K1.

**a)** Lasketaan 1,7 %:n korko vuoden ajalta.

|  |  |
| --- | --- |
| 0,017 · 27 500 = 467,50 (€) | 1,7 % = 0,017 |

Korosta pankki perii ja tilittää valtiolle 30 %:n lähdeveron. Lasketaan 30 % korosta 467,50 €.

|  |  |
| --- | --- |
| 0,30 · 467,50 = 140,25 (€) | 30 % = 0,30 |

Lähdeveron pyöristyssäännön mukaan lähdeveron suuruus on 140,20 €.

Leevi saa korkoa 467,50 € – 140,20 € = 327,30 €.

**b)** Talletuksen reaaliarvon muutos saadaan selville laskemalla tilin pääoma vuoden kuluttua ja vertaamalla sitä pääomaan, jossa huomioidaan inflaatio eli yleisen hintatason muutos.

Tilin pääoma koron lisäämisen jälkeen on   
27 500,00 € + 327,30 € = 27 827,30 €.

Talletusaikana inflaatio oli 0,8 %, joten pääoman 27 500 € ostovoima säilyy samana, jos pääoma kasvaa 0,8 %.

|  |  |
| --- | --- |
| 1,008 · 27 500,00 € *=* 27 720,00 € | 100 % + 0,8 % = 100,8 %  = 1,008 |

Verrataan pääomaa 27 827,30 € pääomaan 27 720,00 €.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Pääoman reaaliarvo kasvoi 100,39 % – 100 % = 0,39 %.

Talletuksen reaalikorkokanta oli 0,39 %.

**Vastaus**

**a)** 327,30 €

**b)** 0,39 %

K2.

**a)** Korkoa ei makseta laskun eräpäivältä, joten ensimmäinen korkopäivä on 21. kesäkuuta ja viimeinen 3. elokuuta.

Saksalaisessa korkotavassa jokaisessa kuukaudessa ajatellaan olevan 30 päivää ja vuodessa 360 päivää.

Korkopäiviä on  
kesäkuussa 30 – 20 = 10   
heinäkuussa 30 ja   
elokuussa 3.

Korkopäiviä on yhteensä 10 + 30 + 3 = 43, joten korkoaika vuosina on .

Lasketaan viivästyskoron suuruus.

|  |  |
| --- | --- |
|  | *r* = *Kit*,  missä *K* = 800,05; *i* = 0,070 ja |

Viivästyskoron suuruus on 6,69 €.

**b)** Merkitään korkopäivien lukumäärää kirjaimella *n* ja muodostetaan lauseke viivästyskorolle.

|  |  |
| --- | --- |
|  | *r* = *Kit*,  missä *K* = 800,05; *i* = 0,070 ja |

Ratkaistaan, kuinka monessa korkopäivässä kertyy 15 euron viivästyskorko.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Ratkaistaan CAS-laskimella |

Viivästyskorko olisi ylittänyt 15 euroa 97 päivän kuluttua.

Korkopäiviä on

|  |  |
| --- | --- |
| kesäkuussa 30 – 20 = 10  heinäkuussa 30 ja  elokuussa 30. | 10 + 30 = 40 40 + 30 = 70 |

Tähän mennessä kertyneitä korkopäiviä on 70. Lisäksi tarvitaan   
97 – 70 = 27 syyskuun päivää. Kertyneen koron määrä ylittää 15 euroa 27.9.

**Vastaus**

**a)** 6,69 €  
**b)** 27.9.

K3.

Lasketaan tilin nettokorkokanta.

|  |  |
| --- | --- |
| 0,70 · 1,90 % = 1,33 % | 100 % – 30 % = 70 % = 0,70 |

Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla.

Kirjoitetaan sarakkeeseen A kuukausitalletukset.

Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 12 kuukautta, toinen 11 kuukautta ja niin edelleen. Viimeinen talletus kasvaa korkoa yhden kuukauden. Kirjoitetaan sarakkeeseen B kunkin talletuksen korkoaika kuukausina.

Lasketaan soluun C2 ensimmäisen talletuksen koron suuruus kaavalla  
*r* = *Kit*  ja kopioidaan kaavaa soluihin C3–C13. Tilin nettokorkokanta on   
1,33 %, joten *i* = 0,0133.

Lasketaan soluun D2 ensimmäisen talletuksen suuruus vuoden lopussa koron lisäämisen jälkeen ja kopioidaan kaavaa soluihin D3–D13.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **A** | **B** | **C** | **D** |
| **1** | **Talletus**  **(€)** | **Korko- aika (kk)** | **Koron määrä**  **(€)** | **Talletus vuoden lopussa (€)** |
| **2** | 253 | 12 | =A2\*0,0133\*B2/12 | =A2+C2 |
| **3** | 253 | 11 |  |  |
| **4** | 253 | 10 |  |  |
|  |  |  |  |  |
| **13** | 253 | 1 |  |  |

Ilmaistaan koron määrä ja talletuksen suuruus vuoden lopussa sentin tarkkuudella. Lasketaan lopuksi talletusten summa soluun D14.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **A** | **B** | **C** | **D** |  |
| **1** | **Talletus (€)** | **Korko- aika (kk)** | **Koron määrä  (€)** | **Talletus vuoden lopussa (€)** |  |
| **2** | 253 | 12 | 3,36 | 256,36 |  |
| **3** | 253 | 11 | 3,08 | 256,08 |  |
| **4** | 253 | 10 | 2,80 | 255,80 |  |
| **5** | 253 | 9 | 2,52 | 255,52 |  |
| **6** | 253 | 8 | 2,24 | 255,24 |  |
| **7** | 253 | 7 | 1,96 | 254,96 |  |
| **8** | 253 | 6 | 1,68 | 254,68 |  |
| **9** | 253 | 5 | 1,40 | 254,40 |  |
| **10** | 253 | 4 | 1,12 | 254,12 |  |
| **11** | 253 | 3 | 0,84 | 253,84 |  |
| **12** | 253 | 2 | 0,56 | 253,56 |  |
| **13** | 253 | 1 | 0,28 | 253,28 |  |
| **14** |  |  | **Yhteensä** | 3057,87 | =SUMMA(D2:D13) |

Tilillä on rahaa vuoden lopussa koron maksamisen jälkeen 3057,87 €.

**Vastaus**

3057,87 €

K4.

**a)** Lasketaan tilin nettokorkokanta.

0,70 · 1,25 % = 0,875 %

Kun pääomaan lisätään 0,875 %:n nettokorko, niin korkokerroin on   
100 % + 0,875 % = 100,875 % = 1,00875. Lasketaan pääoma viiden vuoden kuluttua.

|  |  |
| --- | --- |
|  | , missä *K* = 80 000,  *q* = 1,00875 ja *n* = 5. |

Talletus kasvaa viidessä vuodessa 83 561,79 euroksi.

**b)** Merkitään vuosien lukumäärää kirjaimella *n* ja muodostetaan lauseke talletuksen arvolle.

|  |  |
| --- | --- |
|  | ,  missä *K* = 80 000 ja *q* = 1,00875. |

Ratkaistaan, kuinka monen vuoden kuluttua talletuksen arvo on   
90 000 euroa.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Ratkaistaan CAS-laskimella. |

Talletuksen arvo ylittää 90 000 euroa 14 vuodessa.

**Vastaus**

**a)** 83 561,79 euroksi

**b)** 14 vuodessa

K5.

Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla.

Kirjoitetaan sarakkeeseen A talletukset. Ensimmäisen talletuksen talletusaika on viisi vuotta, toisen neljä vuotta ja niin edelleen. Viimeisen talletuksen talletusaika on kaksi vuotta.

Kirjoitetaan sarakkeeseen B kunkin talletuksen talletusaika vuosina.

Lasketaan soluun C2 ensimmäisen talletuksen arvo viiden vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksesta ja kopioidaan kaavaa soluihin C3–C5. Tilin nettokorkokanta on 0,70 · 1,70 % = 1,19 %, joten korkokerroin

*q* = 100 % + 1,19 % = 101,19 % = 1,0119.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **A** | **B** | **C** |  |
| **1** | **Talletus (€)** | **Talletusaika  (v)** | **Talletuksen arvo lopussa (€)** |  |
| **2** | 2000 | 5 | =A2\*1,0119^B2 | *Kn* = *Kqn* |
| **3** | 3000 | 4 |  |  |
| **4** | 4000 | 3 |  |  |
| **5** | 5000 | 2 |  |  |

Ilmaistaan kasvaneet pääomat sentin tarkkuudella. Lasketaan lopuksi pääomien summa soluun C6.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **A** | **B** | **C** |  |
| **1** | **Talletus (€)** | **Talletusaika (v)** | **Talletuksen arvo lopussa (€)** |  |
| **2** | 2000 | 5 | 2121,87 |  |
| **3** | 3000 | 4 | 3145,37 |  |
| **4** | 4000 | 3 | 4144,51 |  |
| **5** | 5000 | 2 | 5119,71 |  |
| **6** |  | **Yhteensä** | 14531,45 | =SUMMA(C2:C5) |

Tilillä on rahaa viiden vuoden kuluttua 14 531,45 €.

**Vastaus**

14 531,45 €

K6.

Lasketaan syntymäpäivälahjojen nykyarvot. Talletuksen nettokorkokanta on 0,70 · 1,5 % = 1,05 %.

18 vuoden kuluttua annettavan lahjan nykyarvo on

|  |  |
| --- | --- |
|  | *K*18 = 1800, *q* = 1,0105 ja *n* = 18 |

19 vuoden kuluttua annettavan lahjan nykyarvo on

|  |  |
| --- | --- |
|  | *K*19 = 1900, *q* = 1,0105 ja *n* = 19 |

20 vuoden kuluttua annettavan lahjan nykyarvo on

|  |  |
| --- | --- |
|  | *K*20 = 2000, *q* = 1,0105 ja *n* = 20 |

Lasketaan lahjojen nykyarvojen summa.

1491,48 + 1557,99 + 1622,94 = 4672,41 (€)

Pääoman tulee olla vähintään 4673 €.

**Vastaus**

4673 €

K7.

Merkitään Anjan tilille tehtävän talletuksen arvoa euroina kirjaimella *x*. Tällöin Arton tilille tehtävän talletuksen arvo euroina on 9500 – *x.*

Anjan talletus on tilillä 21 – 16 = 5 vuotta. Anjan talletuksen arvo euroina on viiden vuoden kuluttua *x* · 1,0255.

Arton talletus on tilillä 21 – 12 = 9 vuotta. Arton talletuksen arvo euroina on yhdeksän vuoden kuluttua (9500 – *x*) · 1,0259.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan Anjan tilille tehtävän talletuksen arvo *x*.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Ratkaistaan CAS-laskimella. |

Vanhempien on sijoitettava Anjan tilille 4984,39 € ja   
Arton tilille 9500 € – 4984,39 € = 4515,61 €.

**Vastaus**

Anjan tilille 4984,39 €, Arton tilille 4515,61 €

K8

**a)**  Määritetään lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä. Lausekkeeseen  sijoitetaan *n*:n arvot 1, 2, 3, 4 ja 5.  
  


**b)** Lukujonon ensimmäisen jäsen .  
  
Toisesta jäsenestä alkaen käytetään rekursiokaavaa .   
  
Määritetään lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä.  
  


**Vastaus**

**a)** Viisi ensimmäistä jäsentä ovat 9, 16, 21, 24 ja 25.

**b)** Viisi ensimmäistä jäsentä ovat 8, 13, 23, 43, 83

K9

**a)**  Luku –40 on lukujonon jäsen, jos löytyy sellainen positiivinen kokonaisluku *n*, jolla . Muodostetaan yhtälö ja   
ratkaistaan *n*.  
  
  
  
Ratkaisu *n* = 19 on positiivinen kokonaisluku, joten luku –40 on lukujonon 19. jäsen.

**b)**  Luku –40 on lukujonon jäsen, jos löytyy sellainen positiivinen kokonaisluku *n*, jolla . Muodostetaan yhtälö ja   
ratkaistaan *n*.  
  
  
  
Ratkaisu *n* = –17 ei ole positiivinen kokonaisluku, joten luku –40 ei ole lukujonon jäsen.

**Vastaus**

**a)** on, 19. jäsen

**b)** ei ole

K10

**a)** Kirjoitetaan sarakkeeseen A jäsenten järjestysluvut 1, 2, 3, ... , 20.  
Lasketaan sarakkeeseen B lukujonon 20 ensimmäistä jäsentä ja niiden summa.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **A** | **B** |  |
| **1** | **n** | **jäsen** |  |
| **2** | 1 | –4 | ”=A2^2 – 5 |
| **3** | 2 | –1 |  |
| **4** | 3 | 4 |  |
| **5** | 4 | 11 |  |
| **6** | 5 | 20 |  |
| **7** | 6 | 31 |  |
| **8** | 7 | 44 |  |
| **9** | 8 | 59 |  |
| **10** | 9 | 76 |  |
| **11** | 10 | 95 |  |
| **12** | 11 | 116 |  |
| **13** | 12 | 139 |  |
| **…** | … | … |  |
| **20** | 19 | 356 |  |
| **21** | 20 | 395 | 30. jäsen |
| **22** | **Summa** | 2770 | "=summa(B2:B21) |

Kahdeskymmenes jäsen on 395 ja kahdenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa 2770.

**b)** Kirjoitetaan sarakkeeseen A jäsenten järjestysluvut 1, 2, 3, ... , 20.  
Lasketaan sarakkeeseen B lukujonon 20 ensimmäistä jäsentä ja niiden summa.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **A** | **B** |  |
| **1** | **n** | **jäsen** |  |
| **2** | 1 | -4 |  |
| **3** | 2 | 3 | ”=3\*B2 + 15 |
| **4** | 3 | 24 |  |
| **5** | 4 | 87 |  |
| **6** | 5 | 276 |  |
| **7** | 6 | 843 |  |
| **8** | 7 | 2544 |  |
| **9** | 8 | 7647 |  |
| **10** | 9 | 22 956 |  |
| **11** | 10 | 68 883 |  |
| **12** | 11 | 206 664 |  |
| **13** | 12 | 620 007 |  |
| **…** | … | … |  |
| **20** | 19 | 1 355 971 704 |  |
| **21** | 20 | 4 067 915 127 | 30. jäsen |
| **22** | **Summa** | 6 101 872 550 | "=summa(B2:B21) |

Kahdeskymmenes jäsen on 4 067 915 127 ja kahdenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa 6 101 872 550.

**Vastaus**

**a)** kahdeskymmenes jäsen on 395;  
kahdenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa 2770

**b)** kahdeskymmenes jäsen on 4 067 915 127;  
kahdenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa 6 101 872 550

K11

**a)**  Jonon erotusluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten erotus.  
  
  
  
Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.  
  
   
  
  
Lasketaan jonon 10. jäsen.  
  


**b)** Jonon suhdeluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten suhde.  
  
  
  
Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.  
  
   
  
  
Lasketaan jonon 10. jäsen.  
  


**Vastaus**

**a)** , 

**b)** , 

K12

**a)**  Jonon erotusluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten erotus.  
  
  
  
Lasketaan jonon 25. jäsen.  
  
   
  
Ensimmäinen yhteenlaskettava on , viimeinen yhteenlaskettava  ja yhteenlaskettavien lukumäärä *n* = 25. Lasketaan aritmeettisen summan arvo.  
  


**b)** Jonon suhdeluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten suhde.  
  
  
  
Ensimmäinen yhteenlaskettava on , jonon suhdeluku *q* = 3 ja yhteenlaskettavien lukumäärä *n* = 25. Lasketaan geometrisen summan arvo.  
  


**Vastaus**

**a)** 1250

**b)** 847 288 609 442

K13

**a)** Ensimmäinen yhteenlaskettava on 21 ja viimeinen   
yhteenlaskettava 636.  
  
Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä aritmeettisen jonon   
21, 26, ... , 636 yleisen jäsenen lausekkeen avulla.  
  
Ensimmäinen jäsen  ja erotusluku *d* = 26 – 21 = 5. Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.  
  
   
  
Ratkaistaan, kuinka mones jonon jäsen on luku 636.  
  
   
  
Luku 636 on jonon 124. jäsen, joten yhteenlaskettavien lukumäärä   
on 124.  
  
Lasketaan aritmeettisen summan arvo.  
  


**b)** Ensimmäinen yhteenlaskettava on 1 ja suhdeluku .  
  
Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä geometrisen jonon   
1, 3, ... , 1 594 323 yleisen jäsenen lausekkeen avulla.  
  
Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.  
  
   
  
Ratkaistaan, kuinka mones jonon jäsen on luku 1 594 323.  
  
   
  
Luku 1 594 323 on jonon 14. jäsen, joten yhteenlaskettavien lukumäärä on 14.  
  
Lasketaan geometrisen summan arvo.  
  


**Vastaus**

**a)** 40 734

**b)** 2 391 484

K14

**a)** Jonon erotusluku on   
   
  
Jonon yleisen jäsenen lauseke on  
   
  
**Tapa 1.** Yhtälön avulla  
  
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *n*.  
  
   
  
Koska lukujonon jäsenet pienenevät koko ajan, viimeinen kymmentä suurempi jäsen on jonon 62. jäsen.  
  
Jonon 62 ensimmäistä jäsentä ovat suurempia kuin 10.

**Tapa 2.** Epäyhtälön avulla.  
  
Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan *n*.  
  
  
  
Suurin positiivinen kokonaisluku *n*, joka toteuttaa epäyhtälön, on 62.  
  
Jonon 62 ensimmäistä jäsentä ovat suurempia kuin 10.

**b)** Jonon suhdeluku on   
   
  
Jonon yleisen jäsenen lauseke on  
   
  
**Tapa 1.** Yhtälön avulla  
  
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *n*.  
  
   
  
Koska lukujonon jäsenet pienenevät koko ajan, viimeinen kymmentä suurempi jäsen on jonon 194. jäsen.  
  
Jonon 194 ensimmäistä jäsentä ovat suurempia kuin 10.

**Tapa 2.** Epäyhtälön avulla.  
  
Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan *n*.  
  
  
  
Suurin positiivinen kokonaisluku *n*, joka toteuttaa epäyhtälön, on 194.  
  
Jonon 194 ensimmäistä jäsentä ovat suurempia kuin 10.

**Vastaus**

**a)** 62 ensimmäistä jäsentä

**b)** 194 ensimmäistä jäsentä

K15

**a)**  Jonon erotusluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten erotus.  
  
  
  
Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.  
  
   
  
Kun lasketaan yhteen jonon *n* ensimmäistä jäsentä,   
ensimmäinen yhteenlaskettava on  ja  
viimeinen yhteenlaskettava on    
  
Summan arvo on   
  
.  
  
**Tapa 1.** Yhtälön avulla.  
  
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *n*.  
  
   
  
Koska jonon kaikki jäsenet ovat positiivisia, summan arvo suurenee, kun yhteenlaskettavien jäsenten lukumäärä kasvaa.  
  
On siis laskettava yhteen vähintään 69 lukujonon ensimmäistä jäsentä.  
  
**Tapa 2.** Epäyhtälön avulla.  
  
Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan *n*.  
  
   
  
Pienin positiivinen kokonaisluku *n*, joka toteuttaa epäyhtälön, on 69.  
  
On siis laskettava yhteen vähintään 69 lukujonon ensimmäistä jäsentä.

**b)** Merkitään yhteenlaskettavien lukumäärää kirjaimella *n*.  
Jonon suhdeluku on   
   
  
Geometrisen jonon 10; 11; 12,1; ... *n*:n ensimmäisen jäsenen summa on   
   
  
**Tapa 1.** Yhtälön avulla  
  
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *n*.  
   
  
Koska lukujonon kaikki jäsenet ovat positiivisia, summan arvo kasvaa, kun yhteenlaskettavien lukumäärä *n* kasvaa.  
  
On siis laskettava yhteen vähintään 49 lukujonon ensimmäistä jäsentä.

**Tapa 2.** Epäyhtälön avulla.  
  
Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan *n*.  
  
  
  
Pienin positiivinen kokonaisluku *n*, joka toteuttaa epäyhtälön, on 49.  
  
On siis laskettava yhteen vähintään 49 lukujonon ensimmäistä jäsentä.

**Vastaus**

**a)** vähintään 69

**b)** vähintään 49

K16

**a)**  Aritmeettisen summan    
ensimmäinen yhteenlaskettava on ,  
viimeinen yhteenlaskettava on  ja  
yhteenlaskettavien lukumäärä on *n* = 75 – 4 = 71.  
  
Lasketaan summan arvo.  
  


**b)** Geometrisen summan    
ensimmäinen yhteenlaskettava on ,  
suhdeluku *q* = 3 ja yhteenlaskettavien lukumäärä *n* = 15.  
  
Lasketaan summan arvo.  
  


**Vastaus**

**a)** 8236

**b)** 86 093 436

K17

**a)** Muodostetaan toisen jäsenen ja viidennen jäsenen perusteella kaksi yhtälöä, joissa muuttujina ovat  ja *d*. Ratkaistaan yhtälöpari.  
  
   
  
Lukujonon ensimmäinen jäsen on 6,5.

**b)** Muodostetaan toisen jäsenen ja neljännen jäsenen perusteella kaksi yhtälöä, joissa muuttujina ovat  ja *q*. Ratkaistaan yhtälöpari.  
  
   
  
Lukujonon ensimmäinen jäsen on –6 tai 6.

**Vastaus**

**a)** 6,5

**b)** –6 tai 6

K18

**a)** Lukujono on aritmeettinen, jos peräkkäisten jäsenten erotus  on vakio kaikilla *n* = 1, 2, 3, ... .  
  
Muodostetaan peräkkäisten jäsenten lausekkeet.  
  
   
  
Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotus.  
  
   
  
Koska  kaikilla *n* = 1, 2, 3, ..., lukujono  on aritmeettinen. 

**b)** Lukujonon jäsenistä mikään ei ole nolla, joten lukujono on geometrinen, jos peräkkäisten jäsenten suhde  on vakio kaikilla *n* = 1, 2, 3, ... .  
  
Muodostetaan peräkkäisten jäsenten lausekkeet.  
  


Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhde.  
  
   
  
Koska  kaikilla *n* = 1, 2, 3, ..., lukujono  on geometrinen. 

K19

Merkitään kuukausittaisen talletuksen suuruutta kirjaimella *x*.   
  
Mirja tallettaa tilille rahaa yhteensä 12*x* (€).

Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 12 kuukautta, toinen talletus 11 kuukautta ja niin edelleen. Viimeinen talletus kasvaa korkoa 1 kuukauden.

Tilin nettokorkokanta on 0,70 · 2,65 % = 1,855 %.

Muodostetaan lauseke, joka ilmaisee talletukselle kertyvän koron määrän.



Vuoden lopussa koron maksamisen jälkeen tilin pääoma on   
.

Ratkaistaan, kuinka suurella kuukausittaisella talletuksella *x* tilillä on vuoden lopussa rahaa 3500 €.



Kuukausittaisen talletuksen tulisi olla 289 euroa.

**Vastaus**

289 €

K20

Tilin nettokorkokanta on 1,25 %. Pääoma kasvaa vuosittain   
1,0125-kertaiseksi.  
  
Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 64 – 45 = 19 vuotta, toinen talletus 18 vuotta ja niin edelleen. Viimeinen talletus kasvaa korkoa 64 – 55 = 9 vuotta.  
  
Lasketaan, kuinka paljon tilillä on rahaa Matiaksen 64-vuotispäivänä.  
  
  
  
Kyseessä on geometrinen summa, jossa ensimmäinen yhteenlaskettava , yhteenlaskettavien lukumäärä *n* =19 – 8 = 11 ja suhdeluku *q* = 1,0125. Lasketaan summan arvo.  
  
   
  
Matiaksella on matkarahaa 13 099,60 €

**Vastaus**

13 099,60 €

K21

Merkitään vuotuisen talletuksen suuruutta kirjaimella *x*.

Tilin nettokorkokanta on 1,95 %. Pääoma kasvaa vuosittain   
1,0195-kertaiseksi.  
  
Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 20 vuotta, toinen talletus 19 vuotta ja niin edelleen. Viimeinen talletus kasvaa korkoa 1 vuoden.  
  
Muodostetaan lauseke, joka ilmaisee tilillä olevan rahamäärän 20 vuoden kuluttua.  
  
  
  
Kyseessä on geometrinen summa, jossa ensimmäinen yhteenlaskettava , yhteenlaskettavien lukumäärä *n* = 20 ja suhdeluku   
*q* = 1,0195. Muodostetaan summan lauseke.  
  
   
  
Ratkaistaan, kuinka suurella vuotuisella talletuksella *x* tilillä on 20 vuoden kuluttua rahaa 8000 €.  
  


Tilille kertyy 8000 €, jos vuotuinen talletus on 325 €.

**Vastaus**

325 €

K22

**a)** Pitää laskea stipendien nykyarvot. Myönnettyjen stipendien yhteenlasketun nykyarvon tulee olla yhtä suuri kuin lahjoitettu rahamäärä 15 000 euroa.  
  
Merkitään yhden stipendin suuruutta kirjaimella *x*.   
  
Toisen, vuoden kuluttua jaettavan stipendin, nykyarvo on   
.  
  
Kahden vuoden kuluttua jaettavan stipendin nykyarvo on .  
...  
Viimeisen, 20 vuoden kuluttua jaettavan stipendin, nykyarvo on .  
  
Joka vuosi jaetaan kaksi stipendiä. Kaikkien stipendien nykyarvojen summa on   
.  
  
Summa on geometrinen summa, jossa yhteenlaskettavien lukumäärä *n* = 20, ensimmäisen yhteenlaskettava  ja suhdeluku .  
  
Summan arvo on   


Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan stipendin suuruus *x*.  
  
Stipendin suuruus voi olla 550 euroa.

**b)** Stipendin suuruus on 700 euroa.   
Merkitään korkokerrointa kirjaimella *q*.  
  
a-kohdan perusteella stipendien nykyarvojen summa on  
  
  
  
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan korkokerroin *q*.  
  
  
  
Korkokerroin 1,0784 = 107,84 % vastaa 7,84 %:n vuotuista korkoa.

**Vastaus**

**a)** 550 €

**b)** 7,84 %

K23

**a)** Merkitään ensimmäisen pallon sädettä kirjaimella  ja sen sisään asetetun kuution särmän pituutta kirjaimella .  
  
Pallon sisään asetetun kuution avaruuslävistäjä on pallon halkaisija. Kun kuution särmän pituus on , avaruuslävistäjän pituus on  
.  
  
Siis  
   
  
  
Kuution sisään asetetun pallon halkaisijan pituus on yhtä suuri kuin kuution särmän pituus. Toisen pallon säde on siis puolet ensimmäisen kuution särmän pituudesta.  
   
  
Seuraava pallo sijoitetaan samalla tavalla -säteisen pallon sisään, joten sen säde on  ja niin edelleen.

Koska seuraavan pallon säde saadaan aina edellisen pallon säteestä kertomalla luvulla , pallojen säteen muodostavat geometrisen jonon, jonka suhdeluku .

**b)** Kaikki pallot ovat yhdenmuotoisia, joten niiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö. Säteiden suhde on pallojen mittakaava. Siis peräkkäisten pallojen pinta-alojen suhde on   
  
.  
  
Pinta-alat muodostavat siis geometrisen jonon, jonka suhdeluku .

**c)** Kaikki pallot ovat yhdenmuotoisia, joten niiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio. Säteiden suhde on pallojen mittakaava. Siis peräkkäisten pallojen tilavuuksien suhde on  
  
.  
  
Tilavuudet muodostavat siis geometrisen jonon, jonka suhdeluku .

**Vastaus**

**a)**  **b)**  **c)** 

K24.

a) Maksueriä on yhteensä  kappaletta.  
Kertalyhennys on .

Lasketaan ensimmäisen kuukauden korko.

|  |  |
| --- | --- |
|  | *r* = *Kit*, missä *K* = 90 000,  *i* = 0,036 ja *t* =. |

Lasketaan ensimmäinen takaisinmaksuerä.

|  |  |
| --- | --- |
|  | kertalyhennys + korko |

b) Viimeisen 500 euron takaisinmaksuerän jälkeen lainapääoma on 0 €. Lasketaan viimeisen puolivuotiskauden korko.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | | *r* = *Kit*, missä *K* = 500,  *i* = 0,036 ja *t* = . |
| Lasketaan viimeinen takaisinmaksuerä. | kertalyhennys + korko | |

c) Kuukausittaiset korot muodostavat aritmeettisen summan, jonka ensimmäinen jäsen on 270 € ja viimeinen jäsen on 1,50 €.   
  
Summassa on jäseniä 180 kappaletaa.  
  
Lasketaan maksetun koron määrä.  


**Vastaus**

a) 770 € b) 501,50 € c) 24 435 €

K25.

**a)** Takaisinmaksueriä on kaikkiaan .  
Lainakuukausia on yhtä monta kuin lyhennyseriä, joten lainan takaisinmaksuaika on 60 kk = 5 vuotta.

**b)** Vuosikorko 5,00 % = 0,05.  
  
Ensimmäisen kuukauden korko on   
  
  
Viimeisen kuukauden korko on  
  
  
Kuukausittaiset korot muodostavat aritmeettisen summan.  
  
  
Lainan kokonaiskustannukset koostuvat koroista ja pääomasta.  
  
Kokonaiskustannukset ovat   
60 000 € + 7625,10 € = 67 625,10 € ≈ 67 625 €.

**Vastaus**

**a)** 5 vuotta

**b)** 67 625 €

K26.

**Huomaa:**   
Tehtävän voi ratkaista joko ensimmäisen tai viimeisen maksuerän avulla, molempia ei tarvita.

Merkitään lainan alkupääomaa kirjaimella *a*.

Maksueriä on .  
  
Kertalyhennys on .  
  
**Tapa 1: Ratkaisu ensimmäisen maksuerän avulla**  
  
Ensimmäisen kuukauden korko on   
  
  
  
Ensimmäinen maksuerä on .  
  
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *a*.



**Vastaus**

238 000 €

**Tapa 2:** **Ratkaisu viimeisen maksuerän avulla**

Viimeisen kuukauden korko on   
  
  
  
Viimeinen maksuerä on .  
  
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *a*.



**Vastaus**

238 000 €

K27.

a) Maksueriä on yhteensä  kappaletta.  
   
Lasketaan maksukauden korkokerroin.  
  
   
  
Lasketaan takaisinmaksuerän suuruus.

|  |  |
| --- | --- |
|  | , missä *K* = 90 000, *q* = 1,004  ja *n* = 204. |

Takaisinmaksuerän suuruus on 646,22 €.

b) Lainasta maksetaan kaikkiaan 204 kappaletta 646,22 euron maksueriä. Lainan lyhennykset ja korot ovat yhteensä  
  
 .   
  
Tästä summasta korkoa on 131 828,88 € – 90 000 € ≈ 41 829 €.

**Vastaus**

a) 646,22 € b) 41 829 €

K28.

a) Maksueriä on yhteensä  kappaletta.   
  
Lasketaan maksukauden korkokerroin.  
   
  
Lasketaan takaisinmaksuerän eli annuiteetin suuruus.

|  |  |
| --- | --- |
|  | , missä *K* = 8000,  *q* = 1,0055  ja *n* = 24. |

Tasaerän suuruus on 356,73 €.

b) Lasketaan jäljellä oleva lainapääoma 1 vuoden kuluttua lainan lyhentämisen jälkeen. Lainaa on tällöin lyhennetty 12 kertaa.

|  |  |
| --- | --- |
|  | , missä *K* = 8000,  *q* = 1,0055,  *k* = 12 ja *A*= 356,73. |

Lainaa on jäljellä 1 vuoden kuluttua 4131,61 €.

c) Lainasta maksetaan kaikkiaan 24 kappaletta 356,73 euron maksueriä.   
  
Lainan lyhennykset ja korot ovat yhteensä   
.   
  
Tästä summasta korkoa on 8561,52 € – 8000 € = 561,52 €.

**Vastaus**

a) 356,73 € b) 4131,61 € c) 561,52 €

K29.

Merkitään maksuerien lukumäärää kirjaimella *n*.   
  
Lasketaan maksukauden korkokerroin.  
  
   
  
Tasaerän suuruus on 1150 €.   
  
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan tarvittavien maksuerien lukumäärä *n*.

|  |
| --- |
| , missä *K* = 64 000, *q* = 1,005  ja *A* = 1150. |

Maksueriä tarvitaan 65,4 kappaletta, joten laina-ajaksi on sovittava vähintään 66 kk = 5 v 6 kk eli 5,5 vuotta.

**Vastaus**

5,5 vuotta

A1.

**a)** Kun pääomaan lisätään 1,35 %:n korko, niin korkokerroin on  
100 % + 1,35 % = 101,35 % = 1,0135.  
  
Lasketaan pääoma 7 vuoden kuluttua.  
  
  
Pääoma kasvaa 7:ssä vuodessa 50 527,07 euroksi.

**b)** Merkitään vuosien lukumäärää kirjaimella *n*.  
  
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *n*.  
  
Pääoman arvo ylittää 60 000 euroa 20 vuoden kuluttua.

**c)** Merkitään korkokanraa kirjaimella *q*. Laaditaan yhtälö ja ratkaistaan *q*.  
  
  
Korkokerroin on positiivinen luku, joten *q* = 1,023374 = 102,3374 %.

Koska tilillä pitää olla vähintään alkuperäinen pääoma kaksinkertaisena, pyöristetään korkokanta ylöspäin. Nettokorkokannan on oltava vähintään 2,34 %.

**Vastaus**

**a)** 50 527,07 €

**b)** 20 vuoden

**c)** 2,34 %

A2.

**a)** Lasketaan jonon viisi ensimmäistä jäsentä.  
  


**b)** Muodostetaan yhtälö  ja ratkaistaan *n*.  
  
  
  
Koska *n*:n arvo ei ole positiivinen kokonaisluku, niin luku 395 ei ole jonon jäsen.

**c)** Lasketaan 20 ensimmäisen jäsenen summa.  
  


**Vastaus**

**a)** 

**b)** ei ole

**c)** 

A3.

**a)** Jonon suhdeluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten suhde.  


**b)** Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.  
  
  
Lasketaan jonon 10. jäsen.  
  


**c)** Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan *n*.  
  
  
Suurin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa saadun   
ehdon, on 31. Viimeinen jonon jäsen, joka on pienempi,   
kuin 1 000 000 on .  
  
Jonon 31 ensimmäistä jäsentä ovat pienempiä kuin 1 000 000.

**Vastaus**

**a)** 

**b)**  ja 

**c)** 31 jäsentä

A4.

a) Maksueriä on yhteensä  kappaletta.  
  
Kertalyhennys on .

b) Lasketaan ensimmäisen kuukauden korko.

|  |  |
| --- | --- |
|  | *r* = *Kit*, missä *K* = 88 000,  *i* = 0,032 ja *t* =. |

Lasketaan ensimmäinen takaisinmaksuerä.

|  |  |
| --- | --- |
|  | kertalyhennys + korko |

c) Viimeisen 488,89 euron takaisinmaksuerän jälkeen lainapääoma   
on 0 €. Lasketaan viimeisen kuukauden korko.

|  |  |
| --- | --- |
|  | *r* = *Kit*, missä *K* = 488,89,  *i* = 0,032 ja *t* = . |

Lasketaan viimeinen takaisinmaksuerä.

|  |  |
| --- | --- |
|  | kertalyhennys + korko |

d) Lasketaan jäljellä oleva lainan määrä viiden vuoden kuluttua, kun lainaa on lyhennetty kaikkiaan  kertaa.  
  
88 000 € – 60 ∙ 488,89 € = 58 666,60 €

**Vastaus**

a) 488,89 € b) 723,56 € c) 490,19 € d) 58 666,60 €

A5.

a) Maksueriä on yhteensä  kappaletta.   
Lasketaan maksukauden korkokerroin.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Huomaa:  Voit käyttää korkokertoimena myös tarkkaa arvoa . |

Lasketaan takaisinmaksuerän eli annuiteetin suuruus.

|  |  |
| --- | --- |
|  | , missä *K* = 88 000,  *q* = 1,002666667  ja *n* = 180. |

Takaisinmaksuerän suuruus on 616,21 €.

b) Lasketaan jäljellä oleva lainapääoma 5 vuoden kuluttua lainan lyhentämisen jälkeen. Lainaa on tällöin lyhennetty  kertaa.

|  |
| --- |
| , missä *K* = 88 000,  *q* = 1,00266667,  *k* = 60 ja *A*= 616,21. |

Lainaa on jäljellä 5 vuoden kuluttua 63 210,04 €.

c) Lainasta maksetaan kaikkiaan 180 kappaletta 616,21 euron maksueriä. Lainan lyhennykset ja korot ovat yhteensä   
  
.   
  
Tästä summasta korkoa on 110 917,80 € – 88 000 € = 22 917,80 €.

**Vastaus**

a) 616,21 €

b) 63 210,04 €

c) 22 917,80 €

B1.

**a)** Lasketaan viivästykoron suuruus.  
  
  
  
Lasketaan muistutuslaskun loppusumma.  
  

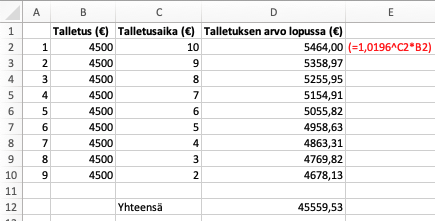

**b)** Merkitään korkopäivien lukumäärää kirjaimella *n*.  
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *n*.  
  
  
  
Viivästyskoron pitää ylittää 20 euroa, joten pyöristetään korkopäivien lukumäärä ylöspäin. Tarvitaan siis 164 korkopäivää.

**Vastaus**

**a)** 510,20 €

**b)** 164 päivän

B2.



10 vuoden kuluttua talletuksen aloittamisesta   
tilillä on 45 559,53 € ≈ 45 560 €.

**Vastaus**

45 560 €

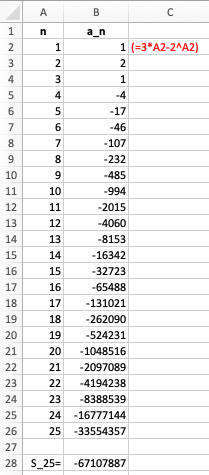
B3.

**a)**   
  
Lasketaan jonon peräkkäisten jäsenten suhde.  
  
.   
  
Koska peräkkäisten jäsenten suhde ei riipu *n*:n arvosta, jono on geometrinen ja *q* = 0,8.  
  
Lasketaan jonon 25 ensimmäisen jäsenen summa.  
  


**b)**   
  
Lasketaan jonon peräkkäisten jäsenten erotus.  
  
  
  
Koska peräkkäisten jäsenten erotus ei riipu *n*:n arvosta, jono on aritmeettinen.

Lasketaan jonon 25 ensimmäisen jäsenen summa.  
  


**c)**   
  
Jonon kolme ensimmäistä jäsentä on  
  
  
  
Koska  ja , jonon peräkkäisten jäsenten erotus ei ole vakio. Jono ei ole aritmeettinen.  
  
Koska  ja , jonon peräkkäisten jäsenten suhde ei ole vakio. Jono ei ole geometrinen.  
  
Jono ei siis ole geometrinen eikä aritmeettinen.  
  
Lasketaan jonon 25 ensimmäisen jäsenen summa taulukkolaskentaohjelmalla.



Jonon 25 ensimmäisen jäsenen summa on .

**Vastaus**

**a)** geometrinen jono, 

**b)** aritmeettinen jono, 

**c)** ei kumpikaan, 

B4.

**a)** Kun pääomaan lisätään 6,0 %:n korko, niin korkokerroin on  
100 % + 6,0 % = 106,0 % = 1,060.  
  
Lasketaan arvio pääomalle, kun Sari täytää 65 vuotta.Tähän kuluu aikaa 65 – 40 = 25 vuotta.  
  
Ensimmäinen sijoituserä kasvaa korkoa korolle 25 vuotta, seuraava 24 vuotta jne. Viimeisen sijoituksensa Sari tekee 59-vuotispäivänään, se kasvaa korkoa korolle 6 vuotta.  
  
  
Sarin arvion mukaan sijoituksen arvo on hänen 65-vuotispäivänään noin 156 500 €.

**b)** Merkitään vuotuisen sijoituksen suuruutta kirjaimella *K*.   
Muodostetaan a-kohdan geometrisen summan lausekkeen avulla yhtälö ja ratkaistaan *K*.  
  
  
Vuotuisen sijoituksen pitäisi olla vähintään 9583 €.

**Vastaus**

**a)** 156 500 €

**b)** 9583 €

B5.

a) Maksueriä on yhteensä  kappaletta.   
Lasketaan maksukauden korkokerroin.  
  
  
Lasketaan takaisinmaksuerän eli annuiteetin suuruus.

|  |  |
| --- | --- |
|  | , missä *K* = 180 000,  *q* = 1,00316667  ja *n* = 216. |

Takaisinmaksuerän suuruus on 1151,84 €.

**b)** Merkitään maksuerien lukumäärää kirjaimella *n*.   
Maksukauden korkokerroin on .  
  
Tasaerän suuruus on 1400 €. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan tarvittavien maksuerien lukumäärä *n*.

|  |
| --- |
| , missä *K* = 180 000,  *q* = 1,00316667  ja *A* = 1400. |

Maksueriä tarvitaan 165,4 kappaletta, joten laina-ajaksi on sovittava vähintään 166 kk ≈ 13,83 v ≈ 14 v.

**Vastaus**

**a)** 1151,84 € **b)** 14 vuotta