5.11

Funktion $f(x) = 3x^2 - 2x$ derivaatta kohdassa -2 on erotusosamäärän raja-arvo.

$$f'(-2)$$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$
missä $a = -2$.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$f(x) = 3x^2 - 2x$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3(-2+h)^2 - 2(-2+h)) - (3 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2))}{h}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3((-2)^2 + 2 \cdot (-2) \cdot h + h^2) + 4 - 2h - (3 \cdot 4 + 4)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(4 - 4h + h^2) + 4 - 2h - 12 - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{12 - 12h + 3h^2 + 4 - 2h - 12 - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 - 14h}{h}$$

Erotetaan osoittajasta yhteinen tekijä.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3h - 14)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (3h - 14)$$

$$= 3 \cdot 0 - 14$$

$$= -14$$

Vastaus

−14

5.15

a) Funktion $f(x) = k$ derivaattafunktion lauseke on erotusosamäärän raja-arvo kohdassa x.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad f(x+h) = k \text{ ja } f(x) = k \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) Funktion $f(x) = kx$ derivaattafunktion lauseke on erotusosamäärän raja-arvo kohdassa x.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad f(x+h) = k(x+h) \text{ ja } f(x) = kx \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{k(x+h) - kx}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{kx + kh - kx}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{kh}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} k \\ &= k \end{aligned}$$

Vastaus

a) $f'(x) = 0$

b) $f'(x) = k$

5.16

Funktion $f(x) = 2x^2 - x$ derivaatta kohdassa 3 on erotusosamäärän raja-arvo.

$f'(3)$ $\qquad f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, missä $a = 3$.

$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ $\qquad f(x) = 2x^2 - x$

$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2 - x - (2 \cdot 3^2 - 3)}{x - 3}$

$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2 - x - (2 \cdot 9 - 3)}{x - 3}$

$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2 - x - 15}{x - 3}$

Lauseketta on supistettava. Jaetaan osoittaja tekijöihin nollakohtien avulla.

$2x^2 - x - 15 = 0$ $\qquad a = 2,\ b = -1,\ c = 15$

$x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-15)}}{2 \cdot 2} = \dfrac{1 \pm 11}{4}$

$x = \dfrac{1 + 11}{4} = 3$ tai $x = \dfrac{1 - 11}{4} = \dfrac{-10}{4} = -\dfrac{5}{2}$

Siten $2x^2 - x - 15 = 2 \cdot (x - 3)(x - (-\frac{5}{2})) = 2(x - 3)(x + \frac{5}{2})$.

Lasketaan raja-arvo.

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - x - 15}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{2(x - 3)(x + \frac{5}{2})}{x - 3}$$
$$= \lim_{x \to 3} (2(x + \frac{5}{2}))$$
$$= 2(3 + \frac{5}{2})$$
$$= 6 + 5$$
$$= 11$$

Siis $f'(3) = 11$.

Vastaus
11