4.1

**a)**  Jonon erotusluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten erotus.  
  


**b)** Muodostetaan jono yleisen jäsenen lauseke.  
  
   
  
Lasketaan jonon 20. jäsen.  
  


**c)** **Tapa 1.** Yhtälön avulla.   
  
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *n*.  
  
   
  
Koska jonon seuraava jäsen saadaan aina edellisestä lisäämällä luku 3, jonon jäsenet kasvavat koko ajan. Jonon viimeinen alle 100 oleva jäsen on    
  
Jonon 33 ensimmäistä jäsentä ovat pienempiä kuin 100.

**Tapa 2.** Epäyhtälön avulla.  
  
Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan *n*.  
  
  
  
Suurin positiivinen kokonaisluku *n*, joka toteuttaa epäyhtälön, on 33. Jonon viimeinen alle 100 oleva jäsen on    
  
Jonon 33 ensimmäistä jäsentä ovat pienempiä kuin 100.

**Vastaus**

**a)** *d* = 3

**b)** 

**c)** 33 ensimmäistä jäsentä

4.2

**a)**  Jonon erotusluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten erotus.  
  
  
  
Muodostetaan jono yleisen jäsenen lauseke.  
  


**b)** Lasketaan jonon 63. jäsen.  
  


**c)** Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *n*.  
  
   
  
Luku 63 on jonon 26. jäsen.

**Vastaus**

**a)** 

**b)** 

**c)** 26. jäsen

4.3

**a)**  Aritmeettisen summan    
ensimmäinen yhteenlaskettava on ,  
viimeinen yhteenlaskettava on  ja  
yhteenlaskettavien lukumäärä on *n* = 100.  
  
Lasketaan summan arvo.  
  


**b)** Aritmeettisen summan    
ensimmäinen yhteenlaskettava on ,  
viimeinen yhteenlaskettava on  ja  
yhteenlaskettavien lukumäärä on *n* = 75 – 7 = 68.

(Summasta jää pois jonon seitsemän ensimmäistä jäsentä.)

Lasketaan summan arvo.  
  


**Vastaus**

**a)** 21 000

**b)** 11 832

4.4

**a)**  Aritmeettisen summan    
ensimmäinen yhteenlaskettava on ,  
viimeinen yhteenlaskettava on  ja  
yhteenlaskettavien lukumäärä on *n* = 25.  
  
Lasketaan summan arvo.  
  


**b)** Aritmeettisen summan    
ensimmäinen yhteenlaskettava on ,  
viimeinen yhteenlaskettava on  ja  
yhteenlaskettavien lukumäärä on *n* = 105 – 11 = 94.

(Summasta jää pois jonon yksitoista ensimmäistä jäsentä.)

Lasketaan summan arvo.  
  


**Vastaus**

**a)** –1025

**b)** 26 085

4.5

Ensimmäinen yhteenlaskettava on 17 ja viimeinen yhteenlaskettava 477.

Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä aritmeettisen jonon   
17, 22, ... , 477 yleisen jäsenen lausekkeen avulla.  
  
Ensimmäinen jäsen  ja erotusluku *d* = 22 – 17 = 5. Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.  
  


Ratkaistaan, kuinka mones jonon jäsen on luku 477.



Luku 477 on jonon 93. jäsen, joten yhteenlaskettavien lukumäärä on 93.

Lasketaan aritmeettisen summan arvo.  
  


**Vastaus**

22 971

4.6

Ensimmäinen yhteenlaskettava on 17,5 ja viimeinen   
yhteenlaskettava –68.

Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä aritmeettisen jonon   
17,5, 16, ... , –68 yleisen jäsenen lausekkeen avulla.  
  
Ensimmäinen jäsen  ja erotusluku *d* = 16 – 17,5 = –1,5. Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.  
  


Ratkaistaan, kuinka mones jonon jäsen on luku –68.



Luku –68 on jonon 58. jäsen, joten yhteenlaskettavien lukumäärä on 58.

Lasketaan aritmeettisen summan arvo.  
  


**Vastaus**

–1464,5

4.7

Lukujono on aritmeettinen, jos peräkkäisten jäsenten erotus  on vakio kaikilla *n* = 1, 2, 3, ... .

Muodostetaan peräkkäisten jäsenten lausekkeet.



Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotus.



Koska  kaikilla *n* = 1, 2, 3, ..., lukujono  on aritmeettinen. 

4.8

Lukujono on aritmeettinen, jos peräkkäisten jäsenten erotus on vakio.

**a)** Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotuksia.  
  
   
  
Koska peräkkäisten jäsenten erotus on vakio, lukujono voi olla aritmeettinen.

Huomaa, että lukujono ei välttämättä ole aritmeettinen, koska emme tiedä miten lukujono jatkuu. Lukujono alussa peräkkäisten jäsenten erotus on vakio, joten lukujono voi olla aritmeettinen.

**b)** Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotuksia.  
  
   
  
Koska peräkkäisten jäsenten erotus on vakio, lukujono voi olla aritmeettinen.

**c)** Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotuksia.  
  
   
  
Koska peräkkäisten jäsenten erotus ei ole vakio, lukujono ei voi olla aritmeettinen.

**d)** Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotuksia.  
  
   
  
Koska peräkkäisten jäsenten erotus ei ole vakio, lukujono ei voi olla aritmeettinen.

**e)** Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotuksia.  
  
   
  
Koska peräkkäisten jäsenten erotus on vakio, lukujono voi olla aritmeettinen.

**f)** Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotuksia.  
  
   
  
Koska peräkkäisten jäsenten erotus ei ole vakio, lukujono ei voi olla aritmeettinen.

**Vastaus**

a, b ja e

4.9

**a)**  Jonon erotusluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten erotus.  
  
  
  
Muodostetaan jono yleisen jäsenen lauseke.  
  


**b)** Summan ensimmäinen yhteenlaskettava on ,  
viimeinen yhteenlaskettava on  ja  
yhteenlaskettavien lukumäärä *n* = 40.  
  
Lasketaan aritmeettisen summan arvo.  
  


**c)** Kun lasketaan yhteen jonon *n* ensimmäistä jäsentä,   
ensimmäinen yhteenlaskettava on  ja  
viimeinen yhteenlaskettava on    
  
Summan arvo on   
  
.

**Tapa 1.** Yhtälön avulla.  
  
Summan tulee olla yli 15 000. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, kuinka monta jäsentä on laskettava yhteen, jotta summa on 15 000.  
  
   
  
Koska jonon kaikki jäsenet ovat positiivisia, summan arvo suurenee, kun yhteenlaskettavien jäsenten lukumäärä kasvaa.  
  
Tulee laskea yhteen siis vähintään 52 jonon alkupään jäsentä, jotta summan arvo ylittää arvon 15 000.  
  
  
**Tapa 2.** Epäyhtälön avulla.  
  
Summan tulee olla yli 15 000. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan, kuinka monta jäsentä on laskettava yhteen, jotta summa ylittää 15 000.  
  
   
  
Pienin positiivinen kokonaisluku *n*, joka toteuttaa epäyhtälön, on 52.  
  
Tulee laskea yhteen siis vähintään 52 jonon alkupään jäsentä, jotta summan arvo ylittää arvon 15 000.

**Vastaus**

**a)** 

**b)** 9260

**c)** vähintään 52

4.10

Liisan säästöpossuun sijoittamat rahamäärät muodostavat aritmeettisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen  ja erotusluku *d* = 2.

Jonon yleisen jäsenen lauseke on .

Muodostetaan lauseke jonon *n*:n ensimmäisen jäsenen summalle.



**Tapa 1.** Yhtälön avulla.  
  
Summan tulee olla yli 1000. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, kuinka monta jäsentä on laskettava yhteen, jotta summa on 1000.  
  
   
  
Koska jonon kaikki jäsenet ovat positiivisia, summan arvo suurenee, kun yhteenlaskettavien jäsenten lukumäärä kasvaa.  
  
Liisan tulee säästää siis 31 viikkoa.

**Tapa 2.** Epäyhtälön avulla.  
  
Summan tulee olla yli 1000. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan, kuinka monta jäsentä on laskettava yhteen, jotta summa ylittää 1000.  
  
   
  
Pienin positiivinen kokonaisluku *n*, joka toteuttaa epäyhtälön, on 31.  
  
Liisan tulee säästää siis 31 viikkoa.

Lasketaan viikolla 31 possuun laitettavan rahamäärän suuruus.



**Vastaus**

31 viikkoa, 63 €

4.11

**a)**  Jonon erotusluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten erotus.  
  


**b)** Muodostetaan jono yleisen jäsenen lauseke.  
  
   
  
Lasketaan jonon 100. jäsen.  
  


**c)** **Tapa 1.** Yhtälön avulla.   
  
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *n*.  
  
   
  
Koska jonon seuraava jäsen saadaan aina edellisestä lisäämällä luku 18, jonon jäsenet kasvavat koko ajan. Jonon viimeinen negatiivinen jäsen   
on    
  
Jonon 14 ensimmäistä jäsentä ovat negatiivisia.

**Tapa 2.** Epäyhtälön avulla.  
  
Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan *n*.  
  
  
  
Suurin positiivinen kokonaisluku *n*, joka toteuttaa epäyhtälön, on 14. Jonon viimeinen negatiivinen jäsen on    
  
Jonon 14 ensimmäistä jäsentä ovat negatiivisia.

**Vastaus**

**a)** *d* = 18

**b)** 

**c)** 14 ensimmäistä jäsentä

4.12

**a)**  Aritmeettisen summan    
ensimmäinen yhteenlaskettava on ,  
viimeinen yhteenlaskettava on  ja  
yhteenlaskettavien lukumäärä on *n* = 70.  
  
Lasketaan summan arvo.  
  


**b)** Aritmeettisen summan    
ensimmäinen yhteenlaskettava on ,  
viimeinen yhteenlaskettava on  ja  
yhteenlaskettavien lukumäärä on *n* = 95 – 14 = 81.

(Summasta jää pois jonon neljätoista ensimmäistä jäsentä.)

Lasketaan summan arvo.  
  


**Vastaus**

**a)** 3010

**b)** –5994

4.13

**a)** Ensimmäinen yhteenlaskettava on 102 ja viimeinen   
yhteenlaskettava 1948.  
  
Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä aritmeettisen jonon   
102, 115, ... , 1948 yleisen jäsenen lausekkeen avulla.  
  
Ensimmäinen jäsen  ja erotusluku *d* = 115 – 102 = 13. Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.  
  
   
  
  
Ratkaistaan, kuinka mones jonon jäsen on luku 1948.  
  
   
  
Luku 1948 on jonon 143. jäsen, joten yhteenlaskettavien lukumäärä   
on 143.  
  
Lasketaan aritmeettisen summan arvo.  
  


**b)** Ensimmäinen yhteenlaskettava on –900 ja viimeinen   
yhteenlaskettava 90.  
  
Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä aritmeettisen jonon   
–900 – 897 – ... + 90 yleisen jäsenen lausekkeen avulla.  
  
Ensimmäinen jäsen  ja erotusluku *d* = –897 – (–900) = 3. Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.  
  
   
  
  
Ratkaistaan, kuinka mones jonon jäsen on luku 90.  
  
   
  
Luku 90 on jonon 331. jäsen, joten yhteenlaskettavien lukumäärä   
on 331.  
  
Lasketaan aritmeettisen summan arvo.  
  


**Vastaus**

**a)** 146 575

**b)** –134 055

4.14

Lukujono on aritmeettinen, jos peräkkäisten jäsenten erotus  on vakio kaikilla *n* = 1, 2, 3, ... .

Muodostetaan peräkkäisten jäsenten lausekkeet.



Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotus.



Koska  kaikilla *n* = 1, 2, 3, ..., lukujono  on aritmeettinen. 

4.15

Juliuksen säästämät rahamäärät muodostavat aritmeettisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen  ja erotusluku *d* = 1.

Jonon 22. jäsen on 

Muodostetaan lauseke jonon 22 ensimmäisen jäsenen summalle.



**Tapa 1.** Yhtälön avulla.  
  
Summan tulee olla yli 1500. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *x*.  
  
   
  
Juliuksen tulee aloittaa vähintään 58 eurolla.

**Tapa 2.** Epäyhtälön avulla.  
  
Summan tulee olla yli 1500. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan *x*.  
  
   
  
Juliuksen tulee aloittaa säästäminen vähintään 58 eurolla.

**Vastaus**

58 €

4.16

Aritmeettisen jonon peräkkäisten jäsenten erotus on vakio. Muodostetaan tämän perusteella yhtälö ja ratkaistaan *x*.



Kun *x* = 0, jonon kolme ensimmäistä jäsentä ovat  


Tällöin erotusluku *d* = –8 – 0 = –8, joten neljäs jäsen on 

Kun *x* =  , jonon kolme ensimmäistä jäsentä ovat  


Tällöin erotusluku , joten neljäs jäsen on 

**Vastaus**

Kun *x* = 0, jonon neljä ensimmäistä jäsentä ovat 0, –8, –16 ja –24.

Kun , jonon neljä ensimmäistä jäsentä ovat 

4.17

Aritmeettisen summan ensimmäinen yhteenlaskettava on 142 ja  
viimeinen yhteenlaskettava on 1405.

Summan arvo on 326 417.

Merkitään yhteenlaskettavien lukumäärää kirjaimella *n*.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan yhteenlaskettavien lukumäärä.



Summassa on 422 yhteenlaskettavaa.

**Vastaus**

422

4.18

**a)** Muodostetaan kolmannen jäsenen ja kuudennen jäsenen perusteella kaksi yhtälö, joissa muuttujina ovat  ja *d*. Ratkaistaan yhtälöpari.  
  


**b)** Muodostetaan kolmen ensimmäisen jäsenen ja kuuden ensimmäisen jäsenen summien perusteella kaksi yhtälöä, joissa muuttujina ovat  ja *d*. Ratkaistaan yhtälöpari.  
  


**Vastaus**

**a)** 

**b)** 

4.19

Lasketaan aritmeettinen summa 101 + 102 + ... + 999 ja poistettavista luvuista muodostuva summa. Kysytty summa saadaan näiden erotuksena.

Aritmeettisen summan 101 + 102 + ... + 999   
ensimmäinen yhteenlaskettava on 101,

viimeinen yhteenlaskettava on 999 ja

yhteenlaskettavien lukumäärä *n* = 999 – 100 = 899.  
  
Lasketaan summan arvo.  
  


Summan ensimmäinen kolmella jaollinen termi on 102 (102 : 3 = 34) ja viimeinen kolmella jaollinen termi on 999 (999 : 3 = 333). Kolmella jaolliset luvut muodostavat aritmeettisen summan  
102 + 105 + ... + 999, jossa erotusluku *d* = 3.

Jonon 102, 105, ..., 999 yleisen jäsenen lauseke on .   
  
Ratkaistaan, kuinka mones jäsen luku 999 on.  
  
   
  
Aritmeettisen summan 102 + 105 + ... + 999

ensimmäinen yhteenlaskettava on 102,

viimeinen yhteenlaskettava on 999 ja

yhteenlaskettavien lukumäärä *n* = 300.

Lasketaan summan arvo.  
  
  
  
  
Lasketaan kysytyn summan arvo.

*S* = 494 450 – 165 150 = 329 300

**Vastaus**

329 300

4.20

**a)** Jono  on aritmeettinen, joten sen peräkkäisten jäsenten erotus on vakio. Jonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat  ja . Jonon erotusluku on siis *d* = 9 – 3 = 6.  
  
Jonon  viisi ensimmäistä jäsentä ovat siis  
  
3, 9, 15, 21 ja 27.  
  
Kirjoitetaan nämä luvun 3 potensseina, jolloin nähdään lukujonon  viisi ensimmäistä jäsentä.  
  
   
  
Lukujonon  viisi ensimmäistä jäsentä ovat siis  
  
.

**b)** Jonon  jäsen on suurempi kuin 10, kun jonon  jäsen on suurempi kuin    
  
Jonon  yleisen jäsenen lauseke on   
  
  
Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan *n*.  
  
   
  
Pienin positiivinen kokonaisluku *n*, joka toteuttaa epäyhtälön, on 9843. Siis lukujonon  9843. jäsen on ensimmäinen jäsen, jonka arvo on suurempi kuin 10.

**Vastaus**

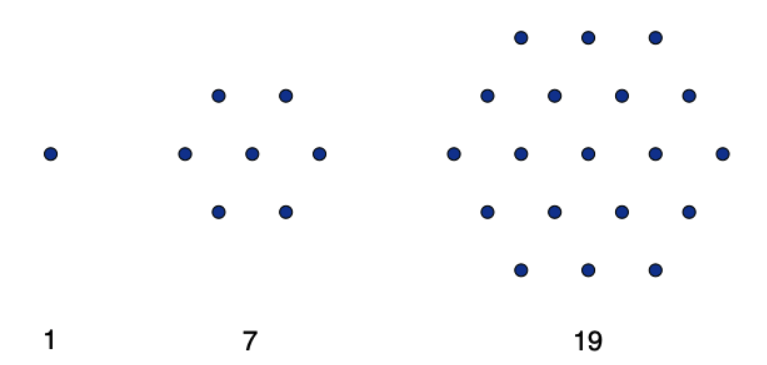
**a)** 

**b)** 9843. jäsen

4.21

Oletetaan, että jono  on aritmeettinen.   
  
Tarkastellaan jonon kolmea peräkkäistä mielivaltaista jäsentä , missä *n* = 2, 3, ... .  
  
Oletuksen perusteella peräkkäisten jäsenten erotus on vakio. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan jäsen .  
  
   
  
On osoitettu, että jäsen  on edellisen jäsenen  ja seuraavan jäsenen  keskiarvo, kun *n* = 2, 3, ... . 

4.22



**a)** Toinen luku saadaan ensimmäisestä luvusta lisäämällä kuusikulmio, jossa on 6 pistettä. Toinen luku on siis 1 + 6 = 7.  
  
Kolmas luku saadaan toisesta lisäämällä kuusikulmio, jossa on   
2 · 6 = 12 pistettä. Kolmas luku on siis 7 + 12 = 19.  
  
Neljäs luku saadaan kolmannesta lisäämällä kuusikulmio, jossa on   
3 · 6 = 18 pistettä. Neljäs luku on siis 19 + 18 = 37.

**b)** Lisättävät luvut muodostavat aritmeettisen jonon   
  
6, 2 · 6, 3 · 6, ... eli jonon 6, 12, 18, ....  
  
Kolmaskymmenes kuusikulmioluku saadaan lisäämällä lukuun 1 jonon 29 ensimmäistä jäsentä.   
  
Aritmeettisen jonon 6, 12, 18, ...   
ensimmäinen jäsen on 6 ja   
29. jäsen on 6 + 28 · 6 = 174.  
  
Näiden 29 jäsenen summa on aritmeettinen summa  
  
.  
  
Kolmaskymmenes kuusikulmioluku on 1 + 2610 = 2611.

**c)** *n*:s kuusikulmioluku saadaan lisäämällä *n* – 1 ensimmäistä aritmeettisen jonon 6, 12, 18, ... jäsentä lukuun 1.  
  
Määritetään *n*:s kuusikulmioluku.  
  


**Vastaus**

**a)** 37

**b)** 2611

**c)** 

4.23

**a)** Välille ]0, 1[ kuuluvat luvut ovat muotoa ,   
missä *n* = 1, 2, 3, ..., 612.  
  
Koska nimittäjä 613 on alkuluku, kaikki luvut  ovat muodossa, jota ei voi supistaa.  
  
Lasketaan lukujen summa.  
  


**b)** Välille ]0, 1[ kuuluvat luvut ovat muotoa ,   
missä *n* = 1, 2, 3, ..., 624.  
  
Koska , luvut  ovat muodossa, jota ei voi supistaa, jos osoittaja ei ole 5:llä jaollinen.  
  
Jos osoittaja on 5:llä jaollinen, luku supistuu, jolloin sen nimittäjä ei ole enää 625.

Kysytty summa saadaan vähentämällä kaikkien muotoa  olevien lukujen summasta niiden lukujen summa, joissa osoittaja on 5:llä jaollinen.  
  


**Vastaus**

**a)** 306

**b)** 250