

5.1

a) Jonon suhdeluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten suhde.

$$q = \frac{8}{2} = 4 \qquad q = \frac{a_2}{a_1}$$

b) Muodostetaan jono yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = 4 \cdot 2^{n-1} \qquad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Lasketaan jonon 16. jäsen.

$$\begin{aligned} a_{16} &= 4 \cdot 2^{15} & a_n &= 4 \cdot 2^{n-1} \\ &= 131\,072 \end{aligned}$$

c) **Tapa 1.** Yhtälön avulla.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$\begin{aligned} a_n &= 10\,000 & \text{Sijoitetaan } a_n &= 4 \cdot 2^{n-1}. \\ 4 \cdot 2^{n-1} &= 10\,000 & \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ n &\approx 12,29 \end{aligned}$$

Koska jonon seuraava jäsen saadaan aina edellisestä kertomalla luvulla 2, jonon jäsenet suurenevät koko ajan. Viimeinen jonon jäsen, joka on pienempi kuin 10 000, on jäsen \square

Jonon 12 ensimmäistä jäsentä ovat pienempiä kuin 10 000.

Tapa 2. Epäyhtälön avulla.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan n .

$$a_n < 10\,000$$

$$\text{Sijoitetaan } a_n = 4 \cdot 2^{n-1}.$$

$$4 \cdot 2^{n-1} < 10\,000$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$n < 12,28\dots$$

Suurin positiivinen kokonaisluku n , joka toteuttaa epäyhtälön, on 12.
Viimeinen jonon jäsen, joka on pienempi kuin 10 000, on jäsen \square

Jonon 12 ensimmäistä jäsentä ovat pienempiä kuin 10 000.

Vastaus

a) $q = 2$

b) $a_n = 4 \cdot 2^{n-1}$, $a_{16} = 131\,072$

c) 12 ensimmäistä jäsentä

5.2

a) Jonon suhdeluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten suhde.

$$q = \frac{6}{-2} = -3 \qquad q = \frac{a_2}{a_1}$$

Muodostetaan jono yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = -2 \cdot (-3)^{n-1} \qquad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

b) Lasketaan jonon 13. jäsen.

$$\begin{aligned} a_{13} &= -2 \cdot (-3)^{12} \\ &= -1\,062\,882 \end{aligned} \qquad a_n = -2 \cdot (-3)^{n-1}$$

c) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$\begin{aligned} a_n &= 4374 \\ -2 \cdot (-3)^{n-1} &= 4374 \\ n &= 8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\text{Sijoitetaan } a_n = -2 \cdot (-3)^{n-1}. \\ &\text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \end{aligned}$$

Luku 4374 on jonon 8. jäsen.

Vastaus

a) $a_n = -2 \cdot (-3)^{n-1}$

b) $a_{13} = -1\,062\,882$

c) 8. jäsen

5.3

- a) Geometrisen summan ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 4$, suhdeluku $q = 5$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 10$.

Lasketaan summan arvo.

$$S_{10} = \frac{4 \cdot (1 - 5^{10})}{1 - 5} = 9\,765\,624$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

- b) Geometrisen summan $a_4 + a_5 + \dots + a_{14}$ ensimmäinen yhteenlaskettava on jonon 4. jäsen.

$$a_4 = 4 \cdot 5^3 = 500$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Viimeinen yhteenlaskettava on jonon 14. jäsen, joten yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 14 - 3 = 11$.

Lasketaan summan arvo.

$$S_{11} = \frac{500 \cdot (1 - 5^{11})}{1 - 5} = 6\,103\,515\,500$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Vastaus

a) 9 765 624

b) 6 103 515 500

5.4

- a) Geometrisen summan $\sum_{n=1}^{15} (3^n)$

ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 3^1 = 3$,
suhdeluku $q = 3$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 15$.

Lasketaan summan arvo.

$$S_{15} = \frac{3 \cdot (1 - 3^{15})}{1 - 3} = 21\,523\,359 \qquad S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

- b) Geometrisen summan $\sum_{n=12}^{20} (3^n)$

ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 3^{12} = 531\,441$,
suhdeluku $q = 3$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 20 - 11 = 9$.

Lasketaan summan arvo.

$$S_9 = \frac{531\,441 \cdot (1 - 3^9)}{1 - 3} = 5\,229\,910\,881 \qquad S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Vastaus

a) 21 523 359

b) 5 229 910 881

5.5

Merkitään yhteenlaskettavien lukumäärää kirjaimella n .

Jonon suhdeluku on

$$q = \frac{15}{3} = 5.$$

$$q = \frac{a_2}{a_1}$$

Geometrisen jonon 3, 15, 75, ... n :n ensimmäisen jäsenen summa on

$$S_n = \frac{3 \cdot (1 - 5^n)}{1 - 5}.$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Tapa 1. Yhtälön avulla

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$S_n = 6\,000\,000$$

$$\text{Sijoitetaan } S_n = \frac{3 \cdot (1 - 5^n)}{1 - 5}.$$

$$\frac{3 \cdot (1 - 5^n)}{1 - 5} = 6\,000\,000$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$n \approx 9,88$$

Koska lukujonon kaikki jäsenet ovat positiivisia, summan arvo kasvaa, kun yhteenlaskettavien lukumäärä n kasvaa.

On siis laskettava yhteen vähintään 10 lukujonon ensimmäistä jäsentä.

Tapa 2. Epäyhtälön avulla.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan n .

$$S_n > 6\,000\,000 \qquad \text{Sijoitetaan } S_n = \frac{3 \cdot (1 - 5^n)}{1 - 5}.$$

$$\frac{3 \cdot (1 - 5^n)}{1 - 5} > 6\,000\,000 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$n > 9,87\dots$$

Pienin positiivinen kokonaisluku n , joka toteuttaa epäyhtälön, on 10.

On siis laskettava yhteen vähintään 10 lukujonon ensimmäistä jäsentä.

Vastaus

vähintään 10 jäsentä

5.5

Merkitään yhteenlaskettavien lukumäärää kirjaimella n .

Geometrisen jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 8$ ja suhdeluku $q = 1,2$.
Täten jonon n :n ensimmäisen jäsenen summa on

$$S_n = \frac{8 \cdot (1 - 1,2^n)}{1 - 1,2}. \qquad S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Tapa 1. Yhtälön avulla

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$S_n = 1\,000\,000 \qquad \text{Sijoitetaan } S_n = \frac{8 \cdot (1 - 1,2^n)}{1 - 1,2}.$$

$$\frac{8 \cdot (1 - 1,2^n)}{1 - 1,2} = 1\,000\,000 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$n \approx 55,54$$

Koska lukujonon kaikki jäsenet ovat positiivisia, summan arvo kasvaa, kun yhteenlaskettavien lukumäärä n kasvaa.

Voidaan siis laskea yhteen enintään 55 lukujonon ensimmäistä jäsentä.

Tapa 2. Epäyhtälön avulla.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan n .

$$S_n < 1\,000\,000 \qquad \text{Sijoitetaan } S_n = \frac{8 \cdot (1 - 1,2^n)}{1 - 1,2}.$$

$$\frac{8 \cdot (1 - 1,2^n)}{1 - 1,2} < 1\,000\,000 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$n < 55,54\dots$$

Suurin positiivinen kokonaisluku n , joka toteuttaa epäyhtälön, on 55.

Voidaan siis laskea yhteen enintään 55 lukujonon ensimmäistä jäsentä.

Vastaus

enintään 55 jäsentä

5.7

Lukujonon jäsenistä mikään ei ole nolla, joten lukujono on geometrinen, jos peräkkäisten jäsenten suhde $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ on vakio kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$.

Muodostetaan peräkkäisten jäsenten lausekkeet.

$$a_n = 5^{4n}$$

$$a_{n+1} = 5^{4(n+1)} = 5^{4n+4}$$

Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhde.

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{5^{4n+4}}{5^{4n}} & \frac{u^n}{u^m} &= u^{n-m} \\ &= 5^{4n+4-4n} \\ &= 5^4 = 625\end{aligned}$$

Koska $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 625$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$, lukujono (a_n) on geometrinen. \square

5.8

Lukujono on geometrinen, jos peräkkäisten jäsenten suhde on vakio.

a) Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhteita.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{9}{6} = 1,5$$

Koska peräkkäisten jäsenten suhde ei ole vakio, lukujono ei voi olla geometrinen.

b) Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhteita.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-5}{5} = -1$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{5}{-5} = -1$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{-5}{5} = -1$$

Koska peräkkäisten jäsenten suhde on vakio, lukujono voi olla geometrinen.

Huomaa, että lukujono ei välttämättä ole geometrinen, koska emme tiedä miten lukujono jatkuu. Lukujono alussa peräkkäisten jäsenten suhde on vakio, joten lukujono voi olla geometrinen.

c) Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhteita.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{0} \text{ ei määritelty}$$

Koska peräkkäisten jäsenten suhde ei ole vakio, lukujono ei voi olla geometrinen.

d) Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhteita.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{20}{10} = 2$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{40}{20} = 2$$

Koska peräkkäisten jäsenten suhde on vakio, lukujono voi olla geometrinen.

e) Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhteita.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{3}{2}}{1} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{\frac{27}{8}}{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

Koska peräkkäisten jäsenten suhde on vakio, lukujono voi olla geometrinen.

f) Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhteita.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{12}{6} = 2$$

Koska peräkkäisten jäsenten suhde ei ole vakio, lukujono ei voi olla geometrinen.

Vastaus

b, d ja e

5.9

Altaanpituuden uintiin kuluvat ajat muodostavat geometrisen jonon, jossa ensimmäinen jäsen on $a_1 = 20$ ja suhdeluku $q = 1,10$.

Seuraavaan kuluva uintiaika saadaan edellisestä kertomalla aina luvulla 1,10 ($100 \% + 10 \% = 110 \% = 1,10$).

Lasketaan altaanpituuksien lukumäärä.

$$\frac{1 \text{ km}}{25 \text{ m}} = \frac{1000 \text{ m}}{25 \text{ m}} = 40$$

Kilometriin kuluva aika saadaan geometrisena summana, jossa $a_1 = 20$, $q = 1,10$ ja $n = 40$. Lasketaan summan arvo.

$$S_{40} = \frac{20 \cdot (1 - 1,10^{40})}{1 - 1,10} \approx 8852 \text{ (s)}$$

Muutetaan aika minuuteiksi.

$$\frac{8852 \text{ s}}{60 \text{ s}} \approx 148 \text{ min}$$

Muutetaan aika tunneiksi ja minuuteiksi.

$$148 \text{ min} = 2 \cdot 60 \text{ min} + 28 \text{ min} = 2 \text{ h } 28 \text{ min}$$

Vastaus

2 h 28 min

5.10

1. Lasketaan lukujonon jäsenet.

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

$$a_3 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$$

$$a_4 = 2 \cdot 9 - 1 = 17$$

$$a_{n+1} = 2a_n - 1$$

2. Lukujono ei ole aritmeettinen, koska peräkkäisten jäsenten erotus ei ole vakio.

$$a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$$

$$a_3 - a_2 = 9 - 5 = 4$$

Lukujono ei ole geometrinen, koska peräkkäisten jäsenten suhde ei ole vakio.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{5}{3} \approx 1,67$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{9}{5} = 1,8$$

Vastaus

- a) $a_2 = 5$, $a_3 = 9$ ja $a_4 = 17$

5.11

a) Jonon suhdeluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten suhde.

$$q = \frac{98\,304}{196\,608} = \frac{1}{2} \qquad q = \frac{a_2}{a_1}$$

b) Muodostetaan jono yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = 196\,608 \cdot \frac{1}{2}^{n-1} \qquad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Lasketaan jonon 15. jäsen.

$$a_{15} = 196\,608 \cdot \frac{1}{2}^{14} = 12$$

c) **Tapa 1.** Yhtälön avulla.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$a_n = 1 \qquad \text{Sijoitetaan } a_n = 196\,608 \cdot \frac{1}{2}^{n-1}.$$

$$196\,608 \cdot \frac{1}{2}^{n-1} = 1 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$n \approx 18,58$$

Koska jonon seuraava jäsen saadaan aina edellisestä kertomalla luvulla $\frac{1}{2}$, jonon jäsenet pienenevät koko ajan. Viimeinen jonon jäsen, joka on suurempi kuin 10 000, on jäsen a_{18} .

Jonon 18 ensimmäistä jäsentä ovat suurempia kuin 1.

Tapa 2. Epäyhtälön avulla.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan n .

$$a_n > 1 \qquad \text{Sijoitetaan } a_n = 196\,608 \cdot \frac{1}{2}^{n-1}.$$

$$196\,608 \cdot \frac{1}{2}^{n-1} > 1 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$n < 18,58\dots$$

Suurin positiivinen kokonaisluku n , joka toteuttaa epäyhtälön, on 18.
Viimeinen jonon jäsen, joka on suurempi kuin 10 000, on jäsen a_{18} .

Jonon 18 ensimmäistä jäsentä ovat suurempia kuin 1.

Vastaus

a) $q = \frac{1}{2}$

b) $a_n = 196\,608 \cdot \frac{1}{2}^{n-1}$, $a_{15} = 12$

c) 18 ensimmäistä jäsentä

5.12

a) Geometrisen summan $a_1 + a_2 + \dots + a_{20}$

ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 5 \cdot 2^{1-1} = 5$,

suhdeluku $q = 2$ $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

ja yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 20$.

Lasketaan summan arvo.

$$S_{20} = \frac{5 \cdot (1 - 2^{20})}{1 - 2} = 5\,242\,875 \quad S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

b) Geometrisen summan $\sum_{n=15}^{30} (a_n)$

ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_{15} = 5 \cdot 2^{14} = 81\,920$,

suhdeluku $q = 2$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 30 - 14 = 16$.

Lasketaan summan arvo.

$$S_{16} = \frac{81\,920 \cdot (1 - 2^{16})}{1 - 2} = 5\,368\,627\,200 \quad S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Vastaus

a) 5 242 875

b) 5 368 627 200

5.13

Merkitään yhteenlaskettavien lukumäärää kirjaimella n .

Jonon suhdeluku on

$$q = \frac{21}{15} = 1,4.$$

$$q = \frac{a_1}{a_2}$$

Geometrisen jonon 15; 21; 29,4; ... n :n ensimmäisen jäsenen summa on

$$S_n = \frac{15 \cdot (1 - 1,4^n)}{1 - 1,4}.$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Tapa 1. Yhtälön avulla

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$S_n = 500\,000$$

$$\text{Sijoitetaan } S_n = \frac{15 \cdot (1 - 1,4^n)}{1 - 1,4}.$$

$$\frac{15 \cdot (1 - 1,4^n)}{1 - 1,4} = 500\,000$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$n \approx 28,23$$

Koska lukujonon kaikki jäsenet ovat positiivisia, summan arvo kasvaa, kun yhteenlaskettavien lukumäärä n kasvaa.

On siis laskettava yhteen vähintään 29 lukujonon ensimmäistä jäsentä.

Tapa 2. Epäyhtälön avulla.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan n .

$$S_n > 500\,000 \qquad \text{Sijoitetaan } S_n = \frac{15 \cdot (1 - 1,4^n)}{1 - 1,4}.$$

$$\frac{15 \cdot (1 - 1,4^n)}{1 - 1,4} > 500\,000$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$n > 28,23$$

Pienin positiivinen kokonaisluku n , joka toteuttaa epäyhtälön, on 29.

On siis laskettava yhteen vähintään 29 lukujonon ensimmäistä jäsentä.

Vastaus

vähintään 29 jäsentä

5.14

Lukujonon jäsenistä mikään ei ole nolla, joten lukujono on geometrinen, jos peräkkäisten jäsenten suhde $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ on vakio kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$.

Muodostetaan peräkkäisten jäsenten lausekkeet.

$$a_n = \frac{15}{2^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{15}{2^{n+1}}$$

Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhde.

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{15}{2^{n+1}}}{\frac{15}{2^n}} \\ &= \frac{\cancel{15}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{\cancel{15}} \quad \frac{u^n}{u^m} = u^{n-m} \\ &= 2^{n-(n+1)} \\ &= 2^{n-n-1} \\ &= 2^{-1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Koska $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$, lukujono (a_n) on geometrinen. \square

5.15

Geometrisen jonon peräkkäisten jäsenten suhde on vakio. Muodostetaan tämän perusteella yhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$$

$$\frac{x^2 + 1}{x} = \frac{x^3 + 3}{x^2 + 1}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = 1$$

Kun $x = \frac{1}{2}$, jonon kolme ensimmäistä jäsentä ovat

$$a_1 = x = \frac{1}{2},$$

$$a_2 = x^2 + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4} \quad \text{ja}$$

$$a_3 = x^3 + 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 = \frac{25}{8}.$$

Tällöin suhdeluku $q = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}$, joten neljäs jäsen on

$$a_4 = \frac{25}{8} \cdot \frac{5}{2} = \frac{125}{16}.$$

Kun $x = 1$, jonon kolme ensimmäistä jäsentä ovat

$$a_1 = x = 1,$$

$$a_2 = x^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2 \text{ ja}$$

$$a_3 = x^3 + 3 = 1^3 + 3 = 4.$$

Tällöin erotusluku $q = \frac{2}{1} = 2$, joten neljäs jäsen on $a_4 = 4 \cdot 2 = 8$.

Vastaus

Kun $x = \frac{1}{2}$, jonon neljä ensimmäistä jäsentä ovat $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{25}{8}$ ja $\frac{125}{16}$.

Kun $x = \frac{5}{2}$, jonon neljä ensimmäistä jäsentä ovat 1, 2, 4 ja 8.

5.16

- a) Muodostetaan toisen jäsenen ja kuudennen jäsenen perusteella kaksi yhtälö, joissa muuttujina ovat a_1 ja q . Ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} a_2 = 6 \\ a_6 = 96 \end{cases} \quad \begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_6 &= a_1 \cdot q^5 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot q = 6 \\ a_1 \cdot q^5 = 96 \end{cases} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$a_1 = -3 \text{ ja } q = -2 \quad \text{tai} \quad a_1 = 3 \text{ ja } q = 2$$

- b) Muodostetaan kolmen ensimmäisen jäsenen ja kuuden ensimmäisen jäsenen summien perusteella kaksi yhtälöä, joissa muuttujina ovat a_1 ja q . Ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} S_3 = 2 \\ S_6 = 2 + 54 \end{cases} \quad \begin{aligned} S_3 &= \frac{a_1(1-q^3)}{a-q} \\ S_6 &= \frac{a_1(1-q^6)}{a-q} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{a_1(1-q^3)}{a-q} = 2 \\ \frac{a_1(1-q^6)}{a-q} = 56 \end{cases} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$a_1 = \frac{2}{3} \text{ ja } q = 3$$

Vastaus

- a) $a_1 = -3$ ja $q = -2$ tai $a_1 = 3$ ja $q = 2$ b) $a_1 = \frac{2}{3}$ ja $q = 3$

5.17

Ensimmäinen yhteenlaskettava on 1 ja suhdeluku $q = \frac{4}{1} = 4$.

Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä geometrisen jonon 1, 4, ..., 4 194 304 yleisen jäsenen lausekkeen avulla.

$$a_n = 1 \cdot 4^{n-1} = 4^{n-1} \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Ratkaistaan, kuinka mones jonon jäsen on luku 4 194 304.

$$a_n = 4\,194\,304$$

$$4^{n-1} = 4\,194\,304 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$n = 12$$

Luku 4 194 304 on jonon 12. jäsen, joten yhteenlaskettavien lukumäärä on 12.

Lasketaan geometrisen summan arvo.

$$S_{12} = \frac{1 \cdot (1 - 4^{12})}{1 - 4} = 5\,592\,405 \quad S_n = \frac{a_1(1 - q)^n}{1 - q}$$

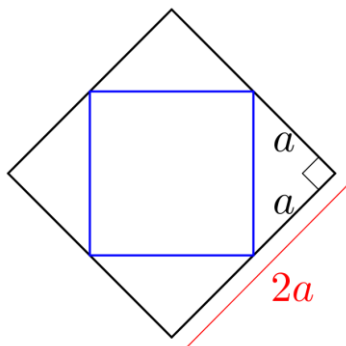
Vastaus

5 592 405

5.18

- a) Määritetään kahden peräkkäisen neliön pinta-alojen suhde.

Merkitään suuremman neliön sivun pituutta $2a$, jolloin sivun puolikas on a .



Suuremman neliön pinta-ala on $A_1 = (2a)^2 = 4a^2$.

Pienemmän neliön ulkopuolelle jää neljä identtistä suorakulmaista kolmiota, joiden yhteispinta-ala on $4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot a\right) = 2a^2$. Täten pienemmän neliön pinta-ala on $A_2 = 4a^2 - 2a^2 = 2a^2$.

Pinta-alojen suhde on $\frac{A_2}{A_1} = \frac{2\cancel{a^2}}{4\cancel{a^2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Näin ollen seuraavan kuvioon syntyvän neliön pinta-ala on aina puolet edellisen neliön pinta-alasta. Pinta-alat muodostavat siis geometrisen jonon.

Ensimmäisen neliön pinta-ala on A_1 ja jonon suhdeluku $q = \frac{1}{2}$.

Täten n :n neliön pinta-ala on

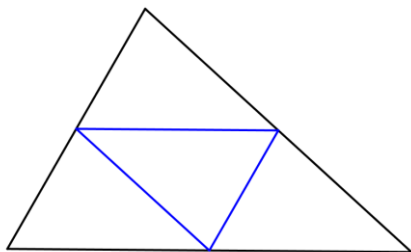
$$A_n = A_1 \cdot \frac{1}{2}^{n-1} \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan, kuinka mones neliö on ensimmäinen, jonka pinta-ala on pienempi kuin $\frac{A_1}{1000}$.

$$\begin{aligned} A_n &< \frac{A_1}{1000} \\ A_1 \cdot \frac{1}{2}^{n-1} &< \frac{A_1}{1000} \quad |: A_1 (> 0) \\ \frac{1}{2}^{n-1} &< \frac{1}{1000} \\ n &> 10,96... \end{aligned}$$

Pienin positiivinen kokonaisluku n , joka toteuttaa epäyhtälön, on 11. Siis 11. neliö on ensimmäinen, jonka pinta-ala on vähemmän kuin tuhannesosa isoimman neliön pinta-alasta.

b)



Kun kolmion kahden sivun keskipisteet yhdistetään, muodostuu jana, joka on yhdensuuntainen kolmannen sivun kanssa ja pituudeltaan puolet siitä. Näin ollen sinisen kolmion sivujen pituudet ovat puolet mustan kolmion sivujen pituuksista. Kolmiot ovat siis yhdenmuotoiset mittakaavassa $1 : 2$.

Koska yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö, näiden kolmioiden pinta-alojen suhde on $1 : 4$.

Näin ollen seuraavan kuvioon syntyvän kolmion pinta-ala on aina neljäsosa edellisen kolmion pinta-alasta. Pinta-alat muodostavat siis geometrisen jonon.

Ensimmäisen kolmion pinta-ala on A_1 ja jonon suhdeluku $q = \frac{1}{4}$.

Täten n :n kolmion pinta-ala on

$$A_n = A_1 \cdot \frac{1}{4}^{n-1} \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan, kuinka mones kolmio on ensimmäinen, jonka pinta-ala on pienempi kuin $\frac{A_1}{1\,000\,000}$.

$$\begin{aligned} A_n &< \frac{A_1}{1\,000\,000} \\ A_1 \cdot \frac{1}{4}^{n-1} &< \frac{A_1}{1\,000\,000} \quad |: A_1 \quad (> 0) \\ \frac{1}{4}^{n-1} &< \frac{1}{1\,000\,000} \\ n &> 10,96... \end{aligned}$$

Pienin positiivinen kokonaisluku n , joka toteuttaa epäyhtälön, on 11. Siis 11. kolmio on ensimmäinen, jonka pinta-ala on vähemmän kuin miljoonasosa isoimman kolmion pinta-alasta.

Vastaus

a) 11. neliö

b) 11. kolmio

5.19

Jono (a_n) alkaa 2, 8,

Jono $(\lg a_n)$ on geometrinen.

Geometrisen jonon $\lg 2, \lg 8, \dots$ suhdeluku on

$$q = \frac{\lg 8}{\lg 2} = 3.$$

Siis jonon $(\lg a_n)$ neljä ensimmäistä jäsentä ovat

$$\lg 2$$

$$\lg 8$$

$$3 \cdot \lg 8 = \lg 8^3 = \lg 512$$

$$3 \cdot \lg 512 = \lg 512^3 = \lg 134\,217\,728.$$

Täten jonon (a_n) neljä ensimmäistä jäsentä ovat

2, 8, 512 ja 134 217 728.

Jonon (a_n) jäsenen arvo on suurempi kuin 10^{10} , kun jonon $(\lg a_n)$

jäsenen arvo on suurempi kuin $\lg 10^{10} = 10$. Geometrisen jonon

$(\lg a_n)$ yleinen jäsen on $u_n = \lg 2 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1} \cdot \lg 2$.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan n .

$$u_n > 10^{10}$$

$$3^{n-1} \cdot \lg 2 > 10^{10}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$n > 23,05\dots$$

Pienin positiivinen kokonaisluku n , joka toteuttaa epäyhtälön, on 24.

Siis lukujonon (a_n) 24. jäsen on ensimmäinen, jonka arvo on suurempi

kuin 10^{10}

Vastaus

2, 8, 512 ja 134 217 728; 24. jäsen

5.20

Oletetaan, että jono a_1, a_2, a_3, \dots on geometrinen ja jonon jokainen jäsen on positiivinen.

Tarkastellaan jonon kolmea peräkkäistä mielivaltaista jäsentä a_{n-1} , a_n ja a_{n+1} , missä $n = 2, 3, \dots$.

Oletuksen perusteella peräkkäisten jäsenten suhde on vakio. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan jäsen a_n .

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$a_n \cdot a_n = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

$$(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \quad \text{tai} \quad a_n = -\sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Koska $a_n > 0$ kaikilla n , on $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$. Neliöjuuri on määritelty, koska jonon jokainen jäsen on positiivinen ja siten $a_{n-1} \cdot a_{n+1} > 0$ kaikilla n .

On osoitettu, että jäsen a_n on edellisen jäsenen a_{n-1} ja seuraavan jäsenen a_{n+1} geometrinen keskiarvo, kun $n = 2, 3, \dots$. \square

5.21

Jono (a_n) alkaa 1, 2, 5, 14,

Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotuksia.

$$a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$$

$$a_3 - a_2 = 5 - 2 = 3$$

$$a_4 - a_3 = 14 - 5 = 9$$

Nämä erotukset muodostavat geometrisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen on 1 ja suhdeluku on 3.

Päätellään jonon (a_n) jäseniä lisää.

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + 1$$

$$a_3 = 1 + 1 + 3$$

$$a_4 = 1 + 1 + 3 + 9$$

$$a_5 = 1 + 1 + 3 + 9 + 27$$

Jonon (a_n) n :s jäsen saadaan siis lisäämällä lukuun 1 geometrisen jonon 1, 3, 9, ... jäseniä alusta alkaen $n - 1$ kappaletta.

Lasketaan geometrisen jono 1, 3, 9, ...

$n - 1$ ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{n-1} = \frac{1 \cdot (1 - 3^{n-1})}{1 - 3} = \frac{1 - 3^{n-1}}{-2} = \frac{3^{n-1} - 1}{2}$$

Määritetään jonon (a_n) n :s jäsen.

$$a_n = 1 + \frac{3^{n-1} - 1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{3^{n-1} - 1}{2} = \frac{3^{n-1} + 1}{2}$$

Lasketaan jonon 15. jäsen.

$$a_{15} = \frac{3^{14} + 1}{2} = 2\,391\,485$$

Vastaus

$$a_n = \frac{3^{n-1} + 1}{2} \quad \text{ja} \quad a_{15} = 2\,391\,485$$

5.22

a)



Kun kolmion kahden sivun keskipisteet yhdistetään, muodostuu jana, joka on yhdensuuntainen kolmannen sivun kanssa ja pituudeltaan puolet siitä. Näin ollen toisen kuvion valkoisen kolmion sivujen pituudet ovat puolet ensimmäisen kuvion sinisen kolmion sivujen pituuksista. Valkoinen kolmio ja iso sininen kolmio ovat siis yhdenmuotoiset mittakaavassa $1 : 2$.

Koska yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö, näiden kolmioiden pinta-alojen suhde on $1 : 4$.

Koska ensimmäisen kolmion pinta-ala on 1 , on toisen kuvion valkoisen kolmion pinta-ala $\frac{1}{4}$ ja siten sinisten kolmioiden yhteispinta-ala

$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Kun kolmiosta poistetaan valkoinen kolmio, kuvion pinta-ala tulee $\frac{3}{4}$ -kertaiseksi. Näin käy jokaisella kerralla, kun kuvion sinisistä kolmioista poistetaan valkoinen kolmio.

Kuvion n :nnessä vaiheessa poistoja on tehty $n - 1$ kappaletta. Näin ollen kuvion pinta-ala on tullut $\frac{3}{4}^{n-1}$ -kertaiseksi.

Koska ensimmäisen kolmion pinta-ala on 1 , n :nnen kuvion pinta-ala on $\frac{3}{4}^{n-1}$.

b) Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan n .

$$\frac{3}{4}^{n-1} < 0,1$$

$$n > 9,003\dots$$

Pienin positiivinen kokonaisluku n , joka toteuttaa epäyhtälön, on 10.
Siis 10. kuvio on ensimmäinen, jonka pinta-ala on alle 0,1.

Vastaus

a) $\frac{3}{4}^{n-1}$

b) 10. kuvio