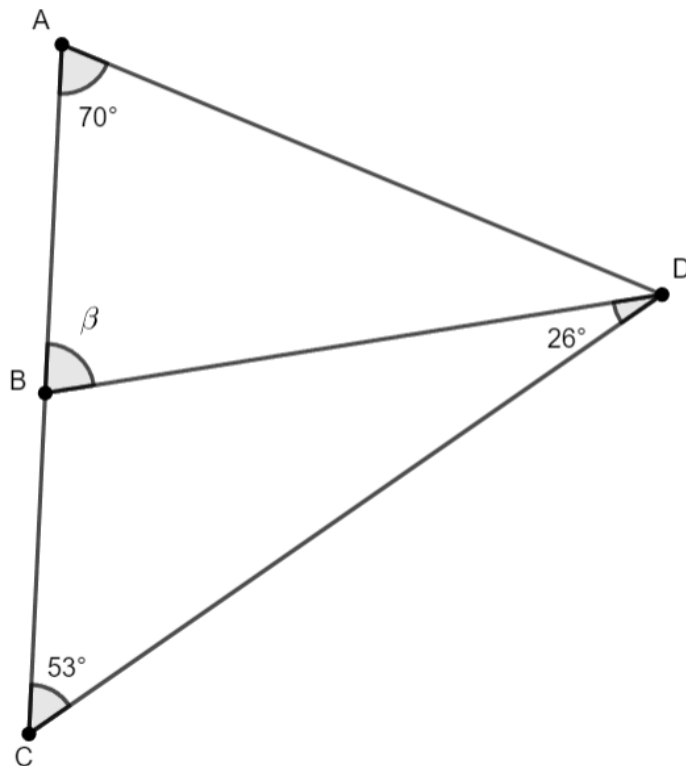


Tehtävä 1

1.1	Vastaus: 60 astetta (Perustelu: Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat yhtä suuria, $\alpha=180^\circ/3=60^\circ$)	1p
1.2	Vastaus: 51 astetta (Perustelu: Tasakylkisen kolmion kantakulmat yhtä suuret, $\gamma=(180^\circ-78^\circ)/2=51^\circ$)	1p
1.3	Vastaus: 115 astetta (Perustelu: Suunnikkassa vastakkaiset kulmat yhtä suuria)	2p
1.4	Vastaus: 237 astetta (Perustelu: Tangenttikulman ja sitä vastaavan keskuskulman summa 180° . Keskuskulman suuruus $180^\circ-57^\circ=123^\circ$. Täten $\beta=360^\circ-123^\circ=237^\circ$)	2p

1.5 Määritä kulman β suuruus. Perustele vastauksesi.

3 p.



Kolmiosta BCD tiedetään kahden kulman suuruudet. Lasketaan kulman CBD suuruus:

$$\angle CBD = 180^\circ - 53^\circ - 26^\circ = 101^\circ$$

Kulma β on kulman CBD vieruskulma. Lasketaan kulman β suuruus:

$$\beta = 180^\circ - \angle CBD = 180^\circ - 101^\circ = 79^\circ$$

TAI

Kolmiosta ACD tiedetään kahden kulman suuruudet. Lasketaan kulman ADC suuruus:

$$\angle ADC = 180^\circ - 70^\circ - 53^\circ = 57^\circ$$

Lasketaan kulman ADB suuruus:

$$\angle ADB = \angle ADC - \angle BDC = 57^\circ - 26^\circ = 31^\circ$$

Kolmiosta ABD tiedetään kahden kulman suuruudet. Lasketaan kulman β suuruus:

$$\beta = 180^\circ - 70^\circ - 31^\circ = 79^\circ$$

Vastaus: $\beta = 79^\circ$

Vastauksen pituus: 300 merkkiä.

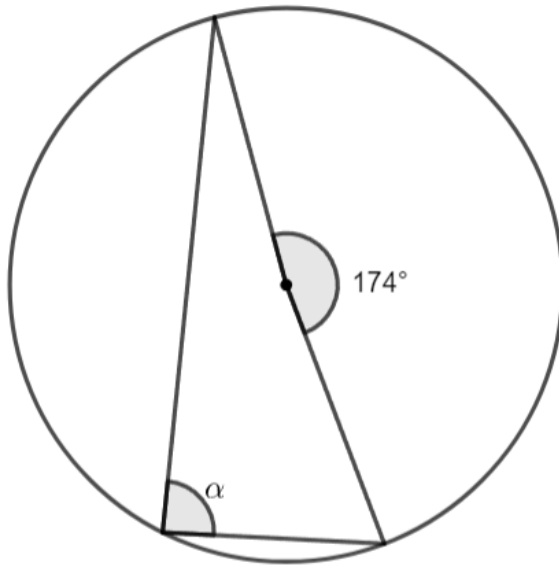
Pisteytys

Kulman CBD ratkaiseminen oikein	1 p
Kulma β kulman CBD vieruskulma	1 p
Kulman β ratkaiseminen oikein	1 p

TAI

Kulman ADC ratkaiseminen oikein	1 p
Kulman ADB ratkaiseminen oikein	1 p
Kulman β ratkaiseminen oikein	1 p

1.6 Ratkaise kulman α suuruus. Perustele vastauksesi. 3 p.



174°:n keskuskulma ja kehäkulma α ovat samaa kaarta vastaavat kehäkulma ja keskuskulma. Kehäkulmalauseen nojalla kehäkulma on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta. Lasketaan kulman α suuruus:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot 174^\circ = 87^\circ$$

Vastaus: $\alpha=87^\circ$

Vastauksen pituus: 190 merkkiä.

Pisteytys

Kehäkulma vastaa samaa kaarta kuin tunnettu keskuskulma	1 p
Kehäkulmalauseen nojalla kehäkulma puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta	1 p
Oikein laskettu kulma	1 p

Tehtävä 2

2.1 Laske pienimmän pyramidin tilavuus. (3p)

Pyramidi on kartio ja kartion tilavuus voidaan laskea kaavasta $V = \frac{1}{3}A_p h$, missä A_p on pyramidin pohjan pinta-ala ja h pyramidin korkeus. Pyramidin tilavuuden laskemiseksi tarvitaan pyramidin pohjan pinta-ala A_p . Pienimmän pyramidin pohja on neliö, jonka särmän pituus on 3,0cm, joten:

$$A_{p1} = (3,0\text{cm})^2 = 9,0\text{cm}^2$$

Lasketaan pienimmän pyramidin tilavuus V_1 :

$$V_1 = \frac{1}{3}A_{p1}h_1$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot 9,0 \cdot 5,0$$

$$V_1 = 15\text{cm}^3$$

Vastaus: $V_1=15\text{cm}^3$

Pisteytys

Pohjan pinta-ala laskettu oikein.	1 p
Käytetty kartion tilavuuden kaavaa.	1 p
Sijoitettu arvot oikein ja saatu oikea vastaus.	1 p

2.2 Laske keskikokoisen pyramidin tilavuus. (5p)

Keskikokoisen pyramidin pohjan pinta-ala $A_{p2}=81\text{cm}^2$ ja pienimmän pyramidin pohjan pinta-ala $A_{p1}=9,0\text{cm}^2$. Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö. Lasketaan pienimmän ja keskikokoisen pyramidin mittakaava:

$$\left(\frac{s}{t}\right)^2 = \frac{A_{p1}}{A_{p2}}$$

$$\left(\frac{s}{t}\right)^2 = \frac{9,0}{81}$$

$$\left(\frac{s}{t}\right)^2 = \frac{1}{9} \quad \parallel \sqrt{\quad}$$

$$\frac{s}{t} = \frac{1}{3} = 1 : 3$$

Pienimmän ja keskikokoisen pyramidin mittakaava on 1:3. Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio. Lasketaan keskikokoisen pyramidin tilavuus:

$$\left(\frac{s}{t}\right)^3 = \frac{V_1}{V_2}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{15}{V_2}$$

$$\frac{1}{27} = \frac{15}{V_2} \quad \parallel \text{ker rotaan ristiin}$$

$$V_2 \cdot 1 = 15 \cdot 27$$

$$V_2 = 405\text{cm}^3 \approx 410\text{cm}^3$$

TAI

Keskikokoisen pyramidin pohjan pinta-ala $A_{p2}=81\text{cm}^2$. Lasketaan keskikokoisen pyramidin pohjasärmän a_2 pituus:

$$(a_2)^2 = A_{p2}$$

$$(a_2)^2 = 81 \quad \parallel \sqrt{\quad}$$

$$a_2 = \pm 9$$

Pituus on positiivista, joten $a_2=9\text{cm}$. Lasketaan pienimmän ja keskikokoisen pyramidin mittakaava:

$$\frac{s}{t} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{3,0}{9} = \frac{1}{3} = 1 : 3$$

Pienimmän ja keskikokoisen pyramidin mittakaava on 1:3. Ratkaistaan keskikokoisen pyramidin korkeus:

$$\frac{s}{t} = \frac{h_1}{h_2}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{5,0}{h_2} \quad \parallel \text{ker rotaan ristiin}$$

$$h_2 \cdot 1 = 5,0 \cdot 3$$

$$h_2 = 15\text{cm}$$

Lasketaan keskikokoisen pyramidin tilavuus:

$$V_2 = \frac{1}{3} A_{p2} h_2$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot 81 \cdot 15$$

$$V_2 = 405\text{cm}^3 \approx 410\text{cm}^3$$

Vastaus: $V_2=410\text{cm}^3$

Pisteytys

Tunnistettu, että pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.	1p
Laskettu pienimmän ja keskikokoisen pyramidin mittakaava oikein.	1p
Tunnistettu, että tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.	1p

Ratkaistu keskikokoisen pyramidin tilavuus.	1p
Vastaus oikein.	1p

TAI

Ratkaistu keskikokoisen pyramidin pohjasärmän pituus.	1p
Laskettu pienimmän ja keskikokoisen pyramidin mittakaava oikein.	1p
Laskettu keskikokoisen pyramidin korkeus mittakaavan avulla.	1p
Käytetty kartion tilavuuden kaavaa ja ratkaistu keskikokoisen pyramidin tilavuus.	1p
Vastaus oikein.	1p

2.3 Laske suurimman pyramidin korkeus. (4p)

Suurimman pyramidin tilavuus $V_3=3240\text{cm}^3$ ja pienimmän pyramidin tilavuus $V_1=15\text{cm}^3$. Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio. Lasketaan pienimmän ja suurimman pyramidin mittakaava:

$$\left(\frac{s}{t}\right)^3 = \frac{V_1}{V_3}$$

$$\left(\frac{s}{t}\right)^3 = \frac{15}{3240}$$

$$\left(\frac{s}{t}\right)^3 = \frac{1}{216} \quad \parallel \sqrt[3]{}$$

$$\frac{s}{t} = \frac{1}{6} = 1 : 6$$

Pienimmän ja suurimman pyramidin mittakaava on 1:6. Lasketaan suurimman pyramidin korkeus:

$$\frac{s}{t} = \frac{h_1}{h_3}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{5,0}{h_3} \quad \parallel \text{ker rotaan ristiin}$$

$$h_3 \cdot 1 = 5,0 \cdot 6$$

$$h_3 = 30\text{cm}$$

Vastaus: $h_3=30\text{cm}$

Pisteytys

Tunnistettu, että tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.	1p
Laskettu pienimmän ja suurimman pyramidin mittakaava oikein.	1p
Muodostettu verrantoyhtälö suurimman pyramidin korkeuden ratkaisemiseksi.	1p
Laskettu suurimman pyramidin korkeus oikein.	1p

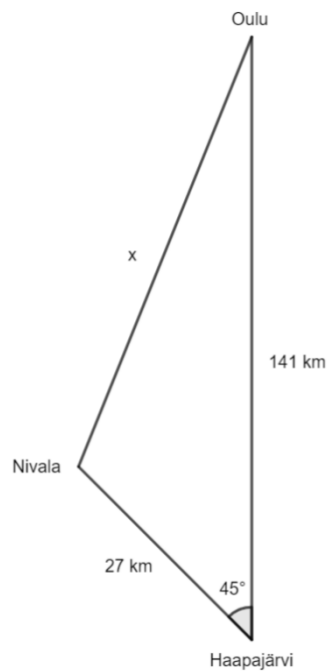
Tehtävä 3

3.1 Nivala ja Haapajärvi ovat Pohjois-Pohjanmaan eteläosassa sijaitsevia kaupunkeja. Haapajärvi sijaitsee Oulusta 141 km linnuntietä etelään. Nivala sijaitsee puolestaan Haapajärveltä 27 km luoteeseen.

Piirrä mallikuva ja ratkaise Nivalan ja Oulun välinen etäisyys kilometrin tarkkuudella. Maapallon pinnan kaarevuutta ei tarvitse ottaa huomioon. (5 p)

Ratkaisu

Mallikuva



Haapajärvi sijaitsee Oulusta linnuntietä etelään, joten Oulu sijaitsee Haapajärveltä tarkasteltuna linnuntietä pohjoiseen. Nivala sijaitsee Haapajärveltä luoteeseen. Pohjoisen ja luoteen välinen kulma on 45° . Nivalan ja Oulun välinen etäisyys x voidaan ratkaista kosinilauseen avulla, sillä muodostuvasta kolmiosta tiedetään yhden kulman suuruus ja kahden sivun pituus.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$x^2 = 27^2 + 141^2 - 2 \cdot 27 \cdot 141 \cdot \cos 45^\circ$$

$$x = \pm \sqrt{27^2 + 141^2 - 2 \cdot 27 \cdot 141 \cdot \cos 45^\circ}$$

$$x = \pm 123,39404... \text{ (km)}$$

Etäisyys on positiivista, joten $x \approx 123$ km.

V. Nivalan ja Oulun välinen etäisyys on 123 km.

Huom! Myös pyöristäminen 120 kilometriin hyväksytään.

TAI (Yhtälön ratkaiseminen CAS-laskimella)

$$\text{ratkaise}(x^2 = 27^2 + 141^2 - 2 \cdot 27 \cdot 141 \cdot \cos(45^\circ))$$

$$\approx \{x = -123.39404, x = 123.39404\}$$

Pisteytys

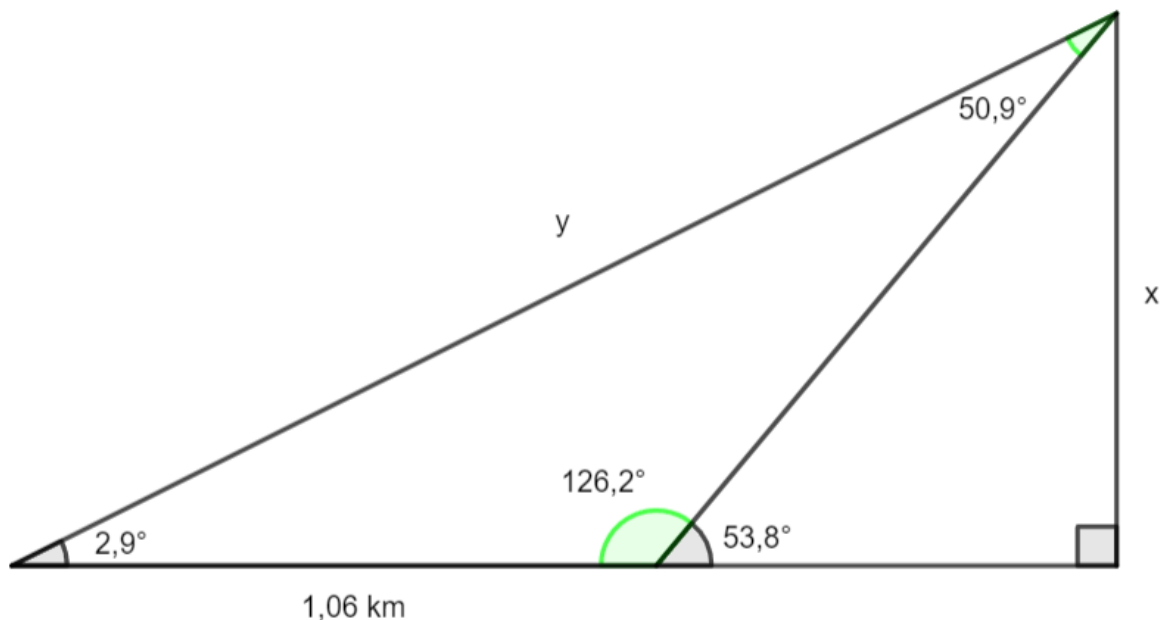
Mallikuvan piirtäminen ja ilmansuuntien välisen kulman tulkitseminen oikein	1 p
Kosinilauseen sopivuuden tunnistaminen ja arvojen sijoittaminen oikein lausekkeeseen	1 p
Neliöjuuren ottaminen molemmilta puolilta ja x:n pyöristämättömät arvot TAI Yhtälön ratkaiseminen CAS-laskimella	1 p
Positiivisen arvon valinta etäisyydeksi	1 p
Etäisyys pyöristetty oikein	1 p

3.2 Oulun tuomiokirkon kellotorni on yksi Oulun korkeimmista rakennuksista. Kellotornin huippu näkyy 2,9 asteen kulmassa horisontin yläpuolella Pikisaaren tenniskentiltä katsottuna. Erästä paikasta tuomiokirkon edustalla sijaitsevasta Franzénin puistosta kellotornin huippu näkyy 53,8 asteen kulmassa horisontin yläpuolella. Pikisaarella ja Franzénin puistossa sijaitsevien paikkojen etäisyys linnuntietä on 1,06 km. Paikat sijaitsevat tuomiokirkon kanssa suorassa linjassa.

Piirrä tilanteesta mallikuva ja ratkaise kellotornin korkeus. Anna vastaus metrin tarkkuudella. Maapallon pinnan kaarevuutta ei tarvitse ottaa huomioon. (7 p)

Ratkaisu (Pikisaari ja puisto samalla puolella kirkkoa)

Mallikuva



Mallikuvasta voidaan laskea tylppäkulmaisen kolmion kulmien (vihreät kulmat) suuruudet:

$$180^\circ - 53,8^\circ = 126,2^\circ$$

$$180^\circ - 2,9^\circ - 126,2^\circ = 50,9^\circ$$

Sivun y pituus saadaan ratkaistua sinilauseella

$$\frac{y}{\sin 126,2^\circ} = \frac{1,06 \text{ km}}{\sin 50,9^\circ}$$

$$y = \frac{\sin 126,2^\circ \cdot 1,06 \text{ km}}{\sin 50,9^\circ}$$

$$y = 1.10223... \text{ km}$$

Kellotornin korkeus x voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta sinin avulla

$$\sin 2,9^\circ = \frac{x}{1,10223 \text{ km}}$$

$$x = 1,10223 \text{ km} \cdot \sin 2,9^\circ$$

$$x = 0,05577... \text{ km}$$

$$x = 55,77... \text{ m}$$

$$x \approx 56 \text{ m}$$

V. Kellotornin korkeus on 56 metriä.

TAI (yhtälöiden ratkaiseminen CAS-laskimella)

$$\text{Ratkaise} \left(\frac{y}{\sin(126.2^\circ)} = \frac{1.06}{\sin(50.9^\circ)} \right)$$

$$\approx \{y = 1.10223\}$$

$$\text{Ratkaise} \left(\sin(2.9^\circ) = \frac{x}{1.10223} \right)$$

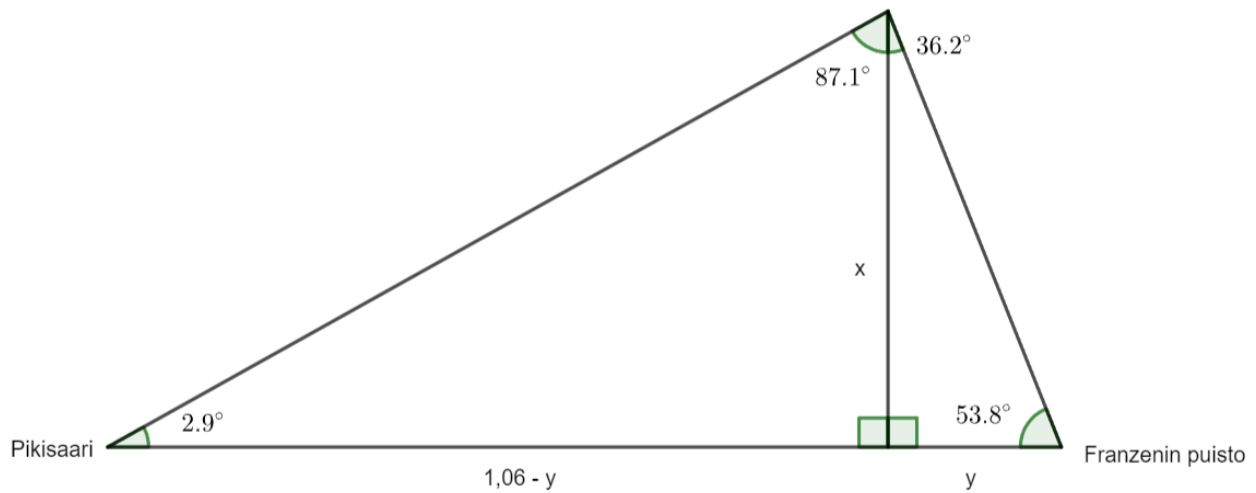
$$\approx \{x = 0.05577\}$$

Pisteytys

Mallikuvan piirtäminen	1 p
Muodostuvan tylppäkulmaisen kolmion kulmien laskeminen/merkitseminen kuvaan (laskulausekkeita ei vaadita)	1 p
Arvojen sijoittaminen oikein sinilauseen yhtälöön	1 p
Sivun pituuden y ratkaiseminen	1 p
Sinin käyttö kellotornin korkeuden x ratkaisemiseksi ja oikein sijoitetut arvot	1 p
Korkeuden x ratkaiseminen yhtälöstä	1 p
Korkeuden x muuttaminen metreiksi ja pyöristäminen metrin tarkkuudelle	1 p

Ratkaisu (Pikisaari ja puisto eri puolilla kirkkoa)

Mallikuva



Kahden tuntemattoman kulman suuruudet

$$180^\circ - 2,9^\circ - 90^\circ = 87,1^\circ$$

$$180^\circ - 53,8^\circ - 90^\circ = 36,2^\circ$$

(Ratkaisuvaihtoja on useita)

Suorakulmaisista kolmioista saadaan seuraavat yhtälöt

$$\tan 2,9^\circ = \frac{x}{1,06 - y}$$

$$\tan 53,8^\circ = \frac{x}{y}$$

Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$x = \tan 2,9^\circ \cdot (1,06 - y)$$

Toisesta yhtälöstä saadaan

$$x = y \cdot \tan 53,8^\circ$$

Merkitään lausekkeet yhtä suuriksi ja ratkaistaan y

$$y \cdot \tan 53,8^\circ = \tan 2,9^\circ \cdot 1,06 - \tan 2,9^\circ \cdot y$$

$$y \cdot \tan 53,8^\circ + \tan 2,9^\circ \cdot y = \tan 2,9^\circ \cdot 1,06$$

$$y \cdot (\tan 53,8^\circ + \tan 2,9^\circ) = \tan 2,9^\circ \cdot 1,06$$

$$y = \frac{\tan 2,9^\circ \cdot 1,06}{\tan 53,8^\circ + \tan 2,9^\circ}$$

$$y = 0,0379... (km)$$

Ratkaistaan kellotornin korkeus x sijoittamalla y :n arvo yhtälöön

$$x = \tan 53,8^\circ \cdot 0,0379... km$$

$$x = 0,05178... km$$

$$x \approx 0,052 km$$

V. Kellotornin korkeus on 52 metriä.

Pisteytys (esim)

Mallikuvan piirtäminen	1 p
Kulmien laskeminen/merkitseminen kuvaan (ei vaadita, jos ei käytetä tehtävän ratkaisuun)	1 p
Yhtälöiden muodostaminen	1 p
Lausekkeiden merkitseminen yhtä suuriksi	1 p
Yhtälön ratkaiseminen (myös CAS-laskimen ratkaisu hyväksytään)	1 p
Kellotornin korkeuden x laskeminen selvitetyn pituuden avulla	1 p
Korkeuden x muuttaminen metreiksi ja pyöristäminen metrin tarkkuudelle	1 p

Tehtävä 4 *Satelliitti kiertää Maata päiväntasaajan yläpuolella. Satelliitista katsottuna päiväntasaajasta näkyy viidesosa. Maapallon säde on 6370 km.*

4.1 Ratkaise satelliitista näkyvän päiväntasaajan osan pituus. (4 p)

Ratkaisu

Päiväntasaajan pituus on Maapallon ympärysmitta. Maapallon ympärysmitta saadaan laskettua säteen avulla

$$p = 2\pi r$$

$$p = 2 \cdot \pi \cdot 6370 \text{ km}$$

$$p = 40023,89041... \text{ km}$$

Satelliitista katsottuna päiväntasaajasta näkyy viidesosa.

$$b = \frac{1}{5} \cdot 40023,89041 \text{ km}$$

$$b = 8004,77808... \text{ km}$$

$$b \approx 8005 \text{ km}$$

V. Satelliitista näkyvän päiväntasaajan osan pituus on 8005 km.

Huom! Pyöristys 8000 kilometriin oikeuttaa myös pisteeseen.

Päiväntasaajan pituus Maapallon ympärysmitta/poikkileikkauksesta ympyrän piiri/ympyrän piirin lauseke ilmoitettu	1 p
Päiväntasaajan pituudeksi laskettu lukuarvo	1 p
Satelliitista näkyvän osan lauseke ja pyöristämätön pituus	1 p

Päiväntasaajan osan pituus pyöristetty oikein	1 p
---	-----

TAI

Päiväntasaajan pituus on Maapallon ympärysmitta $p=2\pi r$. Satelliitista katsottuna päiväntasaajasta näkyy viidesosa.

$$b = \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$b = \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6370 \text{ km}$$

$$b = 8004,77808... \text{ km}$$

$$b \approx 8005 \text{ km}$$

V. Satelliitista näkyvän päiväntasaajan osan pituus on 8005 km.

Huom! Pyöristys 8000 kilometriin oikeuttaa myös pisteeseen.

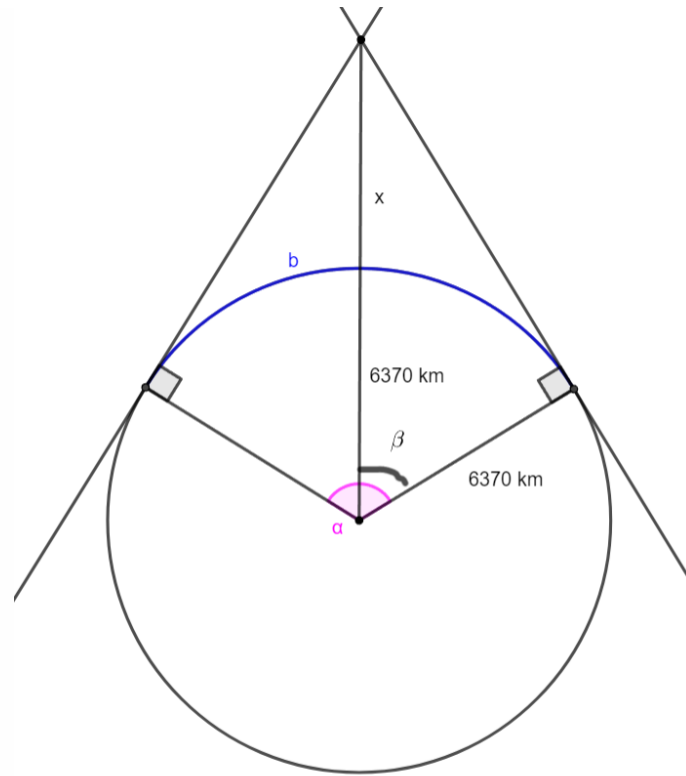
Pisteytys

Päiväntasaajan pituus Maapallon ympärysmitta/poikkileikkauksesta ympyrän piiri	1 p
Kaaren pituuden lauseke	1 p
Sijoitus ja pituuden pyöristämätön arvo	1 p
Päiväntasaajan osan pituus pyöristetty oikein	1 p

4.2 Piirrä mallikuva ja ratkaise satelliitin etäisyys Maan pinnasta. (8 p)

Ratkaisu

Mallikuva



Kun Maapallosta piirretään poikkileikkaus, on satelliitista näkyvän päiväntasaajan osa ympyrän kaari, jonka ympyrälle satelliitin paikasta piirretyt tangentit rajaavat. Lasketaan kaarta vastaavan keskuskulman suuruus.

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

$$8004,77808 \text{ km} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6370 \text{ km}$$

$$\alpha = \frac{360^\circ \cdot 8004,87808 \text{ km}}{2 \cdot \pi \cdot 6370 \text{ km}}$$

$$\alpha = 72,0009...^\circ$$

Kulman β suuruus on puolet kulmasta α .

$$\beta = \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2} \cdot 72,0009^\circ = 36,00045^\circ$$

Satelliitin etäisyys Maan pinnasta (merkitään x) voidaan selvittää muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta kosinin avulla.

$$\cos 36,00045^\circ = \frac{6370}{6370 + x}$$

$$\cos 36,00045^\circ \cdot 6370 + \cos 36,00045^\circ \cdot x = 6370$$

$$x = \frac{6370 - \cos 36,00045^\circ \cdot 6370}{\cos 36,00045^\circ}$$

$$x = 1503,79795... \text{ (km)}$$

$$x \approx 1504 \text{ (km)}$$

V. Satelliitin etäisyys Maan pinnasta on 1504 kilometriä.

TAI (yhtälöiden ratkaiseminen CAS-laskimella)

$$\text{Ratkaise} \left(8004.87808 = \frac{a}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6370, a \right)$$

$$\approx \{a = 72.0009\}$$

$$\text{ratkaise} \left(\cos(36.00045^\circ) = \frac{6370}{6370 + x} \right)$$

$$\approx \{x = 1503.79795\}$$

Pisteytys

Mallikuvan piirtäminen	1 p
Näkyvä osa ympyrän kaari + ympyrän kaaren kaava	1 p
Kaarta vastaavan keskuskulman ratkaiseminen yhtälöstä	1 p
TAI	
Näkyvä osa ympyrän kaari, arvojen sijoittaminen kaaren yhtälöön ja ratkaisu CAS-laskimella	2 p
Kulma β puolet kulmasta α	1 p
Yhtälön muodostaminen suorakulmaisesta kolmiosta (kosini)	1 p
Etäisyyden lausekkeen ratkaiseminen yhtälöstä	1 p
Sijoittaminen laskimeen ja oikea vastaus	1 p
TAI	
Yhtälön ratkaiseminen CAS-laskimella	2 p
Oikein pyöristetty vastaus	1 p

TAI

Kun Maapallosta piirretään poikkileikkaus, on satelliitista näkyvän päiväntasaajan osa ympyrän kaari, jonka ympyrälle satelliitin paikasta piirretyt tangentit rajaavat. Koska kaaren pituus on 1/5 koko ympyrän piiristä, on kaarta vastaava keskuskulma 1/5 täyskulmasta.

$$\alpha = \frac{1}{5} \cdot 360^\circ$$

$$\alpha = 72^\circ$$

Kulman β suuruus on puolet kulmasta α .

$$\beta = \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2} \cdot 72^\circ = 36^\circ$$

Satelliitin etäisyys Maan pinnasta (merkitään x) voidaan selvittää muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta kosinin avulla.

$$\cos 36^\circ = \frac{6370}{6370 + x}$$

$$\cos 36^\circ \cdot 6370 + \cos 36^\circ \cdot x = 6370$$

$$x = \frac{6370 - \cos 36^\circ \cdot 6370}{\cos 36^\circ}$$

$$x = 1503,75302... \text{ (km)}$$

$$x \approx 1504 \text{ (km)}$$

V. Satelliitin etäisyys Maan pinnasta on 1504 kilometriä.

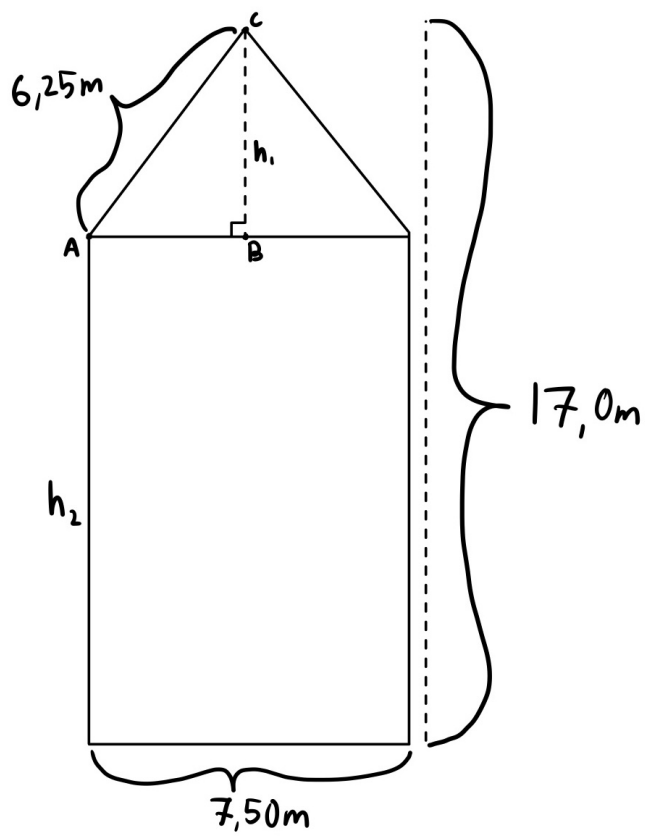
Pisteytys

Mallikuvan piirtäminen	1 p
Kaaren pituus viidesosa koko ympyrän piiristä -> kaarta vastaavan keskuskulman suuruus viidesosa täyskulmasta	1 p
Keskuskulman suuruuden laskeminen	1 p
Kulma β puolet kulmasta α	1 p
Yhtälön muodostaminen suorakulmaisesta kolmiosta (kosini)	1 p
Etäisyyden lausekkeen ratkaiseminen yhtälöstä	1 p
Sijoittaminen laskimeen ja oikea vastaus	1 p
TAI	
Yhtälön ratkaiseminen CAS-laskimella	2 p
Oikein pyöristetty vastaus	1 p

Tehtävä 5

5.1 Piirrä mallikuva ja laske muumitalon kokonaistilavuus. (6p)

Sivulta päin piirretty mallikuva muumitalosta:



Lasketaan muumitalon pohjan säde:

$$r = \frac{d}{2} = \frac{7,50 \text{ m}}{2} = 3,75 \text{ m}$$

Ympyräkartion huippu C, ympyräkartion pohjan keskipiste B ja ympyräkartion pohjan reunalta valittu piste A muodostavat suorakulmaisen kolmion ABC. Ratkaistaan ympyräkartion korkeus h_1 Pythagoraan lauseella:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$(h_1)^2 + 3,75^2 = 6,25^2$$

$$(h_1)^2 + 14,0625 = 39,0625$$

$$(h_1)^2 = 25 \quad || \sqrt{\quad}$$

$$h_1 = \pm 5$$

Korkeus on positiivista, joten ympyräkartion korkeus h_1 on 5 m. Koko muumitalon korkeus on 17,0 m, joten ympyrälieriön korkeus $h_2 = 17,0 \text{ m} - 5 \text{ m} = 12,0 \text{ m}$.

Suoran ympyrälieriön tilavuuden kaava on $V = A_p h$ ja suoran ympyräkartion tilavuuden kaava on

$$V = \frac{1}{3} A_p h. \text{ Lasketaan pohjan pinta-ala } A_p.$$

$$A_p = \pi r^2$$

$$A_p = \pi \cdot 3,75^2$$

$$A_p = 14,0625 \cdot \pi$$

$$(A_p = 44,1786... \text{ m}^2)$$

Lasketaan ympyrälieriön tilavuus:

$$V_l = A_p h_2$$

$$V_l = 14,0625 \cdot \pi \cdot 12,0$$

$$V_l = 168,75 \cdot \pi$$

$$(V_l = 530,143... \text{ m}^3)$$

Lasketaan ympyräkartion tilavuus:

$$V_k = \frac{1}{3} A_p h_2$$

$$V_k = \frac{1}{3} \cdot 14,0625 \cdot \pi \cdot 5,0$$

$$V_k = 23,4375 \cdot \pi$$

$$(V_k = 73,6310... \text{ m}^3)$$

Lasketaan muumitalon tilavuus:

$$V = V_l + V_k$$

$$V = 168,75 \cdot \pi + 23,4375 \cdot \pi \quad \text{TAI} \quad V = 530,143... + 73,6310...$$

$$V = 603,774...$$

$$V \approx 604 \text{ m}^3$$

Vastaus: Muumitalon tilavuus on 604 m³.

Pisteytys

Mallikuva	1p
Pohjan säde ratkaistu oikein	1p
Ympyräkartion korkeus laskettu oikein	1p
Pohjan pinta-ala laskettu oikein	1p
Ympyrälieriön ja kartion tilavuudet laskettu oikein	1p
Yhteistilavuus laskettu ja pyöristetty oikein	1p

5.2 Mikä on pienin paketti, johon kristallipallo voidaan pakata? Kuinka monta prosenttia kristallipallo täyttää tämän paketin tilavuudesta? (6 p)

Muutetaan kristallipallon tilavuus kuutiosenttimetreiksi:

$$V = 4 \text{ l} = 4 \text{ dm}^3 = 4000 \text{ cm}^3$$

Pallon tilavuuden kaava on $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Ratkaistaan kristallipallon säde r:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$4000 \text{ cm}^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$r^3 = \frac{4000 \text{ cm}^3}{\frac{4}{3}\pi} \quad || \sqrt[3]{}$$

$$r = 9,8474... \text{ cm}$$

Lasketaan kristallipallon halkaisija d:

$$d = 2r = 2 \cdot 9,8474... = 19,694... \approx 19,7 \text{ cm}$$

Lasketaan pakettien särmien pituudet a_s , a_m ja a_l :

$$(a_s)^2 = 225 \quad (a_m)^2 = 400 \quad (a_l)^2 = 625$$

$$a_s = \pm 15 \quad a_m = \pm 20 \quad a_l = \pm 25$$

Särmien pituudet ovat positiivisia, joten S-kokoisen paketin särmän pituus on 15 cm, M-kokoisen 20 cm ja L-kokoisen 25 cm. Kristallipallon halkaisija on hieman alle 19,7 cm, joten se mahtuu M- ja L-kokoisiin paketteihin. Täten pienin paketti, mihin kristallipallo voidaan pakata, on M-kokoinen paketti

Lasketaan M-kokoisen paketin tilavuus:

$$V_m = (a_m)^3$$

$$V_m = 20^3$$

$$V_m = 8000 \text{ cm}^3$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia kristallipallo täyttää M-kokoisen paketin tilavuudesta:

$$\frac{V}{V_m} = \frac{4000 \text{ cm}^3}{8000 \text{ cm}^3} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Kristallipallo täyttää M-kokoisen paketin tilavuudesta 50%.

Vastaukset: Pienin paketti, mihin kristallipallo voidaan pakata, on M-kokoinen paketti ja kristallipallo täyttää M-kokoisen paketin tilavuudesta 50%.

Pisteytys

Tilavuus muunnettu vetomitoista tilavuusmittoihin	1p
Käytetty pallon tilavuuden kaava	1p
Ratkaistu pallon säde/halkaisija oikein	1p
Laskettu pakettien särmien pituudet oikein	1p
Päätelty ja perusteltu, mikä on pienin paketti, johon kristallipallo mahtuu	1p
Laskettu kristallipallon tilavuuden osuus paketin tilavuudesta oikein	1p