

MAA5 Funktiot ja yhtälöt 2

Sarja A

1. Miten määritellään suunnatun kulman sini ja kosini? Perustele määritelmien avulla, että sini on pariton funktio ts. $\sin(-x) = -\sin x$ ja kosini on parillinen funktio ts. $\cos(-x) = \cos x$.
2. Ratkaise yhtälö $\frac{1}{2}\log_3(8-x) = \log_3 x+1$.
3. Olkoon $\cos x = -\frac{3}{4}$ ja $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Määritä lausekkeiden $\sin x$, $\sin 2x$ ja $\cos 2x$ tarkatarvot.
4. Lukujono koostuu nimensä mukaan peräkkäisistä luvuista. Lukujono on *geometrinen*, jos lukujono seuraava jäsen saadaan aina kertomalla edellinen jäsen jollakin vakioluvulla. Esim. jono 2, 6, 18, 54, ... on geometrinen koska seuraava luku saadaan kertomalla edellinen luku luvulla 3.
Luvut $2\sin^2 x \cos x$, $\sin x$ ja 1 tässä järjestyksessä ovat erään geometrisen jonon peräkkäisiä jäseniä. Määritä x .
5. Vuorokauden alin lämpötila on $8,0\text{ }^\circ\text{C}$ ja korkein lämpötila $22,4\text{ }^\circ\text{C}$ saavutetaan kello 12.30. Lämpötila vaihtelee 24 tunnin jaksoissa. Oletetaan, että lämpötilan asteina t tunnin kuluttua keskiyöstä ilmaisee funktio $f(t) = a \sin(bt - c) + d$.
a) Määritä funktion f lauseke. b) Kuinka kauan lämpötila on yli $20\text{ }^\circ\text{C}$?
6. Suomen ensimmäisen kannettavan matkapuhelimen julkaisi Salora vuonna 1974. Vuosina 1980-2000 matkapuhelinliittymien määrä kasvoi eksponentiaalisesti.
a) Sovita aineistoon eksponentiaalinen malli, jossa muuttujana x on vuodesta 1980 kulunut aika vuosina.
b) Kuinka monta matkapuhelinliittymää Suomessa oli mallin mukaan vuonna 1991, kun ensimmäinen digitaalinen gsm-verkko avattiin?
c) Minä vuonna Suomessa ylittyi mallin mukaan 500 000 matkapuhelinliittymän raja?
d) Paljonko mallin mukaan Suomessa olisi matkapuhelinliittymiä vuonna 2030?

Vuosi	Liittymien lukumäärä
1980	23 482
1985	67 639
1990	257 872
1995	1 039 126
2000	3 728 625

Vastaukset: **A2.** $x = \frac{8}{9}$; **A3.** $\sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\sin 2x = \frac{3\sqrt{7}}{8}$, $\cos 2x = \frac{1}{8}$; **A4.** $x = \pm \frac{\pi}{3} + n2\pi, n \in \mathbf{Z}$;

A5. a) $f(t) = 7,2 \sin(0,262t - 1,703) + 15,2$, b) 6 h 25 min;

A6. a) $f(x) = 21013,143 \cdot 1,293^x$, b) 355 000, c) vuoden 1992 aikana, d) $7,99 \cdot 10^9$

Sarja B

1. Tiedetään, että $\sin x = \frac{1}{3}$ ja $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. a) Määritä $\cos x$. b) Määritä yksikköympyrää käyttäen $\sin(x + \pi)$, $\cos(x + \pi)$.
2. Ratkaise yhtälö a) $\sin x \cos x + \cos x = 0$, b) $2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$.
3. Osoita, että $2 \log_2(1 + \sqrt{3}) = \log_2(2 + \sqrt{3}) + 1$.
4. Lukujono koostuu nimensä mukaan peräkkäisistä luvuista. Lukujono on *aritmeettinen*, jos lukujono seuraava jäsen saadaan aina lisäämällä edelliseen jäseneen jokin vakioluku. Esim. jono 2, 6, 10, 14, ... on aritmeettinen koska seuraava luku saadaan lisäämällä edelliseen lukuun luku 4.
Luvut $\cos^2 x$, $-\cos x$ ja $\sin^2 x$ tässä järjestyksessä ovat erään aritmeettisen jonon peräkkäisiä jäseniä. Määritä x .
5. a) Sievennä murtopotensseilla $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{2}}$.
b) Radioaktiivisen aineen määrä pienenee aina samassa ajassa yhtä monta prosenttia. Suomalisen saamasta säteilyannoksesta noin puolet tulee sisäilman radonista. Radonia syntyy radioaktiivisen hajoamisen seurauksena maaperässä, josta se kaasuna voi nousta ilmaan ja päästä siten rakennuksien alapohjien rei'istä huoneilmaan. Radonin isotoopin 222 puoliintumisaika on 3,825 vuorokautta. i) Kuinka monta prosenttia radonista hajoaa vuorokaudessa? ii) Muodosta funktio radonin määrälle t vuorokauden kuluttua tästä hetkestä, kun sitä on tällä hetkellä $3,3 \cdot 10^{-12}$ grammaa. iii) Milloin radonia on jäljellä alle $1,5 \cdot 10^{-14}$ g?
6. Jos tietyn kappaleen lämpötila T on korkeampi kuin ympäristön lämpötila T_0 ja ympäristön lämpötila pysyy vakiona, niin kappale jäähtyy Newtonin jäähtymislain mukaan. Jäähtyminen tapahtuu siten, että kappaleen ja ympäristön lämpötilojen erotus pienenee eksponentiaalisesti jäähtymisajan funktiona: $T - T_0 = C \cdot 10^{kt}$, missä C ja k ovat vakioita t on aika tunteina. Teknologiayrityksen toimitusjohtaja löydettiin kuolleena ilmastoidusta työhuoneestaan. Televisiosarjan rikospaikkatutkija mittaa kello 9.30 ruumiin lämpötilaksi $33,5$ °C ja kello 11.30 $30,5$ °C. Määritä kymmenen minuutin tarkkuudella, milloin murha tapahtui. Huoneen lämpötila oli koko ajan $20,5$ °C, ja toimitusjohtajan ollessa elossa hänen ruumiinlämpönsä oli $37,0$ °C.

Vastaukset: B1. a) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, b) $\sin(x + \pi) = -\frac{1}{3}$, $\cos(x + \pi) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; **B2.** a) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$,

b) $x = \pi + n2\pi$ tai $x = \pm \frac{2\pi}{3} + n2\pi, n \in \mathbf{Z}$; **B4.** $x = \pm \frac{2\pi}{3} + n2\pi, n \in \mathbf{Z}$;

B5. a) $\sqrt{2}$, b) i) 16,6%, ii) $0,83426^t \cdot 3,3 \cdot 10^{-12}$ g, iii) 30 vuorokautta; **B6.** klo 7.40