauden korkokerroin.

$$q = 100 \% + \frac{4,8 \%}{12} = 100,4 \% = 1,004$$

Lasketaan takaisinmaksuerän suuruus.

$$A = 90\,000 \cdot 1,004^{204} \cdot \frac{1 - 1,004}{1 - 1,004^{204}} \quad A = Kq^n \frac{1 - q}{1 - q^n}, \text{ missä}$$
$$\approx 646,22 \text{ (€)} \quad K = 90\,000, q = 1,004$$

ja $n = 204$.

Takaisinmaksuerän suuruus on 646,22 €.

- b) Lainasta maksetaan kaikkiaan 204 kappaletta 646,22 euron maksueriä. Lainan lyhennykset ja korot ovat yhteensä

$$204 \cdot 646,22 \text{ €} = 131\,828,88 \text{ €}.$$

Tästä summasta korkoa on $131\,828,88 \text{ €} - 90\,000 \text{ €} \approx 41\,829 \text{ €}$.

Vastaus

- a) 646,22 € b) 41 829 €

K28.

- a) Maksueriä on yhteensä $2 \cdot 12 = 24$ kappaletta.

Lasketaan maksukauden korkokerroin.

$$q = 100 \% + \frac{6,6 \%}{12} \approx 100,55 \% = 1,0055$$

Lasketaan takaisinmaksuerän eli annuiteetin suuruus.

$$A = 8000 \cdot 1,0055^{24} \cdot \frac{1 - 1,0055}{1 - 1,0055^{24}} \quad A = Kq^n \frac{1 - q}{1 - q^n}, \text{ missä}$$

$$\approx 356,73 \text{ (€)}$$

$$K = 8000,$$

$$q = 1,0055$$

$$\text{ja } n = 24.$$

Tasaerän suuruus on 356,73 €.

- b) Lasketaan jäljellä oleva lainapääoma 1 vuoden kuluttua lainan lyhentämisen jälkeen. Lainaa on tällöin lyhennetty 12 kertaa.

$$V_{12} = 8000 \cdot 1,0055^{12} - 356,73 \cdot \frac{1 - 1,0055^{12}}{1 - 1,0055} \quad V_k = Kq^k - A \frac{1 - q^k}{1 - q}$$

$$\approx 4131,61 \text{ (€)}$$

, missä

$$K = 8000,$$

$$q = 1,0055,$$

$$k = 12 \text{ ja } A = 356,73.$$

Lainaa on jäljellä 1 vuoden kuluttua 4131,61 €.

- c) Lainasta maksetaan kaikkiaan 24 kappaletta 356,73 euron maksueriä.

Lainan lyhennykset ja korot ovat yhteensä
 $24 \cdot 356,73 \text{ €} = 8561,52 \text{ €}.$

Tästä summasta korkoa on $8561,52 \text{ €} - 8000 \text{ €} = 561,52 \text{ €}.$

Vastaus

- a) 356,73 € b) 4131,61 € c) 561,52 €

K29.

Merkitään maksuerien lukumäärää kirjaimella n .

Lasketaan maksukauden korkokerroin.

$$q = 100 \% + \frac{6,0 \%}{12} = 100,5 \% = 1,005$$

Tasaerän suuruus on 1150 €.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan tarvittavien maksuerien lukumäärä n .

$$1150 = 64\,000 \cdot 1,005^n \cdot \frac{1 - 1,005}{1 - 1,005^n}$$

$$n \approx 65,4$$

Ratkaistaan
CAS-laskimella.

$$A = Kq^n \frac{1 - q}{1 - q^n}, \text{ missä}$$

$$K = 64\,000, q = 1,005$$

ja $A = 1150$.

Maksueriä tarvitaan 65,4 kappaletta, joten laina-ajaksi on sovittava vähintään 66 kk = 5 v 6 kk eli 5,5 vuotta.

Vastaus

5,5 vuotta

A1.

- a) Kun pääomaan lisätään 1,35 %:n korko, niin korkokerroin on $100 \% + 1,35 \% = 101,35 \% = 1,0135$.

Lasketaan pääoma 7 vuoden kuluttua.

$$K_7 = 46\,000 \cdot 1,0135^7 \approx 50\,527,07 \text{ (€)}$$

Pääoma kasvaa 7:ssä vuodessa 50 527,07 euroksi.

- b) Merkitään vuosien lukumäärää kirjaimella n .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$K_n = 60\,000 \quad K_n = Kq^n, \text{ missä } K = 46\,000 \text{ ja } q = 1,0135$$

$$46\,000 \cdot 1,0135^n = 60\,000 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$n \approx 19,8$$

Pääoman arvo ylittää 60 000 euroa 20 vuoden kuluttua.

- c) Merkitään korkokannaa kirjaimella q . Laaditaan yhtälö ja ratkaistaan q .

$$K_n = 2K \quad K_n = Kq^n, \text{ missä } K = 46\,000 \text{ ja } n = 30$$

$$46\,000 \cdot q^{30} = 2 \cdot 46\,000 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$q \approx -1,023374 \text{ tai } q \approx 1,023374$$

Korkokerroin on positiivinen luku, joten $q = 1,023374 = 102,3374 \%$.

Koska tilillä pitää olla vähintään alkuperäinen pääoma kaksinkertaisena, pyöristetään korkokanta ylöspäin. Nettokorkokannan on oltava vähintään 2,34 %.

Vastaus

a) 50 527,07 €

b) 20 vuoden

c) 2,34 %

A2.

a) Lasketaan jonon viisi ensimmäistä jäsentä.

$$a_n = 6n + 3, \text{ missä } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$a_1 = 6 \cdot 1 + 3 = 9$$

$$a_2 = 6 \cdot 2 + 3 = 15$$

$$a_3 = 6 \cdot 3 + 3 = 21$$

$$a_4 = 6 \cdot 4 + 3 = 27$$

$$a_5 = 6 \cdot 5 + 3 = 33$$

$$a_{20} = 6 \cdot 20 + 3 = 123$$

b) Muodostetaan yhtälö $a_n = 395$ ja ratkaistaan n .

$$a_n = 395$$

$$6n + 3 = 395 \quad | -3$$

$$6n = 392 \quad | :6$$

$$n \approx 65,3$$

Koska n :n arvo ei ole positiivinen kokonaisluku, niin luku 395 ei ole jonon jäsen.

c) Lasketaan 20 ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, \text{ missä } n = 20, a_1 = 9 \text{ ja } a_{20} = 123$$

$$S_{20} = 20 \cdot \frac{9 + 123}{2} = 1320$$

Vastaus

a) $a_1 = 9$, $a_2 = 15$, $a_3 = 21$, $a_4 = 27$, $a_5 = 33$ ja $a_{20} = 123$

b) ei ole

c) $S_{20} = 1320$

A3.

- a) Jonon suhdeluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten suhde.

$$q = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

- b) Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} & a_1 &= 4, \quad q = \frac{3}{2} \\ &= 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Lasketaan jonon 10. jäsen.

$$a_{10} = 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^9 = \frac{19\,683}{128} \quad (= 153 \frac{99}{128})$$

- c) Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan n .

$$a_n < 1\,000\,000 \quad a_n = 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} &< 1\,000\,000 && \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ n &< 31,7 \end{aligned}$$

Suurin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa saadun ehdon, on 31. Viimeinen jonon jäsen, joka on pienempi, kuin 1 000 000 on a_{31} .

Jonon 31 ensimmäistä jäsentä ovat pienempiä kuin 1 000 000.

Vastaus

a) $q = \frac{3}{2}$

b) $a_n = 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ ja $a_{10} = \frac{19\,683}{128}$

c) 31 jäsentä

A4.

- a) Maksueriä on yhteensä $15 \cdot 12 = 180$ kappaletta.

$$\text{Kertalyhennys on } \frac{88\,000 \text{ €}}{180} \approx 488,89 \text{ €}.$$

- b) Lasketaan ensimmäisen kuukauden korko.

$$88\,000 \cdot 0,032 \cdot \frac{1}{12} \approx 234,67 \text{ (€)} \quad \begin{array}{l} r = Kit, \text{ missä } K = 88\,000, \\ i = 0,032 \text{ ja } t = \frac{1}{12}. \end{array}$$

Lasketaan ensimmäinen takaisinmaksuerä.

$$488,89 + 234,67 = 723,56 \text{ (€)} \quad \text{kertalyhennys} + \text{korko}$$

- c) Viimeisen 488,89 euron takaisinmaksuerän jälkeen lainapääoma on 0 €. Lasketaan viimeisen kuukauden korko.

$$488,89 \cdot 0,032 \cdot \frac{1}{12} \approx 1,30 \text{ (€)} \quad \begin{array}{l} r = Kit, \text{ missä } K = 488,89, \\ i = 0,032 \text{ ja } t = \frac{1}{12}. \end{array}$$

Lasketaan viimeinen takaisinmaksuerä.

$$488,89 + 1,30 = 490,19 \text{ (€)} \quad \text{kertalyhennys} + \text{korko}$$

- d) Lasketaan jäljellä oleva lainan määrä viiden vuoden kuluttua, kun lainaa on lyhennetty kaikkiaan $5 \cdot 12 = 60$ kertaa.

$$88\,000 \text{ €} - 60 \cdot 488,89 \text{ €} = 58\,666,60 \text{ €}$$

Vastaus

- a) 488,89 € b) 723,56 € c) 490,19 € d) 58 666,60 €

A5.

- a) Maksueriä on yhteensä $15 \cdot 12 = 180$ kappaletta.

Lasketaan maksukauden korkokerroin.

$$\begin{aligned} q &= 100 \% + \frac{3,2 \%}{12} \\ &\approx 100,2666667 \% \\ &= 1,002666667 \end{aligned}$$

Huomaa:

Voit käyttää korkokertoimenä myös tarkkaa arvoa

$$q = 100 \% + \frac{3,2 \%}{12} = \frac{376}{375}.$$

Lasketaan takaisinmaksuerän eli annuiteetin suuruus.

$$\begin{aligned} A &= 88\,000 \cdot 1,002666667^{180} \cdot \frac{1 - 1,002666667}{1 - 1,002666667^{180}} & A &= Kq^n \frac{1 - q}{1 - q^n} \\ &\approx 616,21 \text{ (€)} \end{aligned}$$

, missä

$$K = 88\,000,$$

$$q = 1,002666667$$

$$\text{ja } n = 180.$$

Takaisinmaksuerän suuruus on 616,21 €.

- b) Lasketaan jäljellä oleva lainapääoma 5 vuoden kuluttua lainan lyhentämisen jälkeen. Lainaa on tällöin lyhennetty $5 \cdot 12 = 60$ kertaa.

$$\begin{aligned} V_{60} &= 88\,000 \cdot 1,002666667^{60} - 616,21 \cdot \frac{1 - 1,002666667^{60}}{1 - 1,002666667} \\ &\approx 63\,210,04 \text{ (€)} \end{aligned}$$

$$V_k = Kq^k - A \frac{1 - q^k}{1 - q},$$

missä

$$K = 88\,000,$$

$$q = 1,00266667,$$

$$k = 60 \text{ ja } A = 616,21.$$

Lainaa on jäljellä 5 vuoden kuluttua 63 210,04 €.

- c) Lainasta maksetaan kaikkiaan 180 kappaletta 616,21 euron maksueriä. Lainan lyhennykset ja korot ovat yhteensä

$$180 \cdot 616,21 \text{ €} = 110\,917,80 \text{ €}.$$

Tästä summasta korkoa on $110\,917,80 \text{ €} - 88\,000 \text{ €} = 22\,917,80 \text{ €}$.

Vastaus

a) 616,21 €

b) 63 210,04 €

c) 22 917,80 €

B1.

- a) Lasketaan viivästyksen suuruus.

$$r = 498,76 \cdot 0,090 \cdot \frac{24}{366} \quad r = Kit, \text{ missä } K = 498,76, \\ i = 0,090 \text{ ja } t = \frac{24}{366}.$$
$$\approx 2,94 \text{ (€)}$$

Lasketaan muistutuslaskun loppusumma.

$$498,76 \text{ €} + 2,94 \text{ €} + 8,50 \text{ €} \approx 510,20 \text{ €}$$

- b) Merkitään korkopäivien lukumäärää kirjaimella n .
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$r = 20 \quad r = Kit, \text{ missä } K = 498,76, \\ i = 0,090 \text{ ja } t = \frac{n}{366}.$$
$$498,76 \cdot 0,090 \cdot \frac{n}{366} = 20 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$n \approx 163,1$$

Viivästyskoron pitää ylittää 20 euroa, joten pyöristetään korkopäivien lukumäärä ylöspäin. Tarvitaan siis 164 korkopäivää.

Vastaus

a) 510,20 €

b) 164 päivän

B2.

	A	B	C	D	E
1		Talletus (€)	Talletusaika (€)	Talletuksen arvo lopussa (€)	
2	1	4500	10	5464,00	(=1,0196^C2*B2)
3	2	4500	9	5358,97	
4	3	4500	8	5255,95	
5	4	4500	7	5154,91	
6	5	4500	6	5055,82	
7	6	4500	5	4958,63	
8	7	4500	4	4863,31	
9	8	4500	3	4769,82	
10	9	4500	2	4678,13	
11					
12			Yhteensä	45559,53	

10 vuoden kuluttua talletuksen aloittamisesta
tilillä on 45 559,53 € \approx 45 560 €.

Vastaus

45 560 €

B3.

a) $a_n = 7 \cdot 0,8^n$

Lasketaan jonon peräkkäisten jäsenten suhde.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{7 \cdot 0,8^{n+1}}{7 \cdot 0,8^n} = 0,8 \ .$$

Koska peräkkäisten jäsenten suhde ei riipu n :n arvosta, jono on geometrinen ja $q = 0,8$.

Lasketaan jonon 25 ensimmäisen jäsenen summa.

$$\begin{aligned} S_{25} &= \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} & a_1 &= 7 \cdot 0,8^1 = 5,6, \\ & & q &= 0,8, \ n = 25 \\ &= \frac{5,6 \cdot (1 - 0,8^{25})}{1 - 0,8} \\ &\approx 27,9 \end{aligned}$$

b) $a_n = 13 - 9n$

Lasketaan jonon peräkkäisten jäsenten erotus.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (13 - 9 \cdot (n + 1)) - (13 - 9n) \\ &= 13 - 9n - 9 - 13 + 9n \\ &= -9 \end{aligned}$$

Koska peräkkäisten jäsenten erotus ei riipu n :n arvosta, jono on aritmeettinen.

Lasketaan jonon 25 ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \quad n = 25$$

$$\begin{aligned} S_{25} &= 25 \cdot \frac{a_1 + a_{25}}{2} & a_1 &= 13 - 9 \cdot 1 = 4, \\ & & a_{25} &= 13 - 9 \cdot 25 = -212 \\ &= 25 \cdot \frac{4 + (-212)}{2} \\ &= -2600 \end{aligned}$$

c) $a_n = 3n - 2^n$

Jonon kolme ensimmäistä jäsentä on

$$a_1 = 3 \cdot 1 - 2^1 = 1$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 - 2^2 = 2$$

$$a_3 = 3 \cdot 3 - 2^3 = 1$$

Koska $a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$ ja $a_3 - a_2 = 1 - 2 = -1$, jonon peräkkäisten jäsenten erotus ei ole vakio. Jono ei ole aritmeettinen.

Koska $\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2$ ja $\frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{2}$, jonon peräkkäisten jäsenten suhde ei ole vakio. Jono ei ole geometrinen.

Jono ei siis ole geometrinen eikä aritmeettinen.

Lasketaan jonon 25 ensimmäisen jäsenen summa taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B	C
1	n	a_n	
2	1	1	(=3*A2-2^A2)
3	2	2	
4	3	1	
5	4	-4	
6	5	-17	
7	6	-46	
8	7	-107	
9	8	-232	
10	9	-485	
11	10	-994	
12	11	-2015	
13	12	-4060	
14	13	-8153	
15	14	-16342	
16	15	-32723	
17	16	-65488	
18	17	-131021	
19	18	-262090	
20	19	-524231	
21	20	-1048516	
22	21	-2097089	
23	22	-4194238	
24	23	-8388539	
25	24	-16777144	
26	25	-33554357	
27			
28	S_25=	-67107887	

Jonon 25 ensimmäisen jäsenen summa on $S_{25} = -6\,710\,887$.

Vastaus

a) geometrinen jono, $S_{25} \approx 27,9$

b) aritmeettinen jono, $S_{25} = -2600$

c) ei kumpikaan, $S_{25} = -67\,107\,887$

B4.

- a) Kun pääomaan lisätään 6,0 %:n korko, niin korkokerroin on
 $100 \% + 6,0 \% = 106,0 \% = 1,060$.

Lasketaan arvio pääomalle, kun Sari täyttää 65 vuotta. Tähän kuluu aikaa $65 - 40 = 25$ vuotta.

Ensimmäinen sijoituserä kasvaa korkoa korolle 25 vuotta, seuraava 24 vuotta jne. Viimeisen sijoituksensa Sari tekee 59-vuotispäivänään, se kasvaa korkoa korolle 6 vuotta.

$$\begin{aligned} & K_{25} + K_{24} + K_{23} + \dots + K_6 \\ &= 3000 \cdot 1,060^{25} + 3000 \cdot 1,060^{24} + 3000 \cdot 1,060^{23} + \dots + 3000 \cdot 1,060^6 \\ &= \underbrace{3000 \cdot 1,060^6 + 3000 \cdot 1,060^7 + \dots + 3000 \cdot 1,060^{24} + 3000 \cdot 1,060^{25}}_{\substack{\text{geometrisen summa } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \text{ missä} \\ a_1 = 3000 \cdot 1,060^6, \quad q = 1,060 \text{ ja } n = 20.}} \\ &= \frac{3000 \cdot 1,060^6 \cdot (1 - 1,060^{20})}{1 - 1,060} \\ &\approx 156\,543,19 \text{ (€)} \end{aligned}$$

Sarin arvion mukaan sijoituksen arvo on hänen 65-vuotispäivänään noin 156 500 €.

- b) Merkitään vuotuisen sijoituksen suuruutta kirjaimella K .
Muodostetaan a-kohdan geometrisen summan lausekkeen avulla yhtälö ja ratkaistaan K .

$$\frac{K \cdot 1,060^6 \cdot (1 - 1,060^{20})}{1 - 1,060} = 500\,000 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$K \approx 9582,02 \text{ (€)}$$

Vuotuisen sijoituksen pitäisi olla vähintään 9583 €.

Vastaus

- a) 156 500 €
b) 9583 €

B5.

- a) Maksueriä on yhteensä $18 \cdot 12 = 216$ kappaletta.

Lasketaan maksukauden korkokerroin.

$$q = 100 \% + \frac{3,80 \%}{12} \approx 100,316667 \% = 1,00316667$$

Lasketaan takaisinmaksuerän eli annuiteetin suuruus.

$$A = 180\,000 \cdot 1,00316667^{216} \cdot \frac{1 - 1,00316667}{1 - 1,00316667^{216}} \quad A = Kq^n \frac{1 - q}{1 - q^n}$$

$\approx 1151,84$ (€)

, missä

$$K = 180\,000,$$

$$q = 1,00316667$$

$$\text{ja } n = 216.$$

Takaisinmaksuerän suuruus on 1151,84 €.

- b) Merkitään maksuerien lukumäärää kirjaimella n .

Maksukauden korkokerroin on $q \approx 1,00316667$.

Tasaerän suuruus on 1400 €. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan tarvittavien maksuerien lukumäärä n .

$$1400 = 180\,000 \cdot 1,00316667^n \cdot \frac{1 - 1,00316667}{1 - 1,00316667^n} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$n \approx 165,4$$

$$A = Kq^n \frac{1 - q}{1 - q^n}, \text{ missä}$$

$$K = 180\,000,$$

$$q = 1,00316667$$

$$\text{ja } A = 1400.$$

Maksueriä tarvitaan 165,4 kappaletta, joten laina-ajaksi on sovitava vähintään 166 kk $\approx 13,83$ v ≈ 14 v.

Vastaus

a) 1151,84 €

b) 14 vuotta