

Tehtävä 1. 2026S/t.9/B1

9. Erimielisyyttä tangentista (12 p.)

Derivoituvan funktion f kuvaajan *tangentti*, joka kulkee pisteen $(x_0, f(x_0))$ kautta, on määritelmän mukaan suora, jonka yhtälö on

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Kaksi opiskelijaa ratkaisi seuraavaa tehtävää:

Tutki, onko suora $y = -1$ funktion $f(x) = 2x^3 - 1$ kuvaajan tangentti.

Opiskelija A vastasi: Koska suoralla ja funktion f kuvaajalla on vain yksi yhteinen piste, niin suora on kuvaajan tangentti.

Opiskelija B vastasi: Suora ei ole kuvaajan tangentti. Jos kuvaajat piirretään samaan koordinaatistoon, niillä on yksi yhteinen piste, mutta tässä pisteessä suora leikkaa kuvaajan.

- a. Selitä esimerkin ja tangentin määritelmän avulla, miksi opiskelijan A päättely ei ole pätevä.
- b. Onko opiskelija B oikeassa? Perustele vastauksesi käyttämällä tangentin määritelmää.

Tehtävä 2. Virheen korjaaminen yhtälön ratkaisussa

a)

Opiskelija ratkaisee yhtälön

$$(x - 1)^2 = (3x - 2)^2$$

seuraavasti:

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 &= (3x - 2)^2 \\ x - 1 &= 3x - 2 \\ -2x &= -1 \\ x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

1. Selitä, mikä oli opiskelijan ajatus ja miksi hän on suorittanut sen virheellisesti.
2. Korjaa virhe säilyttämällä opiskelijan idea, mutta suorittamalla se oikein ja ratkaise yhtälö loppuun.

b)

Opiskelija ratkaisee yhtälöä $x^3 = 9x$ seuraavasti:

- o *Vaihe 1:* Jaetaan yhtälö puolittain muuttujalla x .
- o *Vaihe 2:* Saadaan $x^2 = 9$.
- o *Vaihe 3:* Otetaan neliöjuuri, jolloin $x = 3$ tai $x = -3$.
Opiskelija ilmoittaa yhtälön ratkaisuiksi luvut 3 ja -3 .
- o **Tehtävä:** Etsi opiskelijan tekemä matemaattinen virhe. Selitä, minkä vuoksi tehty operaatio ei ole yleispätevä, ja esitä yhtälön korjattu, täydellinen ratkaisu.

Tehtävä 3. 2022S/t.8/B1

8. Kokonaislukuratkaisuja 12 p.

Määritä yhtälön $x^6 + 2x^3y^3 + y^6 = 4225$ kaikki kokonaislukuratkaisut, kun $x > 0$ ja $y > 0$.

Tehtävä 4. 2022S/t.9/B1

9. Neljännen asteen polynomiperhe 12 p.

Tarkastellaan polynomia $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$, kun $a > 0$ ja $x \in \mathbf{R}$.

1. Osoita, että derivaatta f' on aidosti kasvava funktio. (4 p.)
2. Osoita, että yhtälöllä $f(x) = 0$ on korkeintaan kaksi erisuurta reaalijuurta. (8 p.)