

6.1

Anu tallettaa tilille rahaa yhteensä $12 \cdot 250 \text{ €} = 3000 \text{ €}$.

Lasketaan tilin nettokorkokanta.

$$0,70 \cdot 1 \% = 0,70 \% \quad \begin{array}{l} \text{Lähdevero } 30 \% \\ 100 \% - 30 \% = 70 \% = 0,70 \end{array}$$

Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 12 kuukautta, toinen talletus 11 kuukautta ja niin edelleen. Viimeinen talletus kasvaa korkoa 1 kuukauden.

Lasketaan, kuinka paljon korkoa kertyy yhteensä.

$$\begin{aligned} & 250 \cdot 0,0070 \cdot \frac{12}{12} + 250 \cdot 0,0070 \cdot \frac{11}{12} + \dots + 250 \cdot 0,0070 \cdot \frac{1}{12} \\ & = 250 \cdot 0,0070 \cdot \frac{1}{12} \cdot (12 + 11 + \dots + 1) \end{aligned}$$

Erotetaan
yhteinen
tekijä.

Sulkeissa on aritmeettinen summa, jossa yhteenlaskettavien lukumäärä on $n = 12$, ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 12$ ja viimeinen yhteenlaskettava $a_{12} = 1$. Lasketaan summan arvo.

$$S_{12} = 12 \cdot \frac{12+1}{2} = 78 \quad S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Lasketaan kertyvän koron määrä.

$$250 \cdot 0,0070 \cdot \frac{1}{12} \cdot (12 + 11 + \dots + 1) = 250 \cdot 0,0070 \cdot \frac{1}{12} \cdot 78 \approx 11,38 \text{ (€)}$$

Vuoden lopussa koron maksamisen jälkeen tilin pääoma on

$$3000 \text{ €} + 11,38 \text{ €} = 3011,38 \text{ €}$$

Vastaus

3011,38 €

6.2

Merkitään kuukausittaisen talletuksen suuruutta kirjaimella x .

Nikke tallettaa tilille rahaa yhteensä $10x$ €.

Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 10 kuukautta, toinen talletus 9 kuukautta ja niin edelleen. Viimeinen talletus kasvaa korkoa 1 kuukauden.

Tilin nettokorkokanta on 1,85 %. Muodostetaan lauseke, joka ilmaisee talletukselle kertyvän koron määrän.

$$x \cdot 0,0185 \cdot \frac{10}{12} + x \cdot 0,0185 \cdot \frac{9}{12} + \dots + x \cdot 0,0185 \cdot \frac{1}{12}$$

Erötetaan
yhteinen
tekijä.

$$= x \cdot 0,0185 \cdot \frac{1}{12} \cdot (10 + 9 + \dots + 1)$$

Lasketaan sulkeista
aritmeettinen summa.

$$= x \cdot 0,0185 \cdot \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot \frac{10+1}{2}$$

$$= x \cdot 0,0185 \cdot \frac{1}{12} \cdot 55$$

Vuoden lopussa koron maksamisen jälkeen tilin pääoma on

$$10x + x \cdot 0,0185 \cdot \frac{1}{12} \cdot 55.$$

Ratkaistaan, kuinka suurella kuukausittaisella talletuksella x tilillä on vuoden lopussa rahaa 1700 €.

$$10x + x \cdot 0,0185 \cdot \frac{1}{12} \cdot 55 = 1700$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx 169 \text{ (€)}$$

Kuukausittaisen talletuksen tulisi olla 169 euroa.

Vastaus

169 €

6.3

Tilin nettokorkokanta on $0,70 \cdot 1,40 \% = 0,98 \%$. Pääoma kasvaa vuosittain 1,0098-kertaiseksi.

Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 21 vuotta, toinen talletus 20 vuotta ja niin edelleen. Viimeinen talletus kasvaa korkoa 3 vuotta.

Lasketaan, kuinka paljon tilillä on rahaa Roopen 21-vuotispäivänä.

$$\begin{aligned} & 300 \cdot 1,0098^{21} + 300 \cdot 1,0098^{20} + \dots + 300 \cdot 1,0098^4 + 300 \cdot 1,0098^3 \\ & = 300 \cdot 1,0098^3 + 300 \cdot 1,0098^4 + \dots + 300 \cdot 1,0098^{20} + 300 \cdot 1,0098^{21} \end{aligned}$$

Käännetään
järjestys.

Kyseessä on geometrinen summa, jossa ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 300 \cdot 1,0098^3$, yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 21 - 2 = 19$ ja suhdeluku $q = 1,0098$. Lasketaan summan arvo.

$$\begin{aligned} S_{19} &= \frac{300 \cdot 1,0098^3 \cdot (1 - 1,0098^{19})}{1 - 1,0098} \\ &\approx 6417 \text{ (€)} \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Roope voi nostaa 6417 euroa.

Vastaus

6417 €

6.4

Merkitään vuotuisen talletuksen suuruutta kirjaimella x .

Tilin nettokorkokanta on 1,95 %. Pääoma kasvaa vuosittain 1,0195-kertaiseksi.

Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa $2032 - 2021 = 11$ vuotta, toinen talletus 10 vuotta ja niin edelleen. Viimeinen talletus kasvaa korkoa 1 vuoden.

Muodostetaan lauseke, joka ilmaisee tilillä olevan rahamäärän vuoden 2032 lopussa koron lisäämisen jälkeen.

$$x \cdot 1,0195^{11} + x \cdot 1,0195^{10} + \dots + x \cdot 1,0195^2 + x \cdot 1,0195^1$$

Käännetään järjestys.

$$= x \cdot 1,0195^1 + x \cdot 1,0195^2 + \dots + x \cdot 1,0195^{10} + x \cdot 1,0195^{11}$$

Kyseessä on geometrinen summa, jossa ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = x \cdot 1,0195^1$, yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 11$ ja suhdeluku $q = 1,0195$. Muodostetaan summan lauseke.

$$S_{11} = \frac{x \cdot 1,0195 \cdot (1 - 1,0195^{11})}{1 - 1,0195} \qquad S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Ratkaistaan, kuinka suurella vuotuisella talletuksella x tilillä on vuoden 2032 lopussa rahaa 7000 €.

$$\frac{x \cdot 1,0195 \cdot (1 - 1,0195^{11})}{1 - 1,0195} = 7000$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx 565,68 \text{ (€)}$$

Tilille kertyy 7000 €, jos vuotuinen talletus on 570 €.

Vastaus

570 €

6.5

- a) Tilin nettokorkokanta on 1,70 %. Pääoma kasvaa vuosittain 1,0170-kertaiseksi.

Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla.

Kirjoitetaan sarakkeeseen A talletusvuoden järjestysluku ja sarakkeeseen B vuoden alussa tehtävä talletus. Lasketaan sarakkeeseen C vuoden lopussa tilillä oleva pääoma.

	A	B	C
1	Vuosi	Talletus (€)	Pääoma vuoden lopussa (€)
2	1	450	457,65
3	2	450	923,08
4	3	450	1396,42
5	4	450	1877,81
6	5	450	2367,38
7	6	450	2865,28
8	7	450	3371,64
9	8	450	3886,61
10	9	450	4410,33
11	10	450	4942,96

=B2*1,0170

=(C2+B3)*1,0170

Kopioidaan kaavaa
alaspäin

Tilillä on rahaa 10. vuoden lopussa 4942,96 euroa.

- b) Tilin nettokorkokanta on 2,05 %. Pääoma kasvaa vuosittain 1,0205-kertaiseksi.

Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla.

Kirjoitetaan sarakkeeseen A talletusvuoden järjestysluku ja sarakkeeseen B vuoden alussa tehtävä talletus. Lasketaan sarakkeeseen C vuoden lopussa tilillä oleva pääoma.

	A	B	C
1	Vuosi	Talletus (€)	Pääoma vuoden lopussa (€)
2	1	1300	1326,65
3	2	1300	2680,50
4	3	1300	4062,10
5	4	1300	5472,02
6	5	1300	6910,85
7	6	1300	8379,17
8	7	1300	9877,59
9	8	1300	11 406,73
10	9	1300	12 967,22
11	10	1300	14 559,70

$$=B2*1,0205$$

$$=(C2+B3)*1,0205$$

Kopioidaan kaavaa
alaspäin

Tilillä on rahaa 10. vuoden lopussa 14 559,70 euroa.

Vastaus

a) 4942,96 €

b) 14 559,70 €

6.6

Tilin nettokorkokanta on $0,70 \cdot 1,25 \% = 0,875 \%$. Pääoma kasvaa vuosittain 1,00875-kertaiseksi.

Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla.

Kirjoitetaan sarakkeeseen A talletusvuoden järjestysluku ja sarakkeeseen B vuoden alussa tehtävä talletus. Lasketaan sarakkeeseen C vuoden lopussa tilillä oleva pääoma.

	A	B	C
1	Vuosi	Talletus (€)	Pääoma vuoden lopussa (€)
2	1	200	201,75
3	2	200	405,27
4	3	200	610,56
5	4	200	817,65
6	5	200	1026,56
7	6	200	1237,29
8	7	200	1449,87
9	8	200	1664,30
10	9	200	1880,62
11	10	200	2098,82
12	11	200	2318,94
13	12	200	2540,98
14	13	200	2764,96
15	14	200	2990,90
16	15	200	3218,82

=B2*1,00875
=(C2+B3)*1,00875
Kopioidaan kaavaa
alaspäin

- a) Tilillä on rahaa 8. vuoden lopussa 1664,30 euroa.
- b) Tilin pääoma ylittää 3000 euroa 15. vuoden lopussa.

Vastaus

- a) 1664,30 € b) 15. vuoden

6.7

Pitää laskea stipendien nykyarvot. Myönnettyjen stipendien yhteenlasketun nykyarvon tulee olla yhtä suuri kuin lahjoitettu rahamäärä 4000 euroa.

Merkitään yhden stipendin suuruutta kirjaimella x .

Ensimmäisen, vuoden kuluttua jaettavan stipendin, nykyarvo on $x \cdot 1,045^{-1}$.

Kahden vuoden kuluttua jaettavan stipendin nykyarvo on $x \cdot 1,045^{-2}$.
Viimeisen, 20 vuoden kuluttua jaettavan stipendin, nykyarvo on $x \cdot 1,045^{-20}$.

Kaikkien stipendien nykyarvojen summa on $x \cdot 1,045^{-1} + x \cdot 1,045^{-2} + \dots + x \cdot 1,045^{-20}$.

Summa on geometrinen summa, jossa yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 20$, ensimmäisen yhteenlaskettava $a_1 = x \cdot 1,045^{-1}$ ja suhdeluku $q = 1,045^{-1}$.

Summan arvo on

$$\begin{aligned} S_{20} &= \frac{x \cdot 1,045^{-1} \cdot (1 - (1,045^{-1})^{20})}{1 - 1,045^{-1}} & S_n &= \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \\ &= \frac{x \cdot 1,045^{-1} \cdot (1 - 1,045^{-20})}{1 - 1,045^{-1}} \end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan stipendin suuruus x .

$$\frac{x \cdot 1,045^{-1} \cdot (1 - 1,045^{-20})}{1 - 1,045^{-1}} = 4000 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x \approx 307,50 \text{ (€)}$$

Stipendin suuruus voi olla 300 euroa.

Vastaus

300 €

6.8

- a) Tilin nettokorkokanta on 3,0 %. Pääoma kasvaa vuosittain 1,03-kertaiseksi.

Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 15 vuotta, toinen talletus 14 vuotta ja niin edelleen. Viimeinen talletus kasvaa korkoa 1 vuoden.

Lasketaan, kuinka paljon tilillä on rahaa 15. vuoden lopussa.

$$\begin{aligned} & 500 \cdot 1,03^{15} + 500 \cdot 1,03^{14} + \dots + 500 \cdot 1,03^2 + 500 \cdot 1,03^1 \\ &= 500 \cdot 1,03^1 + 500 \cdot 1,03^2 + \dots + 500 \cdot 1,03^{14} + 500 \cdot 1,03^{15} \end{aligned}$$

Kyseessä on geometrinen summa, jossa ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 500 \cdot 1,003$, yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 15$ ja suhdeluku $q = 1,03$. Lasketaan summan arvo.

$$\begin{aligned} S_{15} &= \frac{500 \cdot 1,03 \cdot (1 - 1,03^{15})}{1 - 1,03} & S_n &= \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \\ &\approx 9578,44 \text{ (€)} \end{aligned}$$

Tilin pääoma 15. vuoden lopussa on 9578,44 euroa.

b) Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla.

Kirjoitetaan sarakkeeseen A talletusvuoden järjestysluku ja sarakkeeseen B vuoden alussa tehtävä talletus. Lasketaan sarakkeeseen C vuoden lopussa tilillä oleva pääoma.

	A	B	C
1	Vuosi	Talletus (€)	Pääoma vuoden lopussa (€)
2	1	500	515,00
3	2	500	1045,45
4	3	500	1591,81
5	4	500	2154,57
6	5	500	2734,20
7	6	500	3331,23
8	7	500	3946,17
9	8	500	4579,55
10	9	500	5231,94
11	10	500	5903,90
12	11	500	6596,01
13	12	500	7308,90
14	13	500	8043,16
15	14	500	8799,46
16	15	500	9578,44

=B2*1,03

=(C2+B3)*1,03

Kopioidaan kaavaa
alaspäin

Tilin pääoma 15. vuoden lopussa on 9578,44 euroa.

Vastaus

9578,44 €

6.9

a) Merkitään ensimmäisen vuoden summaa kirjaimella x .

Jaettava summa kasvaa joka vuosi 10 %:lla, joten summa tulee joka vuosi 1,1-kertaiseksi.

Kaikkien jaettavien summien yhteenlaskettu arvo on

$$x + x \cdot 1,1 + x \cdot 1,1^2 + \dots + x \cdot 1,1^6.$$

Summa on geometrinen summa, jossa ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = x$, yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 7$ ja suhdeluku $q = 1,1$.

Summan arvo on

$$S_7 = \frac{x \cdot (1 - 1,1^7)}{1 - 1,1}.$$

Ratkaistaan, millä x :n arvolla summan arvo on 800 000 euroa.

$$\frac{x \cdot (1 - 1,1^7)}{1 - 1,1} = 800\,000 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x \approx 84\,324,40 \text{ (€)}$$

Ensimmäisenä vuonna jaettavan summan tulee olla 84 324,40 €.

- b) Merkitään vuotuista kasvukerrointia kirjaimella q . Koska ensimmäisenä vuotena jaettava summa on 70 000 euroa, seitsemän vuoden aikana jaettavien summien yhteisarvo on a-kohdan perusteella

$$S_7 = \frac{70\,000 \cdot (1 - q^7)}{1 - q}.$$

Ratkaistaan, millä q :n arvolla summan arvo on 800 000 euroa.

$$\frac{70\,000 \cdot (1 - q^7)}{1 - q} = 800\,000$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$q \approx -1,62 \quad \text{tai} \quad q \approx 1,16$$

Kasvukerroin on positiivinen luku, joten $q \approx 1,16$.

Vuotuisen kasvuprosentin pitää olla 16 %.

Vastaus

a) 84 324,40 €

b) 16 %

6.10

Tilin vuotuinen nettokorkokanta on $0,7 \cdot 0,6 \% = 0,42 \%$.

Lasketaan ensin, kuinka suureksi mummon lahjoittama 700 € kasvaa vuoden aikana tilillä.

$$700 \cdot 1,0042 = 702,94 \text{ (€)}$$

Allun tulee siis säästää $1800 - 702,94 = 1097,06 \text{ (€)}$.

Merkitään kuukausittaisen talletuksen suuruutta kirjaimella x .

Allu tallettaa tilille yhteensä $11x$ euroa.

Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 11 kuukautta, toinen 10 kuukautta ja niin edelleen. Viimeinen talletus kasvaa korkoa 1 kuukauden.

Lasketaan, kuinka paljon korkoa kertyy yhteensä.

$$\begin{aligned} & x \cdot 0,0042 \cdot \frac{11}{12} + x \cdot 0,0042 \cdot \frac{10}{12} + \dots + x \cdot 0,0042 \cdot \frac{1}{12} \\ &= x \cdot 0,0042 \cdot \frac{1}{12} (11 + 10 + \dots + 1) \\ &= x \cdot 0,0042 \cdot \frac{1}{12} 11 \cdot \frac{11+1}{2} \\ &= x \cdot 0,0042 \cdot \frac{1}{12} \cdot 66 \end{aligned}$$

Ratkaistaan, millä kuukausittaisen talletuksen x arvolla, talletusten yhteisarvo vuoden lopussa on 1097,06 euroa.

$$11x + x \cdot 0,0042 \cdot \frac{1}{12} \cdot 66 = 1097,06 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x \approx 99,52 \text{ (€)}$$

Allun tulee säästää kuukausittain 99,52 euroa.

Vastaus

99,52 €

6.11

- a) Monna tallettaa tilille rahaa yhteensä $12 \cdot 175 \text{ €} = 2100 \text{ €}$.

Lasketaan tilin nettokorkokanta.

$$0,70 \cdot 1,15 \% = 0,805 \% \quad \begin{array}{l} \text{Lähdevero } 30 \% \\ 100 \% - 30 \% = 70 \% = 0,70 \end{array}$$

Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 12 kuukautta, toinen talletus 11 kuukautta ja niin edelleen. Viimeinen talletus kasvaa korkoa 1 kuukauden.

Lasketaan, kuinka paljon korkoa kertyy yhteensä.

$$\begin{aligned} & 175 \cdot 0,00805 \cdot \frac{12}{12} + 175 \cdot 0,00805 \cdot \frac{11}{12} + \dots + 175 \cdot 0,00805 \cdot \frac{1}{12} \\ &= 175 \cdot 0,00805 \cdot \frac{1}{12} \cdot (12 + 11 + \dots + 1) \end{aligned}$$

Sulkeissa on aritmeettinen summa, jossa yhteenlaskettavien lukumäärä on $n = 12$, ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 12$ ja viimeinen yhteenlaskettava $a_{12} = 1$. Lasketaan summan arvo.

$$S_{12} = 12 \cdot \frac{12+1}{2} = 78 \qquad S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Lasketaan kertyvän koron määrä.

$$175 \cdot 0,00805 \cdot \frac{1}{12} \cdot (12 + 11 + \dots + 1) = 175 \cdot 0,00805 \cdot \frac{1}{12} \cdot 78 \approx 9,16 \text{ (€)}$$

Vuoden lopussa koron maksamisen jälkeen tilin pääoma on

$$2100 \text{ €} + 9,16 \text{ €} = 2109,16 \text{ €}$$

b) Merkitään kuukausittaisen talletuksen suuruutta kirjaimella x .

a-kohdan perusteella tilillä on rahaa vuoden lopussa

$$12x + x \cdot 0,00805 \cdot \frac{1}{12} \cdot 78 \text{ (€)}.$$

Ratkaistaan, kuinka suurella kuukausittaisella talletuksella x tilillä on vuoden lopussa rahaa 2000 €.

$$12x + x \cdot 0,00805 \cdot \frac{1}{12} \cdot 78 = 2000 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x \approx 166 \text{ (€)}$$

Kuukausittaisen talletuksen tulisi olla 166 euroa.

Vastaus

a) 2109,16 €

b) 166 €

6.12

- a) Vakuutuksen nettokorkokanta on 4,0 %. Pääoma kasvaa vuosittain 1,04-kertaiseksi.

Ensimmäinen sijoitus kasvaa korkoa $2035 - 2019 = 16$ vuotta, toinen sijoitus 15 vuotta ja niin edelleen. Viimeinen sijoitus kasvaa korkoa 1 vuoden.

Lasketaan, kuinka paljon tilillä on rahaa vuoden 2035 lopussa.

$$700 \cdot 1,04^{16} + 700 \cdot 1,04^{15} + \dots + 700 \cdot 1,04^2 + 700 \cdot 1,04^1 \\ = 700 \cdot 1,04^1 + 700 \cdot 1,04^2 + \dots + 700 \cdot 1,04^{15} + 700 \cdot 1,04^{16}$$

Kyseessä on geometrinen summa, jossa ensimmäinen yhteenlaskettava

$a_1 = 700 \cdot 1,04^1$, yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 16$ ja suhdeluku $q = 1,04$. Lasketaan summan arvo.

$$S_{16} = \frac{700 \cdot 1,04 \cdot (1 - 1,04^{16})}{1 - 1,04} \qquad S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \\ \approx 15\,888 \text{ (€)}$$

Pääoma vuoden 2035 lopussa on 15 888 euroa.

- b) Merkitään vuotuisen sijoituksen suuruutta kirjaimella x .

a-kohdan perusteella Samulin sijoituksen pääoma vuoden 2035 lopussa on

$$\frac{x \cdot 1,04 \cdot (1 - 1,04^{16})}{1 - 1,04}.$$

Ratkaistaan, kuinka suurella vuotuisella sijoituksella x pääoma vuoden 2035 lopussa on 20 000 €.

$$\frac{x \cdot 1,04 \cdot (1 - 1,04^{16})}{1 - 1,04} = 20\,000 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ x \approx 881,15 \text{ (€)}$$

Pääoma on 20 000 €, jos vuotuinen sijoitus on 882 €.

Vastaus

a) 15 888 €

b) 882 €

6.13

Tilin nettokorkokanta on $0,70 \cdot 1,75 \% = 1,225 \%$. Pääoma kasvaa vuosittain 1,01225-kertaiseksi.

Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla.

Kirjoitetaan sarakkeeseen A talletusvuoden järjestysluku ja sarakkeeseen B vuoden alussa tehtävä talletus. Lasketaan sarakkeeseen C vuoden lopussa tilillä oleva pääoma.

	A	B	C
1	Vuosi	Talletus (€)	Pääoma vuoden lopussa (€)
2	1	800	809,80
3	2	800	1629,52
4	3	800	2459,28
5	4	800	3299,21
...
19	18	800	16 198,04
20	19	800	17 206,27
21	20	800	18 226,85
22	21	800	19 259,93
23	22	800	20 305,66

=B2*1,01225

=(C2+B3)*1,01225

Kopioidaan kaavaa
alaspäin

a) Tilillä on rahaa 20. vuoden lopussa 18 226,85 euroa.

b) Tilin pääoma ylittää 20 000 euroa 22. vuoden lopussa.

Vastaus

a) 18 226,85€ b) 22. vuoden

6.14

Pitää laskea palkintojen nykyarvot. Myönnettyjen palkintojen yhteenlasketun nykyarvon tulee olla yhtä suuri kuin lahjoitettu rahamäärä 15 000 euroa.

Merkitään yhden palkinnon suuruutta kirjaimella x .

Ensimmäisen, vuoden kuluttua jaettavan palkinnon, nykyarvo on $x \cdot 1,028^{-1}$.

Kahden vuoden kuluttua jaettavan palkinnon nykyarvo on $x \cdot 1,028^{-2}$.

Viimeisen, 25 vuoden kuluttua jaettavan palkinnon, nykyarvo on $x \cdot 1,028^{-25}$.

Kaikkien palkintojen nykyarvojen summa on

$$x \cdot 1,028^{-1} + x \cdot 1,028^{-2} + \dots + x \cdot 1,028^{-25}.$$

Summa on geometrinen summa, jossa yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 25$, ensimmäisen yhteenlaskettava $a_1 = x \cdot 1,028^{-1}$ ja suhdeluku $q = 1,028^{-1}$.

Summan arvo on

$$\begin{aligned} S_{25} &= \frac{x \cdot 1,028^{-1} \cdot (1 - (1,028^{-1})^{25})}{1 - 1,028^{-1}} & S_n &= \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \\ &= \frac{x \cdot 1,028^{-1} \cdot (1 - 1,028^{-25})}{1 - 1,028^{-1}} \end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan palkinnon suuruus x .

$$\frac{x \cdot 1,028^{-1} \cdot (1 - 1,028^{-25})}{1 - 1,028^{-1}} = 15\,000 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x \approx 842,33 \text{ (€)}$$

Palkinnon suuruus voi olla 840 euroa.

Vastaus

840 €

6.15

- a) Sekajätteen määrä vähenee joka vuosi 2,5 %, joten jätemäärä on aina $100 \% - 2,5 \% = 97,5 \%$ edellisen vuoden määrästä. Jätemäärä tulee siis joka vuosi 0,975-kertaiseksi.

Lasketaan seuraavan kymmenen vuoden aikana kertynyt jätemäärä.

$$42 \cdot 0,975 + 42 \cdot 0,975^2 + 42 \cdot 0,975^3 + \dots + 42 \cdot 0,975^{10}$$

Summa on geometrinen summa, jonka ensimmäisen yhteenlaskettava $a_1 = 42 \cdot 0,975$, yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 10$ ja suhdeluku $q = 0,975$. Lasketaan summan arvo.

$$S_{10} = \frac{42 \cdot 0,975 \cdot (1 - 0,975^{10})}{1 - 0,975} \approx 366,37 \text{ (t)}$$

Jätettä kertyy yhteensä 370 tonnia.

- b) Lasketaan, kuinka paljon sekajätettä kertyisi, jos määrä kasvaisi joka vuosi 1,8 %. Tällöin määrä tulisi joka vuosi 1,018-kertaiseksi.

Seuraavan kymmenen vuoden aikana kertynyt jätemäärä olisi

$$42 \cdot 1,018 + 42 \cdot 1,018^2 + 42 \cdot 1,018^3 + \dots + 42 \cdot 1,018^{10}$$

Summa on geometrinen summa, jonka ensimmäisen yhteenlaskettava $a_1 = 42 \cdot 1,018$, yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 10$ ja suhdeluku $q = 1,018$. Lasketaan summan arvo.

$$S_{10} = \frac{42 \cdot 1,018 \cdot (1 - 1,018^{10})}{1 - 1,018} \approx 463,91 \text{ (t)}$$

Jätettä kertyisi $463,91 - 366,37 = 97,54 \approx 98$ tonnia enemmän.

Vastaus

- a) 370 tonnia
b) 98 tonnia

6.16

Vuosiansiot nousevat 1,8 % vuodessa, joten ansiot tulevat joka vuosi 1,018-kertaisiksi.

Ensimmäisenä vuotena ansiot ovat 35 000 €.

Ansiot muodostavat geometrisen jonon, jonka suhdeluku $q = 1,018$. Lasketaan tämän lukujonon 40. jäsen.

$$a_{40} = 35\,000 \cdot 1,018^{39} \qquad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$\approx 70\,000 \text{ (€)}$$

Vuosiansiot muodostavat geometrisen summan, jonka ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 35\,000$, yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 40$ ja suhdeluku $q = 1,018$. Lasketaan summan arvo.

$$S_{40} = \frac{35\,000 \cdot (1 - 1,018^{40})}{1 - 1,018} \qquad S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$
$$\approx 2\,025\,000 \text{ (€)}$$

Vastaus

viimeisenä työvuotena 70 000 €,
yhteensä työuran aikana 2 025 000 €

6.17

a) Merkitään kuukausien lukumäärää kirjaimella n .

Luoton kuukausikorko on $\frac{14,70\%}{12} = 1,225\%$. Pääoma tulee siis joka kuukausi 1,01225-kertaiseksi.

Ensimmäisen kuukauden pääoma kasvaa korkoa n kuukautta, toinen $n - 1$ kuukautta ja niin edelleen. Viimeisen kuukauden pääoma ei ehdi kasvamaan lainkaan korkoa. Lasketaan pääomien yhteisarvo n kuukauden kuluttua.

$$150 \cdot 1,01225^n + 150 \cdot 1,01225^{n-1} + \dots + 150 \cdot 1,01225^1 + 150 \\ = 150 + 150 \cdot 1,01225^1 + \dots + 150 \cdot 1,01225^{n-1} + 150 \cdot 1,01225^n$$

Summa on geometrinen summa, jossa ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 150$, yhteenlaskettavien lukumäärä on $n + 1$ ja suhdeluku $q = 1,01225$. Summan arvo on

$$S_n = \frac{150 \cdot (1 - 1,01225^n)}{1 - 1,01225}.$$

Ratkaistaan, millä n :n arvolla summan arvo on 2000 euroa.

$$\frac{150 \cdot (1 - 1,01225^n)}{1 - 1,01225} = 2000$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$n \approx 12,42 \text{ (kk)}$$

Luottokortin luottoraja tulee täyteen 13 kuukauden jälkeen.

b) Merkitään kuukausittaisen maksuerän suuruutta kirjaimella x .

Ensimmäisen kuukauden jälkeen luoton määrä on
 $(2000 - x) \cdot 1,01225 = 2000 \cdot 1,01225 - x \cdot 1,01225$.

Toisen kuukauden jälkeen
 $(2000 \cdot 1,01225 - x \cdot 1,01225 - x) \cdot 1,01225$
 $= 2000 \cdot 1,01225^2 - x \cdot 1,01225^2 - x \cdot 1,01225$.

Kolmannen kuukauden jälkeen
 $(2000 \cdot 1,01225^2 - x \cdot 1,01225^2 - x \cdot 1,01225 - x) \cdot 1,01225$
 $= 2000 \cdot 1,01225^3 - x \cdot 1,01225^3 - x \cdot 1,01225^2 - x \cdot 1,01225$.

Ja niin edelleen. Kun aikaa on kulunut 24 kuukautta, luoton määrä on
 $2000 \cdot 1,01225^{24} - x \cdot 1,01225^{24} - x \cdot 1,01225^{23} - \dots - x \cdot 1,01225$
 $= 2000 \cdot 1,01225^{24} - (x \cdot 1,01225^{24} + x \cdot 1,01225^{23} + \dots + x \cdot 1,01225)$

Kun sulkeissa olevaa summaa tarkastellaan lopusta alkuun, havaitaan sen olevan geometrinen summa, jossa ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = x \cdot 1,01225$, yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 24$ ja suhdeluku $q = 1,01225$. Sievennetään lauseketta.

$$2000 \cdot 1,01225^{24} - (x \cdot 1,01225^{24} + x \cdot 1,01225^{23} + \dots + x \cdot 1,01225) \\ = 2000 \cdot 1,01225^{24} - \left(\frac{x \cdot 1,01225 \cdot (1 - 1,01225^{24})}{1 - 1,01225} \right)$$

Ratkaistaan, millä kuukausittaisella maksulla x luoton määrä on 24 kuukauden kuluttua 0 euroa.

$$2000 \cdot 1,01225^{24} - \left(\frac{x \cdot 1,01225 \cdot (1 - 1,01225^{24})}{1 - 1,01225} \right) = 0$$

[Ratkaistaan](#)
[CAS-laskimella.](#)
 $x \approx 95,52 \text{ (€)}$

Kuukausittaisen maksun tulisi olla 96 euroa.

Vastaus

a) 13 kuukauden

b) 96 €

6.18

Merkitään vuoden 2014 louhintamäärää kirjaimella a . Jos joka vuosi louhittaisiin sama määrä, louhittavaa riittäisi 50 vuodeksi. Koko kaivoksesta louhittava määrä on siis $50a$.

Louhintaa lisätään vuosittain 2,5 %, joten louhintamäärä kasvaa joka vuosi 1,0125-kertaiseksi. Siis vuonna 2015 louhintamäärä on $a \cdot 1,025$, vuonna 2016 louhintamäärä on $a \cdot 1,025^2$ ja niin edelleen. Louhintamäärät muodostavat geometrisen jonon, jossa ensimmäinen jäsen $a_1 = a \cdot 1,025$ ja suhdeluku $q = 1,025$.

Kun aikaa kuluu n vuotta, on louhintamäärä yhteensä jonon n :n ensimmäisen jäsenen summa

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a \cdot 1,025 \cdot (1 - 1,025^n)}{1 - 1,025}.$$

Ratkaistaan, kuinka monen vuoden kuluttua louhintamäärä yhteensä on $50a$.

$$\frac{a \cdot 1,025 \cdot (1 - 1,025^n)}{1 - 1,025} = 50a \quad | : a \text{ (} \neq 0 \text{)}$$

$$\frac{1,025 \cdot (1 - 1,025^n)}{1 - 1,025} = 50$$

$$n \approx 32,3 \text{ (v)}$$

Louhittava kiliviili loppuu vuonna $2015 + 32,3 = 2047,3$
eli vuoden 2047 aikana

Vastaus

vuoden 2047 aikana

6.19

Tehtävä pitää laskea kahdessa osassa.

- 1) Lasketaan vuoden aikana tehtävien sijoitusten ja maksettavan koron yhteismäärä.
- 2) Lasketaan vuosittain kertyvän pääoman suuruus, kun se kasvaa korkoakorolle kuudennen vuoden loppuun saakka.

- 1) Pasi sijoittaa vuoden aikana yhteensä $12 \cdot 100 \text{ €} = 1200 \text{ €}$.

Ensimmäinen sijoitus kasvaa korkoa 12 kuukautta, toinen 11 kuukautta ja niin edelleen. Viimeinen sijoitus kasvaa korkoa 1 kuukauden. Lasketaan, kuinka paljon korkoa kertyy yhteensä.

$$\begin{aligned} & 100 \cdot 0,05 \cdot \frac{12}{12} + 100 \cdot 0,05 \cdot \frac{11}{12} + \dots + 100 \cdot 0,05 \cdot \frac{1}{12} \\ &= 100 \cdot 0,05 \cdot \frac{1}{12} \cdot (12 + 11 + \dots + 1) && \text{Sulkeissa} \\ & && \text{aritmeettinen summa.} \\ &= 100 \cdot 0,05 \cdot \frac{1}{12} \cdot 12 \cdot \frac{12+1}{2} \\ &= 100 \cdot 0,05 \cdot \frac{1}{12} \cdot 78 = 32,50 \text{ (€)} \end{aligned}$$

Yhden vuoden pääoma korkoineen on $1200 \text{ €} + 32,50 \text{ €} = 1232,50 \text{ €}$.

- 2) Ensimmäisen vuoden pääoma kasvaa korkoa 5 vuotta, toisen vuoden 4 vuotta ja niin edelleen. Viimeisen vuoden pääoma ei kasva enää korkoa.

Lasketaan sijoituksen arvo kuudennen vuoden lopussa.

$$1232,50 \cdot 1,05^5 + 1232,50 \cdot 1,05^4 + \dots + 1232,50 \cdot 1,05 + 1232,50$$

$$= 1232,50 \cdot (1 + 1,05 + \dots + 1,05^5)$$

Sulkeissa
geometrinen summa.

$$= 1232,50 \cdot \frac{1 \cdot (1 - 1,05^6)}{1 - 1,05}$$

$$\approx 8383,36 \text{ (€)}$$

Vastaus

8383,36 €

6.20

a) Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla.

Kirjoitetaan sarakkeeseen A vuoden järjestysluku.

Kirjoitetaan soluun B2 pääoman alkuarvo 1,7 miljoonaa euroa.

Lasketaan sarakkeeseen C tuotto. Tuotosta 20 % lisätään pääomaan.

Lasketaan sarakkeeseen B pääoman arvo vuoden alussa.

	A	B	C
1	Vuosi	Pääoma	Tuotto
2	1	1 700 000	76 500
3	2	1 715 300	77 189
4	3	1 730 738	77 883
5	4	1 746 314	78 584
6	5	1 762 031	79 291
7	6	1 777 889	80 005
8	7	1 793 890	80 725
9	8	1 810 035	81 452
10	9	1 826 326	82 185
11	10	1 842 763	82 924
12	11	1 859 348	83 671

$$=0,8*B2$$

$$=B2+0,2*C2$$

Huomaa, että tehtävän voi ratkaista taulukkolaskennalla monella eri tavalla.

Kymmenen vuoden kuluttua eli 11. vuoden alussa säätiön pääoma on 1,9 miljoonaa euroa.

- b) Sijoitus kasvaa korkoa 4,5 % vuodessa ja tuotosta pääomaan lisätään 20 %. Sijoituksen nettokorkokanta on siis $0,20 \cdot 4,5 \% = 0,9 \%$. Pääoma kasvaa siis joka vuosi 1,009-kertaiseksi.

Pääomat muodostavat geometrisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen $a_1 = 1\,700\,000$ ja suhdeluku $q = 1,009$. Ensimmäinen jäsen ilmaisee pääoman tällä hetkellä, joten 11. jäsen ilmaisee pääoman 10 vuoden kuluttua.

$$a_{11} = 1\,700\,000 \cdot 1,009^{10} \qquad a_n = a_1 q^{n-1}$$
$$\approx 1\,859\,348 \text{ (€)}$$

Vastaus

1,9 miljoonaa euroa

6.21

- a) Kirjoitetaan lukujonon alkupään jäseniä näkyviin, jotta voidaan päätellä yleisen jäsenen lauseke.

Ensimmäisen vuoden alussa populaation koko on

$$a_1 = 2000$$

Toisen vuoden alussa populaation koko on

$$a_2 = 2000 \cdot 1,08 + 40.$$

Kolmannen vuoden alussa populaation koko on

$$\begin{aligned} a_3 &= (2000 \cdot 1,08 + 40) \cdot 1,08 + 40 \\ &= 2000 \cdot 1,08^2 + 40 \cdot 1,08 + 40. \end{aligned}$$

Neljännän vuoden alussa populaation koko on

$$\begin{aligned} a_4 &= (2000 \cdot 1,08^2 + 40 \cdot 1,08 + 40) \cdot 1,08 + 40 \\ &= 2000 \cdot 1,08^3 + 40 \cdot 1,08^2 + 40 \cdot 1,08 + 40. \end{aligned}$$

Voidaan päätellä, että n :nnen vuoden alussa populaation koko on

$$\begin{aligned} a_n &= 2000 \cdot 1,08^{n-1} + 40 \cdot 1,08^{n-2} + 40 \cdot 1,08^{n-3} + \dots + 40 \cdot 1,08 + 40 \\ &= 2000 \cdot 1,08^{n-1} + \underbrace{(40 + 40 \cdot 1,08 + \dots + 40 \cdot 1,08^{n-2} + 40 \cdot 1,08^{n-2})}_{\text{geom. summa, } q=1,08, \text{ } n-1 \text{ termiä}} \\ &= 2000 \cdot 1,08^{n-1} + \frac{40 \cdot (1 - 1,08^{n-1})}{1 - 1,08} \text{ Sievennetään CAS-laskimella.} \\ &= 2500 \cdot 1,08^{n-1} - 500. \end{aligned}$$

Huomaa, että myös sieventämätön muoto käy vastaukseksi.

b) Ratkaistaan, minkä vuoden alussa populaatio on 4000 jäsentä.

$$a_n = 4000$$

Sijoitetaan a_n :n lauseke.

(Sijoita saamasi muoto.)

$$2500 \cdot 1,08^{n-1} - 500 = 4000$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$n \approx 8,64$$

Koska populaatio kasvaa joka vuosi, on 9. vuosi ensimmäinen, jonka alussa populaatio on suurempi kuin 4000 jäsentä.

Vastaus

$$\text{a) } a_n = 2000 \cdot 1,08^{n-1} + \frac{40 \cdot (1 - 1,08^{n-1})}{1 - 1,08}$$

$$= 2500 \cdot 1,08^{n-1} - 500.$$

b) 9. vuoden alussa

6.22

a) Jonon rekursiosääntö on

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = 1,05a_{n-1} - h, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

Muodostetaan jonon alkupään jäseniä, jotta voidaan päätellä yleisen jäsenen lauseke.

$$a_1 = a$$

$$a_2 = 1,05a - h$$

$$a_3 = 1,05 \cdot (1,05a - h) - h = 1,05^2 a - 1,05h - h$$

$$a_4 = 1,05 \cdot (1,05^2 a - 1,05h - h) - h = 1,05^3 a - 1,05^2 h - 1,05h - h$$

Voidaan päätellä, että lukujonon n :s jäsen on

$$\begin{aligned} a_n &= 1,05^{n-1}a - 1,05^{n-2}h - 1,05^{n-3}h - \dots - 1,05h - h \\ &= 1,05^{n-1}a - \underbrace{(h + 1,05h + \dots + 1,05^{n-3}h + 1,05^{n-2}h)}_{\text{geom. summa, jossa } q=1,05, \text{ jäseniä } n-1 \text{ kpl}} \\ &= 1,05^{n-1}a - \frac{h \cdot (1 - 1,05^{n-1})}{1 - 1,05} \\ &= 1,05^{n-1}a - 20(1,05^{n-1} - 1)h. \end{aligned}$$

- b) Lasketaan pääoma kymmenennen vuoden alussa.

$$a_{10} = 1,05^9 \cdot \underbrace{100\,000}_a - 20 \cdot (1,05^9 - 1) \cdot \underbrace{10\,000}_h$$

$$\approx 44\,867,18 \text{ (€)}$$

Ratkaistaan, minkä vuoden alussa pääoma on 0 euroa.

$$a_n = 0$$

$$1,05^{n-1} \cdot \underbrace{100\,000}_a - 20 \cdot (1,05^{n-1} - 1) \cdot \underbrace{10\,000}_h = 0$$

Ratkaistaan
CAS-laskimella.

$$n \approx 15,21$$

Koska pääoma pienenee koko ajan, vakuutus tyhjenee 16. vuoden alussa.

- c) Rahat riittävät tasan 25 eläkevuodeksi, jos 25. vuoden alussa vuotuisen noston jälkeen pääoma on 0 euroa.

$$a_{25} = 0$$

$$1,05^{24} \cdot 100\,000 - 20 \cdot (1,05^{24} - 1) \cdot h = 0$$

Ratkaistaan
CAS-laskimella.

$$h \approx 7247,09 \text{ (€)}$$

- d) Rahat riittävät tasan 25 eläkevuodeksi, jos 25. vuoden alussa vuotuisen noston jälkeen pääoma on 0 euroa.

$$a_{25} = 0$$

$$1,05^{24} \cdot a - 20 \cdot (1,05^{24} - 1) \cdot 10\,000 = 0$$

Ratkaistaan
CAS-laskimella.

$$h \approx 137\,986,42 \text{ (€)}$$

Vastaus

$$\text{a) } \begin{cases} a_1 = a \\ a_n = 1,05a_{n-1} - h, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

$$a_n = 1,05^{n-1}a - 20(1,05^{n-1} - 1)h$$

b) 44 876,18 €; 16. vuonna

c) 7247,09 €

d) 137 986,42 €