

**108**

- a) Funktio  $f$  on polynomifunktio, ja siksi se on kaikkialla jatkuva.

Lasketaan funktion  $f$  arvot kohdissa 0 ja 1.

$$f(0) = 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 23 \cdot 0 - 14 = -14 < 0$$

$$f(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 23 \cdot 1 - 14 = 1 > 0$$

Koska funktio  $f$  on jatkuva välillä  $[0, 1]$  ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, niin sillä on ainakin yksi nollakohta välillä  $]0, 1[$ .

- b) Lasketaan funktion  $f$  arvot kohdissa 4 ja 5.

$$f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 23 \cdot 4 - 14 = -2 < 0$$

$$f(5) = 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 23 \cdot 5 - 14 = 1 > 0$$

Koska funktio  $f$  on jatkuva välillä  $[4, 5]$  ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, niin sillä on ainakin yksi nollakohta välillä  $]4, 5[$ .

## 109

- a) Funktio  $f$  on polynomifunktio, ja siksi se on kaikkialla jatkuva.

Lasketaan funktion  $f$  arvot kohdissa 2 ja 3.

$$f(2) = 2^3 + 2 - 13 = -3 < 0$$

$$f(3) = 3^3 + 3 - 13 = 17 > 0$$

Koska funktio  $f$  on jatkuva välillä  $[2, 3]$  ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, niin sillä on ainakin yksi nollakohta välillä  $]2, 3[$ .

- b) Funktio  $f$  on kaikkialla jatkuva.

Lasketaan funktion  $f$  arvot kohdissa  $-1$  ja  $0$ .

$$f(-1) = 3^{-1} + (-1)^3 = -\frac{2}{3} < 0$$

$$f(0) = 3^0 + (0)^3 = 1 > 0$$

Koska funktio  $f$  on jatkuva välillä  $[-1, 0]$  ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, niin sillä on ainakin yksi nollakohta välillä  $]0, 1[$ .

**110**

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$\sqrt{x+1} = x^2 - 1$$

$$\sqrt{x+1} - x^2 + 1 = 0$$

Yhtälön juuret ovat samat kuin funktion  $f(x) = \sqrt{x+1} - x^2 + 1$  nollakohdat.

Selvitetään funktion määrittelyehto.

$$x+1 \geq 0$$

$$x \geq -1$$

Funktio  $f$  on määritelty ja jatkuva, kun  $x \geq -1$ .

Tutkitaan funktion  $f$  arvoja välillä  $[-1, 2]$ .

$$f(-1) = \sqrt{-1+1} - (-1)^2 + 1 = 0$$

Sattumalta löysimme yhden funktion nollakohdan. Jatketaan funktion arvojen tutkimista.

$$f(0) = \sqrt{0+1} - (0)^2 + 1 = 2 > 0$$

$$f(2) = \sqrt{2+1} - (2)^2 + 1 = \sqrt{3} - 3 < 0$$

Koska funktion arvot välin  $[0, 2]$  päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä  $]0, 2[$ .

Koska arvo  $-1$  ei ole välillä  $[0, 2]$ , on funktiolla  $f$  ainakin 2 nollakohtaa välillä  $[-1, 2]$ .

**111**

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$x^2 + \sqrt{x} = 2x$$

$$x^2 + \sqrt{x} - 2x = 0$$

Yhtälön juuret ovat samat kuin funktion  $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 2x$  nollakohdat.

Funktio  $f$  on määritelty ja jatkuva, kun  $x \geq 0$ .

Tutkitaan funktion  $f$  arvoja.

$$f(0) = 0^2 + \sqrt{0} - 2 \cdot 0 = 0$$

Sattumalta löysimme yhden funktion nollakohdan. Jatketaan funktion arvojen tutkimista.

$$f(0,1) = 0,1^2 + \sqrt{0,1} - 2 \cdot 0,1 \approx 0,1232... > 0$$

$$f(0,5) = 0,5^2 + \sqrt{0,5} - 2 \cdot 0,5 \approx -0,4289... < 0$$

Koska funktion arvot välin  $[0,1; 0,5]$  päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä  $]0,1; 0,5[$ .

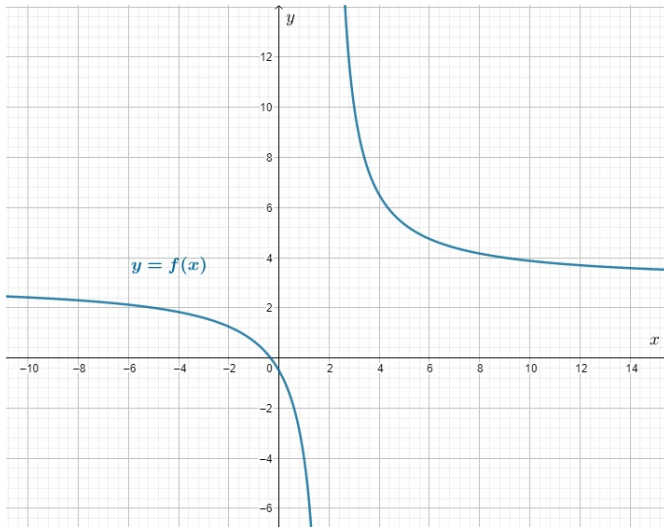
Jatketaan funktion arvojen tutkimista.

$$f(1) = 1^2 + \sqrt{1} - 2 \cdot 1 = 0$$

Löysimme toisenkin tarkan nollakohdan.

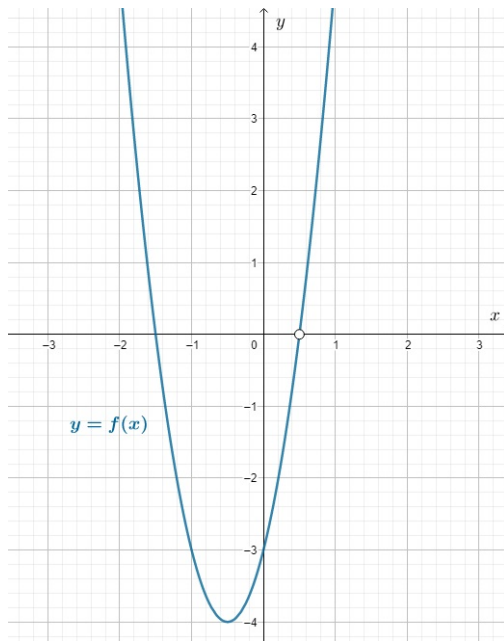
Koska arvot 0 ja 1 eivät ole välillä  $[0,1; 0,5]$ , on funktiolla  $f$  ainakin 3 nollakohtaa.

112



- a) Ei voi, sillä funktio ei ole määritelty kohdassa  $x = 2$ , eikä näin ollen ole jatkuva välillä  $[0, 3]$ .
- b) Kyllä voi, sillä funktio on jatkuva välillä  $[-3, 0]$ .

## 113



Funktiolla  $f$  on välillä  $]-2, -1[$  nollakohta, koska funktio  $f$  on jatkuva välillä  $[-2, -1]$  ja  $f(-2) > 0$  ja  $f(-1) < 0$ . Funktiolla  $f$  ei ole nollakohtaa välillä  $]0, 1[$ , sillä funktio ei ole määritelty kohdassa  $x = 0,5$ .

**114**

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$\sin x = x + 1$$

$$\sin x - x - 1 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $f(x) = \sin x - x - 1$  nollakohdat.

Funktio  $f$  on määritelty ja jatkuva kaikkialla.

- 1) Osoitetaan ensin, että funktiolla  $f$  on ainakin yksi nollakohta.

Lasketaan funktion  $f$  arvoja.

$$f(-2) = \sin(-2) - (-2) - 1 \approx 0,0907... > 0$$

$$f(-1) = \sin(-1) - (-1) - 1 \approx -0,8414... < 0$$

Koska funktio on jatkuva suljetulla välillä  $[-2, -1]$  ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla  $f$  on ainakin yksi nollakohta välillä  $]-2, -1[$ .

- 2) Osoitetaan seuraavaksi, että funktiolla  $f$  on enintään yksi nollakohta.

Tutkitaan funktion  $f$  kulkua derivaattafunktion avulla.

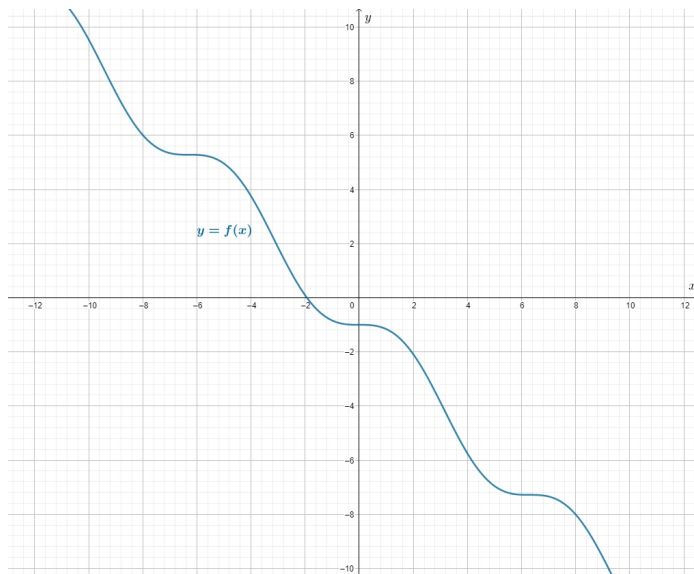
Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = \cos x - 1$$

Koska

$$f'(x) = \cos x - 1 \leq 1 - 1 = 0$$

kaikilla  $x$ , niin funktio on vähenevä. Funktio on myös aidosti vähenevä, sillä derivaatta  $f'(x) = 0$  vain hetkellisesti. Sillä siis voi olla enintään yksi nollakohta.



Kohtien 1 ja 2 perusteella funktiolla  $f$  on täsmälleen yksi nollakohta.

**115**

Funktio  $f$  saa arvon 27 funktion  $g(x) = e^x + x - 27$  nollakohdissa.

Funktio  $g$  on määritelty ja jatkuva kaikkialla.

- 1) Osoitetaan ensin, että funktiolla  $g$  on ainakin yksi nollakohta.

Lasketaan funktion  $g$  arvoja.

$$g(3) = e^3 + 3 - 27 \approx -3,914... < 0$$

$$g(4) = e^4 + 4 - 27 \approx 31,598... > 0$$

Koska funktio on jatkuva suljetulla välillä  $[3, 4]$  ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla  $g$  on ainakin yksi nollakohta välillä  $]3, 4[$ .

- 2) Osoitetaan seuraavaksi, että funktiolla  $g$  on enintään yksi nollakohta.

Tutkitaan funktion  $g$  kulkua derivaattafunktion avulla.

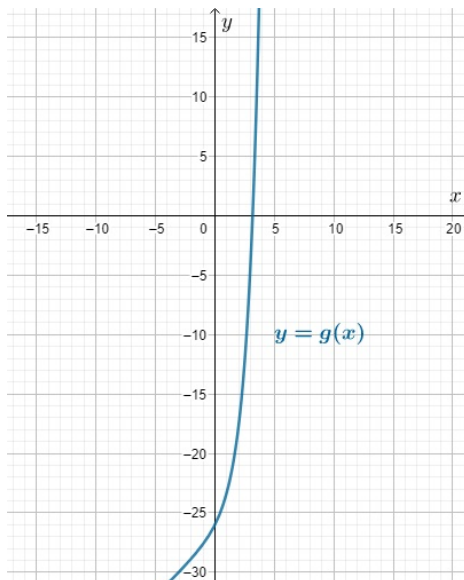
Määritetään derivaattafunktio.

$$g'(x) = e^x + 1$$

Koska

$$g'(x) = e^x + 1 > 0 + 1 = 1 > 0$$

kaikilla  $x$ , niin funktio on aidosti kasvava. Sillä siis voi olla enintään yksi nollakohta.



Kohtien 1 ja 2 perusteella funktiolla  $g$  on täsmälleen yksi nollakohta, joten myös funktio  $f$  saa arvon 27 täsmälleen kerran.

## 116

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$e^x = x + 16$$

$$e^x - x - 16 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $f(x) = e^x - x - 16$  nollakohdat.

Funktio  $f$  on kaikkialla jatkuva.

1) Tutkitaan funktion  $f$  kulkua derivaattafunktion avulla.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = e^x - 1$$

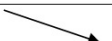
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1$$

$$x = \ln 1 = 0$$

Laaditaan funktion  $f$  kulkukaavio.

|         |                                                                                     |                                                                                     |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|         | 0                                                                                   |                                                                                     |
| $f'(x)$ | —                                                                                   | +                                                                                   |
| $f(x)$  |  |  |

| $x$ | $f'(x)$               | merkki |
|-----|-----------------------|--------|
| -1  | $\approx -0,632\dots$ | —      |
| 1   | $\approx 1,718\dots$  | +      |

Funktio  $f$  on aidosti vähenevä välillä  $x \leq 0$ , joten sillä on korkeintaan yksi nollakohta välillä  $x \leq 0$ .

Funktio  $f$  on aidosti kasvava välillä  $x \geq 0$ , joten sillä on korkeintaan yksi nollakohta välillä  $x \geq 0$ .

Näin ollen funktiolla  $f$  voi olla enintään kaksi nollakohtaa.

2) Etsitään funktion  $f$  nollakohtia.

Lasketaan funktion arvoja välillä  $x \leq 0$ .

$$f(-15) = e^{-15} - (-15) - 16 \approx -0,9999 < 0$$

$$f(-20) = e^{-20} - (-20) - 16 \approx 4,0000... > 0$$

Funktiolla  $f$  on ainakin yksi nollakohta välillä  $] -20, -15[$ .

Lasketaan funktion arvoja välillä  $x \geq 0$ .

$$f(2) = e^2 - 2 - 16 \approx -10,610... < 0$$

$$f(3) = e^3 - 3 - 16 \approx 1,085... > 0$$

Funktiolla  $f$  on ainakin yksi nollakohta välillä  $]2, 3[$ .

Koska välit  $] -20, -15[$  ja  $]2, 3[$  ovat erilliset, funktiolla  $f$  on ainakin kaksi nollakohtaa.

Kohdassa 1 todettiin, että funktiolla  $f$  on enintään kaksi nollakohtaa. Kohdassa 2 osoitettiin, että funktiolla  $f$  on ainakin kaksi nollakohtaa. Siten funktiolla  $f(x) = e^x - x - 16$  on täsmälleen kaksi nollakohtaa ja yhtälöllä  $e^x = x + 16$  täsmälleen kaksi ratkaisua.

Vastaus      kaksi ratkaisua

## 117

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$x^5 - 80x = 50$$

$$x^5 - 80x - 50 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $f(x) = x^5 - 80x - 50$  nollakohdat.

Funktio  $f$  on kaikkialla jatkuva.

1) Tutkitaan funktion  $f$  kulkua derivaattafunktion avulla.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = 5x^4 - 80$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$5x^4 - 80 = 0$$

$$5x^4 = 80$$

$$x^4 = 16$$

$$x = \pm 2$$

Laaditaan funktion  $f$  kulkukaavio.

|         |    |   |   |  |
|---------|----|---|---|--|
|         | -2 |   | 2 |  |
| $f'(x)$ | +  | - | + |  |
| $f(x)$  | ↗  | ↘ | ↗ |  |

| $x$ | $f'(x)$ | merkki |
|-----|---------|--------|
| -3  | 325     | +      |
| 0   | -80     | -      |
| 3   | 325     | +      |

Funktio  $f$  on aidosti kasvava välillä  $x \leq -2$ , joten sillä on korkeintaan yksi nollakohta välillä  $x \leq -2$ .

Funktio  $f$  on aidosti vähenevä välillä  $-2 \leq x \leq 2$ , joten sillä on korkeintaan yksi nollakohta välillä  $-2 \leq x \leq 2$ .

Funktio  $f$  on aidosti kasvava välillä  $x \geq 2$ , joten sillä on korkeintaan yksi nollakohta välillä  $x \geq 2$ .

Näin ollen funktiolla  $f$  voi olla enintään kolme nollakohtaa.

2) Etsitään funktion  $f$  nollakohtia.

Lasketaan funktion arvoja välillä  $x \leq -2$ .

$$f(-2) = (-2)^5 - 80 \cdot (-2) - 50 = 78 > 0$$

$$f(-3) = (-3)^5 - 80 \cdot (-3) - 50 = -53 < 0$$

Funktiolla  $f$  on ainakin yksi nollakohta välillä  $] -2, -3[$ .

Lasketaan funktion arvoja välillä  $-2 \leq x \leq 2$ .

$$f(0) = 0^5 - 80 \cdot 0 - 50 = -50 < 0$$

$$f(-1) = (-1)^5 - 80 \cdot (-1) - 50 = 29 > 0$$

Funktiolla  $f$  on ainakin yksi nollakohta välillä  $] -1, 0[$ .

Lasketaan funktion arvoja välillä  $x \geq 2$ .

$$f(3) = 3^5 - 80 \cdot 3 - 50 = -47 < 0$$

$$f(4) = 4^5 - 80 \cdot 4 - 50 = 654 > 0$$

Funktiolla  $f$  on ainakin yksi nollakohta välillä  $]3, 4[$ .

Funktiolla  $f$  on siis ainakin kolme nollakohtaa.

Kohdassa 1 todettiin, että funktiolla  $f$  on enintään kolme nollakohtaa. Kohdassa 2 osoitettiin, että funktiolla  $f$  on ainakin kolme nollakohtaa. Siten funktiolla  $f(x) = x^5 - 80x - 50$  on täsmälleen kolme nollakohtaa ja yhtälöllä  $x^5 - 80x = 50$  täsmälleen kolme ratkaisua.

Vastaus     kolme ratkaisua

**118**

Funktio  $f(x) = x^5 - 2x^2 + 1$  on polynomifunktio, ja siksi se on kaikkialla jatkuva.

Tutkitaan funktion  $f$  arvoja välillä  $[0, 1]$ .

$$f(0) = 0^5 - 2 \cdot 0^2 + 1 = 1 > 0$$

$$f(0,9) = 0,9^5 - 2 \cdot 0,9^2 + 1 = -0,02951 < 0$$

Koska funktion arvot välin  $[0; 0,9]$  päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä  $]0; 0,9[$ .

Jatketaan funktion arvojen tutkimista.

$$f(1) = 1^5 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 0$$

Sattumalta löysimme yhden funktion nollakohdan.

Koska arvo 1 ei ole välillä  $[0; 0,9]$ , on funktiolla  $f$  ainakin 2 nollakohtaa välillä  $[0, 1]$ .

## 119

Funktio  $f$  saa arvon  $\sqrt{2}$  funktion  $g(x) = 2^x - x^2 - \sqrt{2}$  nollakohdissa.

Funktio  $g$  on määritelty ja jatkuva kaikkialla.

Lasketaan funktion  $g$  arvot kohdissa 4 ja 5.

$$g(4) = 2^4 - 4^2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} < 0$$

$$g(5) = 2^5 - 5^2 - \sqrt{2} = 5,585... > 0$$

Koska funktio  $g$  on jatkuva välillä  $[4, 5]$  ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, niin sillä on ainakin yksi nollakohta välillä  $]4, 5[$ . Siis funktio  $f$  saa arvon  $\sqrt{2}$  välillä  $[4, 5]$ .

**120**

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$\sqrt{x+1} = x^3 + 1$$

$$\sqrt{x+1} - x^3 - 1 = 0$$

Yhtälön juuret ovat samat kuin funktion  $f(x) = \sqrt{x+1} - x^3 - 1$  nollakohdat.

Selvitetään funktion määrittelyehto.

$$x+1 \geq 0$$

$$x \geq -1$$

Funktio  $f$  on määritelty ja jatkuva, kun  $x \geq -1$ .

Tutkitaan funktion  $f$  arvoja välillä  $[-1, 1]$ .

$$f(-1) = \sqrt{-1+1} - (-1)^3 - 1 = 0$$

Sattumalta löysimme yhden funktion nollakohdan. Jatketaan funktion arvojen tutkimista.

$$f(0) = \sqrt{0+1} - 0^3 - 1 = 0$$

Sattumalta löysimme toisenkin funktion nollakohdan. Jatketaan funktion arvojen tutkimista.

$$f(0,5) = \sqrt{0,5+1} - 0,5^3 - 1 = 0,0997... > 0$$

$$f(1) = \sqrt{1+1} - 1^3 - 1 = -0,5857... < 0$$

Koska funktion arvot välin  $[0,5; 1]$  päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä  $]0,5; 1[$ .

Koska arvot  $-1$  ja  $0$  eivät ole välillä  $[0,5; 1]$ , on funktiolla  $f$  ainakin 3 nollakohtaa välillä  $[-1, 1]$ .

**121**

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$2^x - x = 3$$

$$2^x - x - 3 = 0$$

Yhtälön juuret ovat samat kuin funktion  $f(x) = 2^x - x - 3$  nollakohdat.

Funktio  $f$  on kaikkialla määritelty ja jatkuva.

Tutkitaan funktion  $f$  arvoja.

$$f(-3) = 2^{-3} - (-3) - 3 = \frac{1}{8} > 0$$

$$f(0) = 2^0 - 0 - 3 = -2 < 0$$

Koska funktion arvot välin  $[-3, 0]$  päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä  $] -3, 0[$ .

Jatketaan funktion arvojen tutkimista.

$$f(3) = 2^3 - 3 - 3 = 2 > 0$$

Koska funktion arvot välin  $[0, 3]$  päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä  $]0, 3[$ .

Koska välit  $]-3, 0[$  ja  $]0, 3[$  ovat erilliset, funktiolla  $f$  on ainakin kaksi nollakohtaa.

## 122

- a) Ei voi, sillä funktio ei ole määritelty kohdassa  $x = \frac{7}{4}$ , eikä näin ollen ole jatkuva välillä  $[1, 2]$ .
- b) Funktio  $f$  on jatkuva välillä  $[-1, 0]$ .

Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä.

$$f(-1) = \frac{2 \cdot (-1) + 1}{4 \cdot (-1) - 7} = 0,0909... > 0$$

$$f(0) = \frac{2 \cdot 0 + 1}{4 \cdot 0 - 7} = -0,1428... < 0$$

Koska funktio  $f$  on jatkuva välillä  $[-1, 0]$  ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, niin sillä on ainakin yksi nollakohta välillä  $] -1, 0[$ .

## 123

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$\sin 2x = 2x - 1$$

$$\sin 2x - 2x + 1 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $f(x) = \sin 2x - 2x + 1$  nollakohdat.

Funktio  $f$  on määritelty ja jatkuva kaikkialla.

- 1) Osoitetaan ensin, että funktiolla  $f$  on ainakin yksi nollakohta.

Lasketaan funktion  $f$  arvoja.

$$f(0) = \sin(2 \cdot 0) - 2 \cdot 0 + 1 = 1 > 0$$

$$f(1) = \sin(2 \cdot 1) - 2 \cdot 1 + 1 = -0,0907... < 0$$

Koska funktio on jatkuva suljetulla välillä  $[0, 1]$  ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla  $f$  on ainakin yksi nollakohta välillä  $]0, 1[$ .

- 2) Osoitetaan seuraavaksi, että funktiolla  $f$  on enintään yksi nollakohta.

Tutkitaan funktion  $f$  kulkua derivaattafunktion avulla.

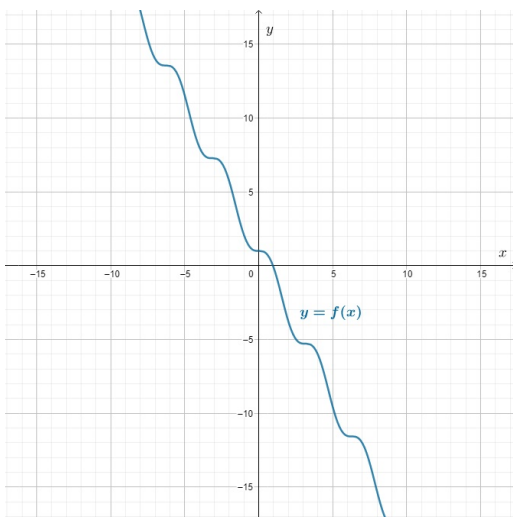
Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = 2 \cos 2x - 2$$

Koska

$$f'(x) = 2 \cos 2x - 2 \leq 2 \cdot 1 - 2 = 0$$

kaikilla  $x$ , niin funktio on vähenevä. Funktio on myös aidosti vähenevä, sillä derivaatta  $f'(x) = 0$  vain hetkellisesti. Sillä siis voi olla enintään yksi nollakohta.



Kohtien 1 ja 2 perusteella funktiolla  $f$  on täsmälleen yksi nollakohta.

## 124

Funktio  $f$  saa arvon 3 funktion  $g(x) = x - e^{-x} - 3$  nollakohdissa.

Funktio  $g$  on määritelty ja jatkuva kaikkialla.

- 1) Osoitetaan ensin, että funktiolla  $g$  on ainakin yksi nollakohta.

Lasketaan funktion  $g$  arvoja.

$$g(3) = 3 - e^{-3} - 3 = -0,0497... < 0$$

$$g(4) = 4 - e^{-4} - 3 = 0,9816... > 0$$

Koska funktio on jatkuva suljetulla välillä  $[3, 4]$  ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla  $g$  on ainakin yksi nollakohta välillä  $]3, 4[$ .

- 2) Osoitetaan seuraavaksi, että funktiolla  $g$  on enintään yksi nollakohta.

Tutkitaan funktion  $g$  kulkua derivaattafunktion avulla.

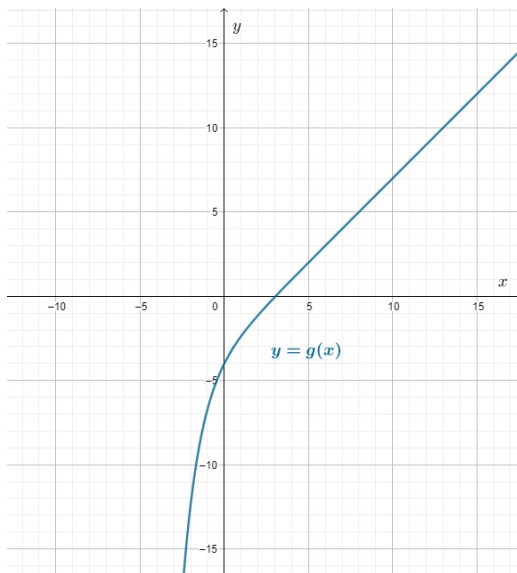
Määritetään derivaattafunktio.

$$g'(x) = 1 + e^x$$

Koska

$$g'(x) = 1 + e^x > 1 + 0 = 1 > 0$$

kaikilla  $x$ , niin funktio on aidosti kasvava. Sillä siis voi olla enintään yksi nollakohta.



Kohtien 1 ja 2 perusteella funktiolla  $g$  on täsmälleen yksi nollakohta, joten myös funktio  $f$  saa arvon 3 täsmälleen kerran.

## 125

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$e^{x^2} + x^2 = 5$$

$$e^{x^2} + x^2 - 5 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $f(x) = e^{x^2} + x^2 - 5$  nollakohdat.

Funktio  $f$  on kaikkialla jatkuva.

1) Tutkitaan funktion  $f$  kulkua derivaattafunktion avulla.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = 2xe^{x^2} + 2x$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$2xe^{x^2} + 2x = 0$$

$$2x(e^{x^2} + 1) = 0$$

Koska  $e^{x^2} + 1 > 0$  kaikilla  $x$ , niin tulon nollasäännön nojalla

$$2x = 0$$

$$x = 0.$$

Laaditaan funktion  $f$  kulkukaavio.

|         |                                                                                   |                                                                                   |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
|         | 0                                                                                 |                                                                                   |
| $f'(x)$ | —                                                                                 | +                                                                                 |
| $f(x)$  |  |  |

| $x$ | $f'(x)$   | merkki |
|-----|-----------|--------|
| -1  | -7,436... | —      |
| 1   | 7,436...  | +      |

Funktio  $f$  on aidosti vähenevä välillä  $x \leq 0$ , joten sillä on korkeintaan yksi nollakohta välillä  $x \leq 0$ .

Funktio  $f$  on aidosti kasvava välillä  $x \geq 0$ , joten sillä on korkeintaan yksi nollakohta välillä  $x \geq 0$ .

Näin ollen funktiolla  $f$  voi olla enintään kaksi nollakohtaa.

2) Etsitään funktion  $f$  nollakohtia.

Lasketaan funktion arvoja välillä  $x \leq 0$ .

$$f(-2) = e^{(-2)^2} + (-2)^2 - 5 = 53,59... > 0$$

$$f(0) = e^{0^2} + 0^2 - 5 = -4 < 0$$

Funktiolla  $f$  on ainakin yksi nollakohta välillä  $] -2, 0[$ .

Lasketaan funktion arvoja välillä  $x \geq 0$ .

$$f(2) = e^{2^2} + 2^2 - 5 = 53,59... > 0$$

Funktiolla  $f$  on ainakin yksi nollakohta välillä  $] 0, 2[$ .

Koska välit  $]-2, 0[$  ja  $]0, 2[$  ovat erilliset, funktiolla  $f$  on ainakin kaksi nollakohtaa.

Kohdassa 1 todettiin, että funktiolla  $f$  on enintään kaksi nollakohtaa. Kohdassa 2 osoitettiin, että funktiolla  $f$  on ainakin kaksi nollakohtaa. Siten funktiolla  $f(x) = e^{x^2} + x^2 - 5$  on täsmälleen kaksi nollakohtaa ja yhtälöllä  $e^{x^2} + x^2 = 5$  täsmälleen kaksi ratkaisua.

Vastaus     kaksi ratkaisua

## 126

- a) Tutkitaan funktion kulkua derivaattafunktion avulla.

Määritetään funktion  $f$  derivaattafunktio.

$$f'(x) = 6x^5 - 1$$

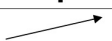
Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$6x^5 - 1 = 0$$

$$x^5 = \frac{1}{6}$$

$$x = \sqrt[5]{\frac{1}{6}}$$

Laaditaan funktion  $f$  kulkukaavio.

|         |                                                                                     |                                                                                     |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|         | $\sqrt[5]{\frac{1}{6}}$                                                             |                                                                                     |
| $f'(x)$ | —                                                                                   | +                                                                                   |
| $f(x)$  |  |  |

| $x$ | $f'(x)$ | merkki |
|-----|---------|--------|
| 0   | -1      | —      |
| 1   | 5       | +      |

Funktio  $f$  saa siis pienimmän arvonsa kohdassa  $x = \sqrt[5]{\frac{1}{6}}$ .

Lasketaan funktion arvo tässä kohdassa.

$$f\left(\sqrt[5]{\frac{1}{6}}\right) = \left(\sqrt[5]{\frac{1}{6}}\right)^6 - \sqrt[5]{\frac{1}{6}} + 1 = 0,4176... > 0$$

Koska funktion pienin arvo on positiivinen, ei funktiolla ole yhtään nollakohtaa.

b) Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$x^6 - x + 1 = 1 - \sqrt{x}$$

$$x^6 - x + \sqrt{x} = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $g(x) = x^6 - x + \sqrt{x}$  nollakohdat.

Funktio  $g$  on määritelty ja jatkuva, kun  $x \geq 0$ .

Funktiolla  $g$  on ainakin yksi nollakohta, sillä

$$g(0) = 0^6 - 0 + \sqrt{0} = 0.$$

Osoitetaan seuraavaksi, että funktiolla  $f$  on enintään yksi nollakohta.

Tutkitaan funktion  $f$  kulkua derivaattafunktion avulla.

Määritetään derivaattafunktio.

$$g'(x) = 6x^5 - 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat laskimella.

Tulokseksi saadaan  $x = 0,253148\dots$  ja  $x = 0,560596\dots$ .

Laaditaan funktion  $g$  kulkukaavio.

|         |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
|         | 0,253...                                                                          | 0,560...                                                                          |                                                                                   |
| $g'(x)$ | +                                                                                 | -                                                                                 | +                                                                                 |
| $g(x)$  |  |  |  |

| $x$ | $g'(x)$   | merkki |
|-----|-----------|--------|
| 0,1 | 0,581...  | +      |
| 0,3 | -0,072... | -      |
| 1   | 5,5       | +      |

Kulkukaaviosta nähdään, että funktiolla  $g$  on minimikohta  $x = 0,560596... \text{ .}$  Lasketaan funktion arvo laskimella tässä kohdassa.

$$g(0,560596...) = 0,219172... > 0$$

Funktion kaikki arvot ovat siis positiivisia, kun  $x > 0$ , joten sen ainoa nollakohta on  $x = 0$ .

## 127

- a) Funktio  $f$  on määritelty ja jatkuva, kun  $x \neq 0$ .

Lasketaan funktion  $f$  arvot kohdissa 0,001 ja 0,01.

$$f(0,001) = \sin \frac{1}{0,001} - 0,001 = 0,8258... > 0$$

$$f(0,01) = \sin \frac{1}{0,01} - 0,01 = -0,5163... < 0$$

Koska funktio  $f$  on jatkuva välillä  $[0,001; 0,01]$  ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, niin sillä on ainakin yksi nollakohta välillä  $]0; 0,01[$ .

- b) Kun  $0 < x < \frac{1}{10^n}$ , niin  $\frac{1}{x} > 10^n$ . Välillä  $]10^n, \infty[$  sinifunktio saa arvot  $-1$  ja  $1$  äärettömän monta kertaa. Kohdassa, jossa  $\sin \frac{1}{x} = 1$ , on  $f(x) = 1 - x > 0$ . Kohdassa, jossa  $\sin \frac{1}{x} = -1$ , on  $f(x) = -1 - x < 0$ .

## 128

Funktio  $f(x) = 2^x - 3x$  on jatkuva kaikkialla.

Taulukoidaan puolitusmenetelmän kulku välillä  $[0, 1]$ .

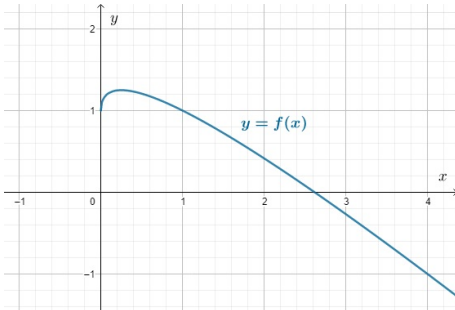
| funktion arvot                  | nollakohta välillä        | välin<br>keskipiste |
|---------------------------------|---------------------------|---------------------|
| $f(0) = 1 > 0$                  |                           |                     |
| $f(1) = -1 < 0$                 | $]0; 1[$                  | 0,5                 |
| $f(0,5) = -0,085... < 0$        | $]0; 0,5[$                | 0,25                |
| $f(0,25) = 0,439... > 0$        | $]0,25; 0,5[$             | 0,375               |
| $f(0,375) = 0,171... > 0$       | $]0,375; 0,5[$            | 0,4375              |
| $f(0,4375) = 0,041... > 0$      | $]0,4375; 0,5[$           | 0,46875             |
| $f(0,46875) = -0,022... < 0$    | $]0,4375; 0,46875[$       | 0,453125            |
| $f(0,453125) = -0,009... < 0$   | $]0,4375; 0,453125[$      | 0,4453125           |
| $f(0,4453125) = 0,025... > 0$   | $]0,4453125; 0,453125[$   | 0,44921875          |
| $f(0,44921875) = 0,017... > 0$  | $]0,44921875; 0,453125[$  | 0,451171875         |
| $f(0,451171875) = 0,013... > 0$ | $]0,451171875; 0,453125[$ |                     |

Viimeisen välin molemmat päätepisteet pyöristyvät yhden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Nollakohta on noin 0,5.

Vastaus 0,5

## 129

Funktio  $f(x) = \sqrt{x} - x + 1$  on määritelty ja jatkuva, kun  $x \geq 0$ .



Kuvaajan perusteella funktiolla on yksi nollakohta välillä  $]2, 3[$ .

Taulukoidaan puolitusmenetelmän kulku välillä  $[2, 3]$ .

| funktion arvot             | nollakohta välillä | välin<br>keskipiste |
|----------------------------|--------------------|---------------------|
| $f(2) = 0,414... > 0$      | $]2, 3[$           | 2,5                 |
| $f(3) = -0,267... < 0$     |                    |                     |
| $f(2,5) = 0,081... > 0$    | $]2,5, 3[$         | 2,75                |
| $f(2,75) = -0,091... < 0$  | $]2,5, 2,75[$      | 2,625               |
| $f(2,625) = -0,004... < 0$ | $]2,5, 2,625[$     | 2,5625              |
| $f(2,5625) = 0,038... > 0$ | $]2,5625, 2,625[$  |                     |

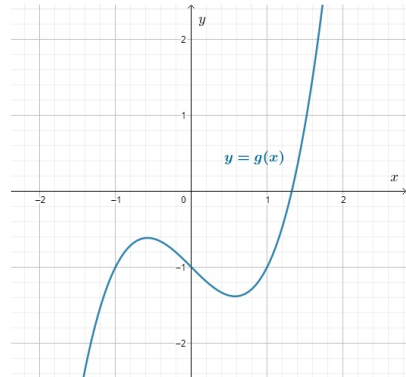
Viimeisen välin molemmat päätepisteet pyöristyvät yhden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Nollakohta on noin 2,6.

Vastaus 2,6

## 130

Funktio  $f$  saa arvon 1 funktion  $g(x) = x^3 - x - 1$  nollakohdissa.  
 Funktio  $g$  on polynomifunktio, joten se on kaikkialla jatkuva.

Kuvaajan perusteella funktiolla  $g$  on yksi nollakohta välillä  $]1, 2[$ .



Taulukoidaan puolitusmenetelmän kulku välillä  $[1, 2]$ .

| funktion arvot              | nollakohta välillä  | välin keskipiste |
|-----------------------------|---------------------|------------------|
| $g(1) = -1 < 0$             | $]1; 2[$            | $1,5$            |
| $g(2) = 5 > 0$              |                     |                  |
| $g(1,5) = 0,875 > 0$        | $]1; 1,5[$          | $1,25$           |
| $g(1,25) = -0,296... < 0$   | $]1,25; 1,5[$       | $1,375$          |
| $g(1,375) = 0,224... > 0$   | $]1,25; 1,375[$     | $1,3125$         |
| $g(1,3125) = -0,051... < 0$ | $]1,3125; 1,375[$   | $1,34375$        |
| $g(1,34375) = 0,082... > 0$ | $]1,3125; 1,34375[$ |                  |

Viimeisen välin molemmat päätepisteet pyöristyvät yhden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Nollakohta on noin 1,3.

Vastaus 1,3

## 131

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$x^3 + x = 3$$

$$x^3 + x - 3 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $f(x) = x^3 + x - 3$  nollakohdat.

Määritetään nollakohta kolmen desimaalin tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

|     | A        | B        | C        | D        | E        | F           |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|-------------|
| 1   | $a$      | $b$      | $c$      | $f(a)$   | $f(c)$   | $f(a) f(c)$ |
| 2   | 1        | 2        | 1,5      | -1       | 1,875    | -1,875      |
| 3   | 1        | 1,5      | 1,25     | -1       | 0,203125 | -0,20313    |
| 4   | 1        | 1,25     | 1,125    | -1       | -0,45117 | 0,451172    |
| ... |          |          |          |          |          |             |
| 14  | 1,213379 | 1,213623 | 1,213501 | -0,00018 | 0,000484 | -8,6E-08    |
| 15  | 1,213379 | 1,213501 | 1,21344  | -0,00018 | 0,000153 | -2,7E-08    |
| 16  | 1,213379 | 1,21344  | 1,213409 | -0,00018 | -1,2E-05 | 2,15E-09    |

Viimeisen välin  $[a, b]$  molemmat päätepisteet pyöristyvät kolmen desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Siis  $x \approx 1,213$ .

Vastaus  $x \approx 1,213$

## 132

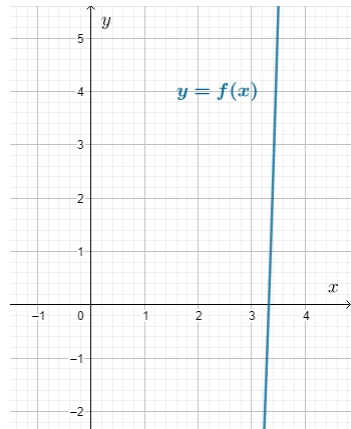
Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$e^x = 31 - x$$

$$e^x + x - 31 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $f(x) = e^x + x - 31$  nollakohdat.

Kuvaajan perusteella funktiolla on yksi nollakohta välillä  $]3, 4[$ .



Määritetään nollakohta kuuden desimaalin tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

|     | A         | B         | C         | D        | E        | F          |
|-----|-----------|-----------|-----------|----------|----------|------------|
| 1   | $a$       | $b$       | $c$       | $f(a)$   | $f(c)$   | $f(a)f(c)$ |
| 2   | 3         | 4         | 3,5       | -7,91446 | 5,615452 | -44,4433   |
| 3   | 3         | 3,5       | 3,25      | -7,91446 | -1,95966 | 15,50966   |
| 4   | 3,25      | 3,5       | 3,375     | -1,95966 | 1,599284 | -3,13405   |
| 5   | 3,25      | 3,375     | 3,3125    | -1,95966 | -0,23383 | 0,45822    |
| ... |           |           |           |          |          |            |
| 22  | 3,3206844 | 3,3206854 | 3,3206849 | -2,7E-05 | -1,3E-05 | 3,55E-10   |
| 23  | 3,3206849 | 3,3206854 | 3,3206851 | -1,3E-05 | -6,4E-06 | 8,39E-11   |

Viimeisen välin  $[a, b]$  molemmat päätepisteet pyöristyvät kuuden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Siis  $x \approx 3,320685$ .

Vastaus  $x \approx 3,320685$

## 133

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$\cos 2x = -x$$

$$\cos 2x + x = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $f(x) = \cos 2x + x$  nollakohdat.

Funktion  $f(x) = \cos 2x + x$  nollakohta on välillä  $]-1, 0[$ , koska funktio on jatkuva ja funktio saa erimerkkiset arvot välin päätepisteissä.

$$f(-1) = -1,416... < 0$$

$$f(0) = 1 > 0$$

Määritetään nollakohta kuuden desimaalin tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

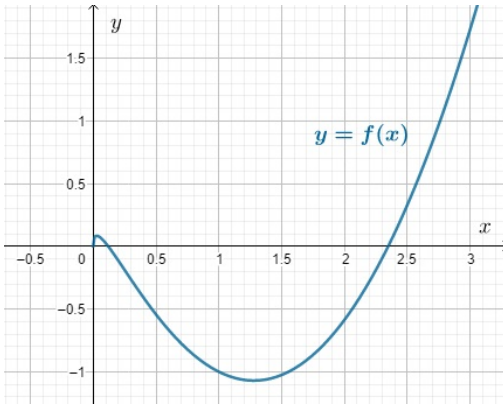
|     | A          | B          | C          | D            | E            | F            |
|-----|------------|------------|------------|--------------|--------------|--------------|
| 1   | $a$        | $b$        | $c$        | $f(a)$       | $f(c)$       | $f(a)f(c)$   |
| 2   | -1         | 0          | -0,5       | -1,4161468   | 0,0403023    | -0,0570740   |
| 3   | -1         | -0,5       | -0,75      | -1,4161468   | -0,6792628   | 0,9619359    |
| 4   | -0,75      | -0,5       | -0,625     | -0,6792628   | -0,3096776   | 0,2103525    |
| 5   | -0,625     | -0,5       | -0,5625    | -0,3096776   | -0,1313235   | 0,0406679    |
| ... |            |            |            |              |              |              |
| 23  | -0,5149336 | -0,5149331 | -0,5149333 | -8,72589E-07 | -2,25411E-07 | 1,96691E-13  |
| 24  | -0,5149333 | -0,5149331 | -0,5149332 | -2,25411E-07 | 9,81777E-08  | -2,21304E-14 |

Viimeisen välin  $[a, b]$  molemmat päätepisteet pyöristyvät kuuden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Siis  $x \approx -0,514933$ .

Vastaus  $x \approx -0,514933$

## 134

Funktio  $f$  on jatkuva ja määritelty, kun  $x \geq 0$ .



Kuvaajan perusteella funktiolla on yksi positiivinen nollakohta välillä  $]0, 0,1[$  ja toinen välillä  $]2, 2,5[$ .

Määritetään välillä  $]0, 0,1[$  oleva nollakohta neljän desimaalin tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

|     | A         | B         | C         | D           | E            | F            |
|-----|-----------|-----------|-----------|-------------|--------------|--------------|
| 1   | $a$       | $b$       | $c$       | $f(a)$      | $f(c)$       | $f(a)f(c)$   |
| 2   | 0,01      | 0,5       | 0,255     | 0,0701      | -0,194999753 | -0,013669483 |
| 3   | 0,01      | 0,255     | 0,1325    | 0,0701      | -0,015938256 | -0,001117272 |
| 4   | 0,01      | 0,1325    | 0,07125   | 0,0701      | 0,058253519  | 0,004083572  |
| 5   | 0,07125   | 0,1325    | 0,101875  | 0,058253519 | 0,023932149  | 0,001394132  |
| ... |           |           |           |             |              |              |
| 15  | 0,1205969 | 0,1206567 | 0,1206268 | 2,35246E-05 | -1,5925E-05  | -3,7463E-10  |
| 16  | 0,1205969 | 0,1206268 | 0,1206119 | 2,35246E-05 | 3,80023E-06  | 8,93989E-11  |

Viimeisen välin  $[a, b]$  molemmat päätepisteet pyöristyvät neljän desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Siis ensimmäinen nollakohta on  $x \approx 0,1206$ .

Määritetään välillä  $]2; 2,5[$  oleva nollakohta samalla tavalla.

|     | A         | B         | C         | D            | E            | F            |
|-----|-----------|-----------|-----------|--------------|--------------|--------------|
| 1   | $a$       | $b$       | $c$       | $f(a)$       | $f(c)$       | $f(a)f(c)$   |
| 2   | 2         | 2,5       | 2,25      | -0,585786438 | -0,1875      | 0,109834957  |
| 3   | 2,25      | 2,5       | 2,375     | -0,1875      | 0,056728501  | -0,010636594 |
| 4   | 2,25      | 2,375     | 2,3125    | -0,1875      | -0,069153117 | 0,01296621   |
| 5   | 2,3125    | 2,375     | 2,34375   | -0,069153117 | -0,007154848 | 0,00049478   |
| ... |           |           |           |              |              |              |
| 15  | 2,3472900 | 2,3473511 | 2,3473206 | -1,27648E-05 | 4,89101E-05  | -6,24327E-10 |
| 16  | 2,3472900 | 2,3473206 | 2,3473053 | -1,27648E-05 | 1,80724E-05  | -2,30691E-10 |

Viimeisen välin  $[a, b]$  molemmat päätepisteet pyöristyvät neljän desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Siis toinen nollakohta on  $x \approx 2,3473$ .

Vastaus     0,1206 ja 2,3473

## 135

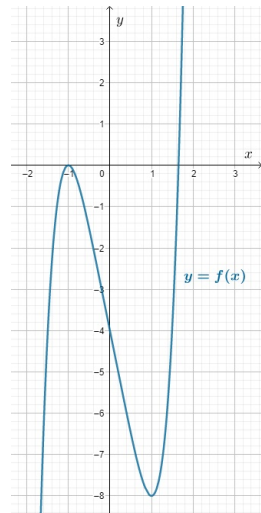
Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$x^5 = 5x + 4$$

$$x^5 - 5x - 4 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $f(x) = x^5 - 5x - 4$  nollakohdat.

Kuvaajan perusteella funktiolla on yksi positiivinen nollakohta välillä  $]1, 2[$ .



Määritetään nollakohta viiden desimaalin tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

|     | A         | B         | C         | D            | E            | F            |
|-----|-----------|-----------|-----------|--------------|--------------|--------------|
| 1   | $a$       | $b$       | $c$       | $f(a)$       | $f(c)$       | $f(a)f(c)$   |
| 2   | 1         | 2         | 1,5       | -8           | -3,90625     | 31,25        |
| 3   | 1,5       | 2         | 1,75      | -3,90625     | 3,663085938  | -14,30892944 |
| 4   | 1,5       | 1,75      | 1,625     | -3,90625     | -0,794036865 | 3,101706505  |
| 5   | 1,625     | 1,75      | 1,6875    | -0,794036865 | 1,246684074  | -0,989913114 |
| ... |           |           |           |              |              |              |
| 18  | 1,6506195 | 1,6506348 | 1,6506271 | -0,000311032 | -6,60061E-05 | 2,053E-08    |
| 19  | 1,6506271 | 1,6506348 | 1,6506310 | -6,60061E-05 | 5,65089E-05  | -3,72993E-09 |

Viimeisen välin  $[a, b]$  molemmat päätepisteet pyöristyvät viiden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Siis  $x \approx 1,65063$ .

Vastaus  $x \approx 1,65063$

## 136

Funktio  $f(x) = \log_2 x + x$  on määritelty ja jatkuva, kun  $x > 0$ .

Taulukoidaan puolitusmenetelmän kulku välillä  $[0,01; 1]$ .

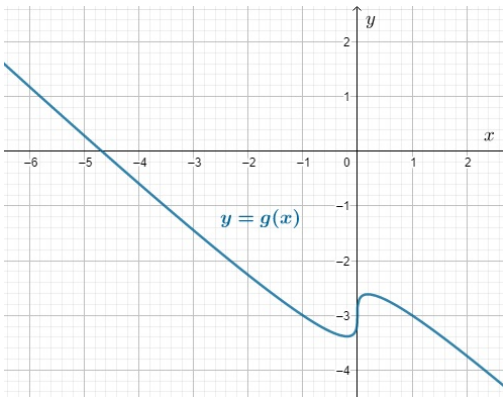
| funktion arvot                              | nollakohta välillä      | välin<br>keskipiste |
|---------------------------------------------|-------------------------|---------------------|
| $f(0,01) = -6,633... < 0$<br>$f(1) = 1 > 0$ | $]0,01; 1[$             | 0,505               |
| $f(0,505) = -0,480... < 0$                  | $]0,505; 1[$            | 0,7525              |
| $f(0,7525) = 0,342... > 0$                  | $]0,505; 0,7525[$       | 0,62875             |
| $f(0,62875) = -0,040... < 0$                | $]0,62875; 0,7525[$     | 0,690625            |
| $f(0,690625) = 0,156... > 0$                | $]0,62875; 0,690625[$   | 0,6596875           |
| $f(0,6596875) = 0,059... > 0$               | $]0,62875; 0,6596875[$  | 0,64421875          |
| $f(0,64421875) = 0,009... > 0$              | $]0,62875; 0,64421875[$ |                     |

Viimeisen välin molemmat päätepisteet pyöristyvät yhden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Nollakohta on noin 0,6.

Vastaus 0,6

## 137

Funktio  $f$  saa arvon 1 funktion  $g(x) = \sqrt[3]{x} - x - 3$  nollakohdissa.  
 Funktio  $g$  on kaikkialla määritelty ja jatkuva.



Kuvaajan perusteella funktiolla  $g$  on yksi nollakohta välillä  $] -5, -4[$ .

Taulukoidaan puolitusmenetelmän kulku välillä  $] -5, -4[$ .

| funktion arvot                | nollakohta välillä     | välin<br>keskipiste |
|-------------------------------|------------------------|---------------------|
| $g(-5) = 0,290... > 0$        |                        |                     |
| $g(-4) = -0,587... < 0$       | $] -5; -4[$            | $-4,5$              |
| $g(-4,5) = -0,150... < 0$     | $] -5; -4,5[$          | $-4,75$             |
| $g(-4,75) = 0,069... > 0$     | $] -4,75; -4,5[$       | $-4,625$            |
| $g(-4,625) = -0,041... < 0$   | $] -4,75; -4,625[$     | $-4,6875$           |
| $g(-4,6875) = 0,013... > 0$   | $] -4,6875; -4,625[$   | $-4,65625$          |
| $g(-4,65625) = -0,013... < 0$ | $] -4,6875; -4,65625[$ |                     |

Viimeisen välin molemmat päätepisteet pyöristyvät yhden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Nollakohta on noin  $-4,7$ .

Vastaus  $-4,7$

## 138

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$x^3 + 5 = x$$

$$x^3 - x + 5 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $f(x) = x^3 - x + 5$  nollakohdat.

Määritetään nollakohta kolmen desimaalin tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

|     | A         | B         | C         | D         | E         | F          |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|
| 1   | $a$       | $b$       | $c$       | $f(a)$    | $f(c)$    | $f(a)f(c)$ |
| 2   | -2        | -1        | -1,5      | -1        | 3,125     | -3,125     |
| 3   | -2        | -1,5      | -1,75     | -1        | 1,390625  | -1,390625  |
| 4   | -2        | -1,75     | -1,875    | -1        | 0,283203  | -0,283203  |
| 5   | -2        | -1,875    | -1,9375   | -1        | -0,335693 | 0,335693   |
| ... |           |           |           |           |           |            |
| 12  | -1,904297 | -1,903320 | -1,903809 | -0,001344 | 0,003479  | -0,000005  |
| 13  | -1,904297 | -1,903809 | -1,904053 | -0,001344 | 0,001068  | -0,000001  |

Viimeisen välin  $[a, b]$  molemmat päätepisteet pyöristyvät kolmen desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Siis  $x \approx -1,904$ .

Vastaus  $x \approx -1,904$

## 139

Leikkauspisteen  $x$ -koordinaatti saadaan yhtälöstä:

$$e^x = 6 - x$$

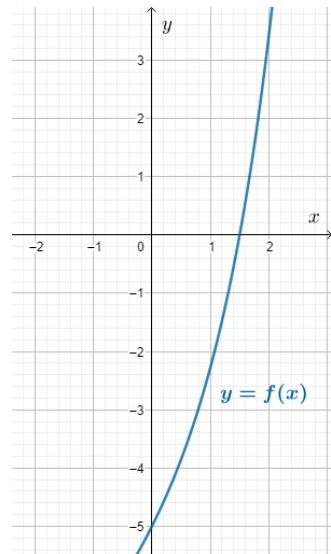
Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$e^x = 6 - x$$

$$e^x + x - 6 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $f(x) = e^x + x - 6$  nollakohdat.

Kuvaajan perusteella funktiolla on yksi nollakohta välillä  $]1, 2[$ .



Määritetään nollakohta kahden desimaalin tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

|     | A   | B          | C           | D            | E            | F            |
|-----|-----|------------|-------------|--------------|--------------|--------------|
| 1   | $a$ | $b$        | $c$         | $f(a)$       | $f(c)$       | $f(a)f(c)$   |
| 2   | 1   | 2          | 1,5         | -2,281718172 | -0,01831093  | 0,041780381  |
| 3   | 1,5 | 2          | 1,75        | -0,01831093  | 1,504602676  | -0,027550674 |
| ... |     |            |             |              |              |              |
| 9   | 1,5 | 1,5078125  | 1,50390625  | -0,01831093  | 0,003136155  | -5,74259E-05 |
| 10  | 1,5 | 1,50390625 | 1,501953125 | -0,01831093  | -0,007595952 | 0,000139089  |

Viimeisen välin  $[a, b]$  molemmat päätepisteet pyöristyvät kahden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Siis  $x \approx 1,50$ .

Leikkauspisteen  $y$  -koordinaatti saadaan esimerkiksi sijoittamalla saatu  $x$  :n arvo suoran yhtälöön.

$$y = 6 - 1,50$$

$$= 4,50$$

Vastaus  $(1,50; 4,50)$

## 140

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$\sin 2x = x^2$$

$$\sin 2x - x^2 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $f(x) = \sin 2x - x^2$  nollakohdat.

Funktion  $f(x) = \sin 2x - x^2$  positiivinen nollakohta on välillä  $]0,5; 1[$ , koska funktio on jatkuva ja funktio saa erimerkkiset arvot välin päätepisteissä.

$$f(0,5) = 0,591... > 0$$

$$f(1) = -0,090... < 0$$

Määritetään nollakohta neljän desimaalin tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

|     | A        | B        | C        | D           | E          | F           |
|-----|----------|----------|----------|-------------|------------|-------------|
| 1   | $a$      | $b$      | $c$      | $f(a)$      | $f(c)$     | $f(a)f(c)$  |
| 2   | 0,5      | 1        | 0,75     | 0,591471    | 0,434995   | 0,257287    |
| 3   | 0,75     | 1        | 0,875    | 0,434995    | 0,218361   | 0,094986    |
| 4   | 0,875    | 1        | 0,9375   | 0,218361    | 0,075180   | 0,016416    |
| 5   | 0,9375   | 1        | 0,96875  | 0,075180    | -0,004962  | -0,000373   |
| ... |          |          |          |             |            |             |
| 14  | 0,966797 | 0,966919 | 0,966858 | 0,000212    | 5,0156E-05 | 1,06082E-08 |
| 15  | 0,966858 | 0,966919 | 0,966888 | 5,01558E-05 | -3,053E-05 | -1,5311E-09 |

Viimeisen välin  $[a, b]$  molemmat päätepisteet pyöristyvät neljän desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Siis  $x \approx 0,9669$ .

Vastaus  $x \approx 0,9669$

## 141

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$\sin 2x = 2 \cos x - 1$$

$$\sin 2x - 2 \cos x + 1 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $f(x) = \sin 2x - 2 \cos x + 1$  nollakohdat.

Määritetään nollakohta neljän numeron tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

|     | A        | B        | C        | D        | E          | F           |
|-----|----------|----------|----------|----------|------------|-------------|
| 1   | $a$      | $b$      | $c$      | $f(a)$   | $f(c)$     | $f(a) f(c)$ |
| 2   | 4        | 5        | 4,5      | 3,296645 | 1,833710   | 6,045092    |
| 3   | 4,5      | 5        | 4,75     | 1,833710 | 0,849645   | 1,558002    |
| 4   | 4,75     | 5        | 4,875    | 0,849645 | 0,356690   | 0,303060    |
| ... |          |          |          |          |            |             |
| 13  | 4,969238 | 4,969727 | 4,969482 | 0,000529 | -0,0003682 | -1,949E-07  |
| 14  | 4,969238 | 4,969482 | 4,969360 | 0,000529 | 8,0468E-05 | 4,2585E-08  |

Viimeisen välin  $[a, b]$  molemmat päätepisteet pyöristyvät neljän numeron tarkkuudella samaan lukuun. Siis  $x \approx 4,969$ .

Vastaus  $x \approx 4,969$

## 142

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$x^3 + \sqrt{x} = 3x$$

$$x^3 + \sqrt{x} - 3x = 0$$

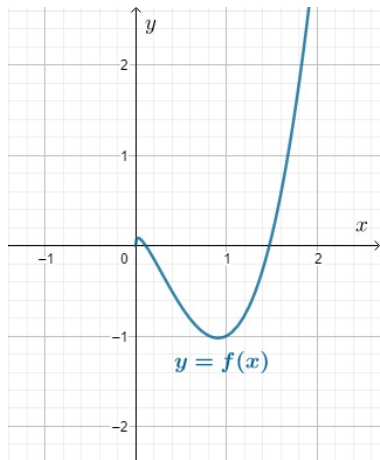
Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $f(x) = x^3 + \sqrt{x} - 3x$  nollakohdat.

Funktio  $f$  on jatkuva ja määritelty, kun  $x \geq 0$ .

Huomataan, että funktion yksi nollakohta on  $x = 0$ .

$$f(0) = 0^3 + \sqrt{0} - 3 \cdot 0 = 0$$

Kuvaajan perusteella funktiolla on toinen nollakohta välillä  $]0, 01;$   $1[$  ja kolmas välillä  $]1, 2[$ .



Määritetään välillä  $]0, 01;$   $1[$  oleva nollakohta kuuden desimaalin tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

|     | A         | B         | C         | D           | E          | F          |
|-----|-----------|-----------|-----------|-------------|------------|------------|
| 1   | $a$       | $b$       | $c$       | $f(a)$      | $f(c)$     | $f(a)f(c)$ |
| 2   | 0,01      | 1         | 0,505     | 0,070001    | -0,6755789 | -0,0472912 |
| 3   | 0,01      | 0,505     | 0,2575    | 0,070001    | -0,2479816 | -0,017359  |
| 4   | 0,01      | 0,2575    | 0,13375   | 0,070001    | -0,0331389 | -0,0023198 |
| 5   | 0,01      | 0,13375   | 0,071875  | 0,070001    | 0,05284144 | 0,00369895 |
| ... |           |           |           |             |            |            |
| 22  | 0,1120462 | 0,1120471 | 0,1120466 | 1,14598E-06 | 4,527E-07  | 5,1878E-13 |
| 23  | 0,1120466 | 0,1120471 | 0,1120469 | 4,52696E-07 | 1,0605E-07 | 4,801E-14  |

Viimeisen välin  $[a, b]$  molemmat päätepisteet pyöristyvät kuuden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Siis toinen nollakohta on  $x \approx 0,112047$ .

Määritetään välillä  $]1, 2[$  oleva nollakohta samalla tavalla.

|     | A         | B         | C         | D            | E          | F          |
|-----|-----------|-----------|-----------|--------------|------------|------------|
| 1   | $a$       | $b$       | $c$       | $f(a)$       | $f(c)$     | $f(a)f(c)$ |
| 2   | 1         | 2         | 1,5       | -1           | 0,09974487 | -0,0997449 |
| 3   | 1         | 1,5       | 1,25      | -1           | -0,678841  | 0,67884101 |
| 4   | 1,25      | 1,5       | 1,375     | -0,678841011 | -0,3527867 | 0,23948607 |
| 5   | 1,375     | 1,5       | 1,4375    | -0,352786685 | -0,1430831 | 0,05047782 |
| ... |           |           |           |              |            |            |
| 21  | 1,4753685 | 1,4753704 | 1,4753695 | -5,39187E-06 | -1,633E-06 | 8,8033E-12 |
| 22  | 1,4753695 | 1,4753704 | 1,4753699 | -1,63269E-06 | 2,469E-07  | -4,031E-13 |

Viimeisen välin  $[a, b]$  molemmat päätepisteet pyöristyvät kuuden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Siis kolmas nollakohta on  $x \approx 1,475370$ .

Vastaus  $x = 0, x \approx 0,112047$  tai  $x \approx 1,475370$

## 143

Funktio  $f$  on kaikkialla jatkuva ja määritelty.

Huomataan, että funktiolla on yksi nollakohta välillä  $]1, 2[$  ja toinen välillä  $]100, 150[$ , sillä funktion saa erimerkkiset arvot näiden välien päätepisteissä.

$$f(1) = -0,9 < 0$$

$$f(2) = 524284,39 > 0$$

$$f(100) = 9,999... \cdot 10^{37} > 0$$

$$f(150) = -4,285... \cdot 10^{41} < 0$$

Määritetään välillä  $]1, 2[$  oleva nollakohta neljän numeron tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

|     | A         | B         | C         | D            | E          | F          |
|-----|-----------|-----------|-----------|--------------|------------|------------|
| 1   | $a$       | $b$       | $c$       | $f(a)$       | $f(c)$     | $f(a)f(c)$ |
| 2   | 1         | 2         | 1,5       | -0,9         | 2214,21885 | -1992,797  |
| 3   | 1         | 1,5       | 1,25      | -0,9         | 67,1582348 | -60,442411 |
| 4   | 1         | 1,25      | 1,125     | -0,9         | 7,3146943  | -6,5832249 |
| 5   | 1         | 1,125     | 1,0625    | -0,9         | 1,18632772 | -1,067695  |
| ... |           |           |           |              |            |            |
| 14  | 1,0354004 | 1,0356445 | 1,0355225 | -0,006984447 | -0,0027939 | 1,9514E-05 |
| 15  | 1,0355225 | 1,0356445 | 1,0355835 | -0,002793896 | -0,0006952 | 1,9422E-06 |

Viimeisen välin  $[a, b]$  molemmat päätepisteet pyöristyvät neljän numeron tarkkuudella samaan lukuun. Siis ensimmäinen nollakohta on  $x \approx 1,036$ .

Määritetään välillä  $]100, 150[$  oleva nollakohta samalla tavalla.

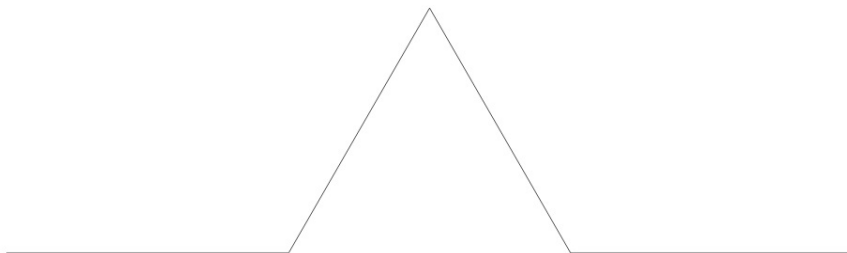
|     | A         | B         | C         | D           | E          | F          |
|-----|-----------|-----------|-----------|-------------|------------|------------|
| 1   | $a$       | $b$       | $c$       | $f(a)$      | $f(c)$     | $f(a)f(c)$ |
| 2   | 100       | 150       | 125       | 1E+38       | 6,9388E+39 | 6,9388E+77 |
| 3   | 125       | 150       | 137,5     | 6,93882E+39 | 4,2225E+40 | 2,9299E+80 |
| 4   | 137,5     | 150       | 143,75    | 4,22245E+40 | 8,6981E+40 | 3,6727E+81 |
| 5   | 143,75    | 150       | 146,875   | 8,69813E+40 | 6,1112E+40 | 5,3156E+81 |
| ... |           |           |           |             |            |            |
| 10  | 147,85156 | 148,04688 | 147,94922 | 4,79566E+39 | -3,669E+39 | -1,759E+79 |
| 11  | 147,85156 | 147,94922 | 147,90039 | 4,79566E+39 | 6,4337E+38 | 3,0854E+78 |

Viimeisen välin  $[a, b]$  molemmat päätepisteet pyöristyvät neljän numeron tarkkuudella samaan lukuun. Siis toinen nollakohta on  $x \approx 147,9$ .

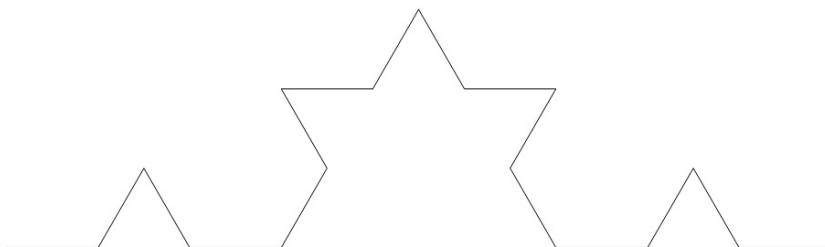
Vastaus 1,036 ja 147,9

## 144

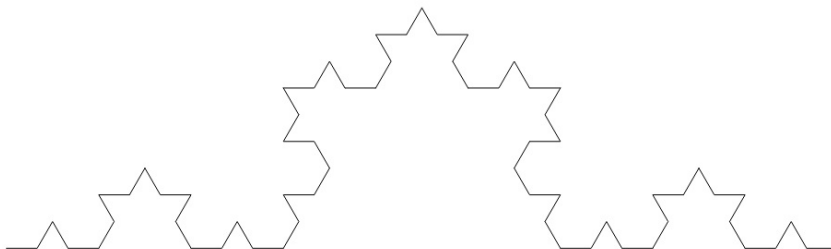
Kuvio 1. iterointikierroksen jälkeen:



Kuvio 2. iterointikierroksen jälkeen:



Kuvio 3. iterointikierroksen jälkeen:



# 145

- a) Tutkitaan lukujonoa taulukkolaskentaohjelmalla.

|     | A           |
|-----|-------------|
| 1   | 1           |
| 2   | 1,414213562 |
| 3   | 1,632526919 |
| 4   | 1,760839556 |
| ... |             |
| 58  | 1,999999999 |
| 59  | 2,000000000 |
| 60  | 2,000000000 |

Iterointi näyttää lähestyvän lukua 2.

- b)

|     | A           |
|-----|-------------|
| 1   | 3           |
| 2   | 2,828427125 |
| 3   | 2,665144143 |
| 4   | 2,518512814 |
| ... |             |
| 61  | 2,000000001 |
| 62  | 2,000000000 |
| 63  | 2,000000000 |

Iterointi näyttää lähestyvän lukua 2.

- c) Huomataan, että koska  $f(4) = (\sqrt{2})^4 = 4$ , jokaisen iterointikierroksen jälkeen luku on edelleen sama.

Siis iterointi lähestyy lukua 4.

d)

|   | A           |
|---|-------------|
| 1 | 5           |
| 2 | 5,656854249 |
| 3 | 7,102993301 |
| 4 | 11,7248426  |
| 5 | 58,17878657 |
| 6 | 571189129,9 |

Luvut näyttäisivät kasvavan jokaisella iterointikierroksella (kierroksen 7 jälkeen niin suuriksi, ettei taulukkolaskentaohjelma pysty niitä enää laskemaan), joten iterointi ei lähesty mitään tiettyä lukua.

Vastaus    a) 2   b) 2   c) 4   d) Ei mitään tiettyä lukua

## 146

- a) Lähdetään alkuarvosta 1 ja sijoitetaan saatu funktion arvo aina uudestaan funktion lausekkeeseen.

1. Iteraatio:  $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$

2. Iteraatio:  $f(2) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

3. Iteraatio:  $f\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}$

4. Iteraatio:  $f\left(\frac{5}{2}\right) = 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{7}{5}$

- b) Tutkitaan lukujonoa taulukkolaskentaohjelmalla.

|     | A           |
|-----|-------------|
| 1   | 1           |
| 2   | 2           |
| 3   | 1,5         |
| 4   | 1,666666667 |
| ... |             |
| 10  | 1,618181818 |
| 11  | 1,617977528 |
| 12  | 1,618055556 |
| 13  | 1,618025751 |

Iterointi näyttää kolmen desimaalin tarkkuudella lähestyvän lukua 1,618.

Vastaus a)  $2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$  ja  $\frac{8}{5}$  b) 1,618

## 147

Lähdetään alkuarvosta  $x$  ja sijoitetaan saatu funktion arvo aina uudestaan funktion lausekkeeseen.

$$f^1(x) = 2x - 1$$

$$f^2(2x - 1) = 2(2x - 1) - 1 = 4x - 3$$

$$f^3(4x - 3) = 2(4x - 3) - 1 = 8x - 7$$

$$f^4(8x - 7) = 2(8x - 7) - 1 = 16x - 15$$

$$f^5(16x - 15) = 2(16x - 15) - 1 = 32x - 31$$

**148**

Lähdetään alkuarvosta  $x$  ja sijoitetaan saatu funktion arvo aina uudestaan funktion lausekkeeseen.

$$f^1(x) = x - 2$$

$$f^2(x - 2) = (x - 2) - 2 = x - 4$$

$$f^3(x - 4) = (x - 4) - 2 = x - 6$$

$$f^4(x - 6) = (x - 6) - 2 = x - 8$$

Neljännän ensimmäisen iterointikierroksen perusteella näyttää olevan

$$f^n(x) = x - n \cdot 2$$

Vastaus  $f^n(x) = x - 2n$

## 149

- a) Määritetään jonon neljä ensimmäistä jäsentä.

$$x_1 = 32$$

$$x_2 = \frac{3}{4} \cdot x_1 = \frac{3}{4} \cdot 32 = 24$$

$$x_3 = \frac{3}{4} \cdot x_2 = \frac{3}{4} \cdot 24 = 18$$

$$x_4 = \frac{3}{4} \cdot x_3 = \frac{3}{4} \cdot 18 = 13,5$$

- b) Tutkitaan lukujonoa taulukkolaskentaohjelmalla.

|     | A           |
|-----|-------------|
| 1   | 32          |
| 2   | 24          |
| 3   | 18          |
| 4   | 13,5        |
| 5   | 10,125      |
| ... |             |
| 87  | 0,000000001 |
| 88  | 0,000000000 |
| 89  | 0,000000000 |

Lukujonon jäsenet näyttävät lähestyvän lukua 0.

Vastaus a)  $x_1 = 32$ ,  $x_2 = 24$ ,  $x_3 = 18$  ja  $x_4 = 13,5$  b) 0

## 150

- a) Määritetään jonon neljä ensimmäistä jäsentä.

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = x_1 + 7 = -1 + 7 = 6$$

$$x_3 = x_2 + 7 = 6 + 7 = 13$$

$$x_4 = x_3 + 7 = 13 + 7 = 20$$

- b) Huomataan, että lukujono on aritmeettinen. Yleinen jäsen on siis muotoa  $x_n = x_1 + (n-1) \cdot d$ , missä  $x_1 = -1$  ja  $d = 7$ .

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + (n-1) \cdot d \\ &= -1 + (n-1) \cdot 7 \\ &= 7n - 8 \end{aligned}$$

Vastaus a)  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 6$ ,  $x_3 = 13$  ja  $x_4 = 20$  b)  $x_n = 7n - 8$

## 151

a)

$$\begin{cases} x_1 = b \\ x_n = \frac{1}{2} \left( x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \right), \text{ kun } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

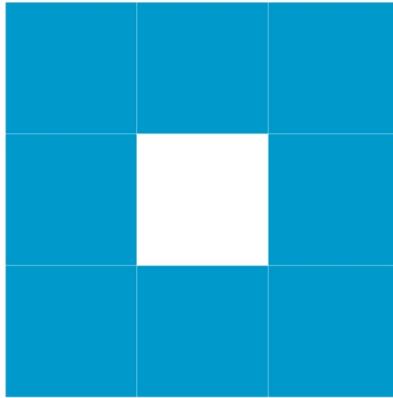
b) Tutkitaan lukujonoa taulukkolaskentaohjelmalla. Otetaan alkuarvoksi esimerkiksi 1.

|   | A           |
|---|-------------|
| 1 | 1           |
| 2 | 2           |
| 3 | 1,75        |
| 4 | 1,732142857 |
| 5 | 1,73205081  |
| 6 | 1,732050808 |
| 7 | 1,732050808 |
| 8 | 1,732050808 |

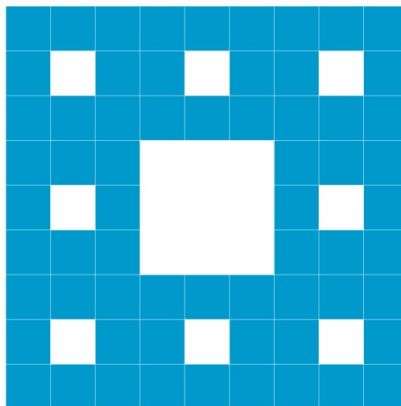
Lukujonon arvot näyttäisivät kuuden desimaalin tarkkuudella lähestyvän lukua 1,732051.

**152**

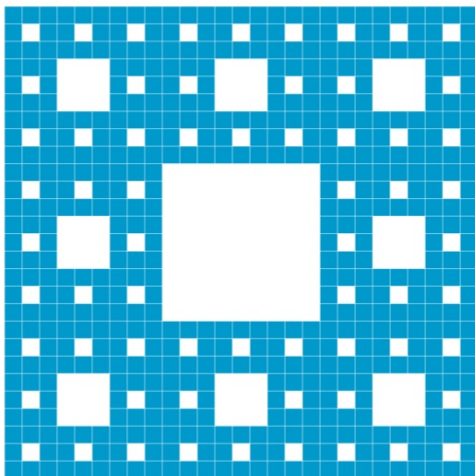
Kuvio 1. iterointikierroksen jälkeen:



Kuvio 2. iterointikierroksen jälkeen:



Kuvio 3. iterointikierroksen jälkeen:



## 153

Tutkitaan lukujonoa taulukkolaskentaohjelmalla.

|     | A              |
|-----|----------------|
| 1   | 1              |
| 2   | 1,414213562... |
| 3   | 1,553773974... |
| 4   | 1,598053182... |
| 5   | 1,611847754... |
| ... |                |
| 19  | 1,618033988... |
| 20  | 1,618033989... |
| 21  | 1,618033989... |

Iterointi näyttää lähestyvän lukua  $d = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803\dots$ .

## 154

- a) Lähdetään alkuarvosta 2 ja sijoitetaan saatu funktion arvo aina uudestaan funktion lausekkeeseen.

$$1. \text{ Iteraatio: } f(2) = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$2. \text{ Iteraatio: } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}} = -1$$

$$3. \text{ Iteraatio: } f(-1) = \frac{-1-1}{-1} = 2$$

$$4. \text{ Iteraatio: } f(2) = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

- b) Ei lähesty, koska neljäs iterointikierrros antaa saman luvun kuin ensimmäinen.

Vastaus a)  $\frac{1}{2}$ ,  $-1$ ,  $2$  ja  $\frac{1}{2}$  b) Ei lähesty.

## 155

Lähdetään alkuarvosta  $x > 0$  ja sijoitetaan saatu funktion arvo aina uudestaan funktion lausekkeeseen.

$$f^1(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f^2(x^{\frac{1}{2}}) = (x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{4}}$$

$$f^3(x^{\frac{1}{4}}) = (x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{8}}$$

$$f^4(x^{\frac{1}{8}}) = (x^{\frac{1}{8}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{16}}$$

Neljännän ensimmäisen iteroitokierroksen perusteella näyttää olevan

$$f^n(x) = x^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = x^{\frac{1}{2^n}}, \text{ missä } x > 0.$$

Vastaus  $f^n(x) = x^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = x^{\frac{1}{2^n}}, \text{ missä } x > 0$

**156**

Lähdetään alkuarvosta  $x > 0$  ja sijoitetaan saatu funktion arvo aina uudestaan funktion lausekkeeseen.

$$f^1(x) = 3x^2$$

$$f^2(3x^2) = 3 \cdot (3x^2)^2 = 3^3 \cdot x^4$$

$$f^3(3^3 \cdot x^4) = 3 \cdot (3^3 \cdot x^4)^2 = 3^7 \cdot x^8$$

$$f^4(3^7 \cdot x^8) = 3 \cdot (3^7 \cdot x^8)^2 = 3^{15} \cdot x^{16}$$

Neljännän ensimmäisen iterointikierroksen perusteella näyttää olevan

$$f^n(x) = 3^{n-1} \cdot x^{2^n}, \text{ missä } x > 0.$$

Vastaus  $f^n(x) = 3^{n-1} x^{2^n}, \text{ missä } x > 0$

## 157

- a) Tutkitaan lukujonoa taulukkolaskentaohjelmalla, kun  $a_1 = \frac{3}{2}$  ja

$$a_2 = \frac{2}{3}.$$

|     | A           |
|-----|-------------|
| 1   | 1,5         |
| 2   | 0,666666667 |
| 3   | 1           |
| 4   | 0,666666667 |
| ... |             |
| 12  | 0,000001030 |
| 13  | 0,000000000 |
| 14  | 0,000000000 |

Lukujonon jäsenet näyttävät lähestyvän lukua 0.

b) Tutkitaan lukujonoa taulukkolaskentaohjelmalla, kun  $a_1 = 2$  ja

$$a_2 = \frac{2}{3}.$$

|            | <b>A</b>    |
|------------|-------------|
| <b>1</b>   | 2           |
| <b>2</b>   | 0,666666667 |
| <b>3</b>   | 1,333333333 |
| <b>4</b>   | 0,888888889 |
| <b>5</b>   | 1,185185185 |
| <b>...</b> |             |
| <b>22</b>  | 9,3972E+108 |
| <b>23</b>  | 2,0991E+176 |
| <b>24</b>  | 1,9726E+285 |

Lukujonon jäsenet näyttävät vain kasvavan, kun iterointia jatketaan, eli ne eivät lähesty mitään tiettyä lukua.

Vastaus     a) lukua 0   b) ei mitään lukua

## 158

- a) Määritetään jonon neljä ensimmäistä jäsentä.

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2 \cdot x_1 - 3 = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

$$x_3 = 2 \cdot x_2 - 3 = 2 \cdot (-1) - 3 = -5$$

$$x_4 = 2 \cdot x_3 - 3 = 2 \cdot (-5) - 3 = -13$$

- b) Päättellään jonon jäsenen  $x_n = f(n)$  lauseke laskemalla jonon ensimmäisiä jäseniä. Merkitään  $a = 1$ ,  $b = -3$  ja  $q = 2$ .

$$x_1 = a$$

$$x_2 = qx_1 + b = qa + b$$

$$x_3 = qx_2 + b = q(qa + b) + b = q^2a + qb + b$$

$$x_4 = qx_3 + b = q(q^2a + qb + b) + b = q^3a + q^2b + qb + b$$

Havaitun säännönmukaisuuden perusteella

$$x_n = q^{n-1}a + q^{n-2}b + \dots + qb + b.$$

Lausekkeessa esiintyy geometrinen summa

$$b + qb + \dots + q^{n-2}b = \frac{b(1 - q^{n-1})}{1 - q}.$$

Muodostetaan jonon jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} x_n &= q^{n-1}a \cdot \frac{b(1 - q^{n-1})}{1 - q} \\ &= 2^{n-1} \cdot 1 \cdot \frac{-3 \cdot (1 - 2^{n-1})}{1 - 2} \\ &= 2^{n-1} \cdot 3 \cdot (1 - 2^{n-1}) \\ &= 3 - 2 \cdot 2^{n-1} \\ &= 3 - 2^n \end{aligned}$$

missä  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

Vastaus    a) 1, -1, -5, -13    b)  $x_n = 3 - 2^n$

**159**

- a) Kun populaatio kasvaa 6%, se tulee 1,06-kertaiseksi. Tämän jälkeen populaatiosta pyydytetään 10 yksilöä. Näin muodostuu lukujono

$$x_1 = 300$$

$$x_2 = 1,06 \cdot x_1 - 10$$

$$x_3 = 1,06 \cdot x_2 - 10$$

... .

Jonon rekursiokaava on

$$\begin{cases} x_1 = 300 \\ x_n = 1,06x_{n-1} - 10, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

- b) Tutkitaan jonon jäseniä taulukkolaskentaohjelmalla.

|     | A           |
|-----|-------------|
| 1   | 300         |
| 2   | 308         |
| 3   | 316,48      |
| ... |             |
| 9   | 379,1797433 |
| 10  | 391,9305279 |
| 11  | 405,4463595 |

Populaation suuruus ylittää 400 yksilöä 11. seurantavuoden alussa.

- c) Päättellään jonon  $x_n = f(n)$  laskemalla jonon ensimmäisiä jäseniä. Merkitään  $a = 300$ ,  $b = -10$  ja  $q = 1,06$ .

$$x_1 = a$$

$$x_2 = qx_1 + b = qa + b$$

$$x_3 = qx_2 + b = q(qa + b) + b = q^2a + qb + b$$

$$x_4 = qx_3 + b = q(q^2a + qb + b) + b = q^3a + q^2b + qb + b$$

Havaitun säännönmukaisuuden perusteella

$$x_n = q^{n-1}a + q^{n-2}b + \dots + qb + b.$$

Lausekkeessa esiintyy geometrinen summa

$$b + qb + \dots + q^{n-2}b = \frac{b(1 - q^{n-1})}{1 - q}.$$

Muodostetaan jonon jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned}x_n &= q^{n-1}a + \frac{b(1 - q^{n-1})}{1 - q} \\&= 1,06^{n-1} \cdot 300 + \frac{(-10) \cdot (1 - 1,06^{n-1})}{1 - 1,06} \\&= 1,06^{n-1} \cdot 300 + \frac{500}{3}(1 - 1,06^{n-1}) \\&= \frac{1}{3}(900 \cdot 1,06^{n-1} + 500 - 500 \cdot 1,06^{n-1}) \\&= \frac{1}{3}(400 \cdot 1,06^{n-1} + 500)\end{aligned}$$

- Vastaus
- a)  $\begin{cases} x_1 = 300 \\ x_n = 1,06x_{n-1} - 10, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$
  - b) 11. vuoden
  - c)  $x_n = \frac{1}{3}(400 \cdot 1,06^{n-1} + 500)$

**160**

Kun kanta pienenee 20%, se tulee 0,8-kertaiseksi. Tämän jälkeen kantaan istutetaan  $a$  määrä uusia poikasia. Näin muodostuu lukujono

$$x_1 = 100000$$

$$x_2 = 0,8 \cdot x_1 + a$$

$$x_3 = 0,8 \cdot x_2 + a$$

...

Jonon rekursiokaava on

$$\begin{cases} x_1 = 100000 \\ x_n = 0,8x_{n-1} + a, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

Kannan vakiintuminen 150000 yksilöön tarkoittaa sitä, että kun kanta saavuttaa tämän yksilömäärän, kantaan lisätään vuosittain yhtä paljon kuin siitä pyydystetään, eli  $0,2 \cdot 150000 = 30000$  yksilöä.

Tarkistetaan tämä vielä taulukkolaskentaohjelman avulla, eli asetetaan  $a = 30000$ .

|           | <b>A</b>    |
|-----------|-------------|
| <b>1</b>  | 100000      |
| <b>2</b>  | 110000      |
| <b>3</b>  | 118000      |
| <b>4</b>  | 124400      |
| <b>5</b>  | 129520      |
| ...       |             |
| <b>93</b> | 149999,9999 |
| <b>94</b> | 150000      |
| <b>95</b> | 150000      |

Kanta näyttäisi vakiintuvan 150000 yksilöön, kun  $a = 30000$ .

## 161

Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$f(x) = x^5 - 4x - 4$$

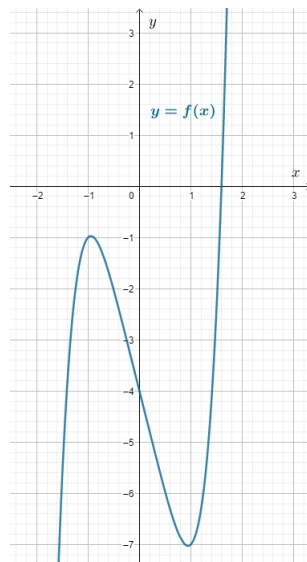
$$f'(x) = 5x^4 - 4$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^5 - 4x_n - 4}{5x_n^4 - 4}$$

Piirretään funktion  $f$  kuvaaja. Kuvan perusteella nollakohta on välillä  $]1, 2[$ . Valitaan alkuarvoksi  $x_1 = 2$ .

Muodostetaan iterointikaavaa vastaava funktio.

$$g(x) = x - \frac{x^5 - 4x - 4}{5x^4 - 4}$$



Iteroidaan funktiota  $g$  lähtien alkuarvosta  $x_1 = 2$ , kunnes iteraation arvo pysyy kolmen desimaalin tarkkuudella muuttumattomana.

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 1,73684210\dots$$

$$x_3 = 1,61978442\dots$$

$$x_4 = 1,59772093\dots$$

$$x_5 = 1,59700690\dots$$

$$x_6 = 1,59700617\dots$$

Arvosta  $x_5$  alkaen jonon jäsenet pyörivät kolmen desimaalin tarkkuudella likiarvoon 1,597.

Nollakohdan likiarvo on siis 1,597.

Vastaus     1,597

## 162

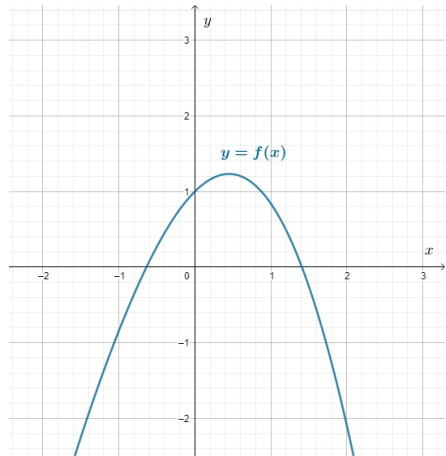
Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$f(x) = \sin x - x^2 + 1$$

$$f'(x) = \cos x - 2x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sin x_n - x_n^2 + 1}{\cos x_n - 2x_n}$$

Piirretään funktion  $f$  kuvaaja.  
Kuvan perusteella nollakohdat  
ovat väleillä  $] -1, 0[$  ja  $]1, 2[$ .  
Valitaan ensimmäisen iteroinnin  
alkuarvoksi  $x_1 = -1$  ja toisen  
alkuarvoksi  $x_1 = 2$ .



Muodostetaan iterointikaavaa  
vastaava funktio.

$$g(x) = x - \frac{\sin x - x^2 + 1}{\cos x - 2x}$$

Iteroidaan funktiota  $g$  lähtien alkuarvosta  $x_1 = -1$ , kunnes iteraation arvo pysyy kahden desimaalin tarkkuudella muuttumattomana.

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = -0,66875163\dots$$

$$x_3 = -0,63706803\dots$$

$$x_4 = -0,63673268\dots$$

Arvosta  $x_3$  alkaen jonon jäsenet pyöristyvät kahden desimaalin tarkkuudella likiarvoon  $-0,64$ .

Ensimmäisen nollakohdan likiarvo on siis  $-0,64$ .

Selvitetään toisen nollakohdan likiarvo vastaavasti, lähtemälle alkuarvosta  $x_1 = 2$ .

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 1,52657765\dots$$

$$x_3 = 1,41643401\dots$$

$$x_4 = 1,40964986\dots$$

$$x_5 = 1,40962400\dots$$

Arvosta  $x_4$  alkaen jonon jäsenet pyöristyvät kahden desimaalin tarkkuudella likiarvoon 1,41.

Toisen nollakohdan likiarvo on siis 1,41.

Vastaus  $-0,64$  ja  $1,41$

**163**

Yhtälön määrittelyehto on  $x > 0$ .

Muokataan yhtälöä.

$$\ln x = -x^2$$

$$\ln x + x^2 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $f(x) = \ln x + x^2$  nollakohdat.

Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaavaa vastaava funktio  $g$ .

$$f(x) = \ln x + x^2$$

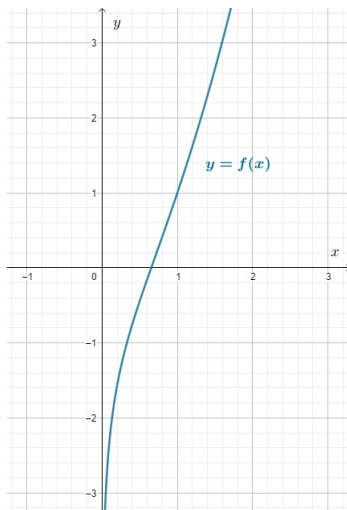
$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2x$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{\ln x + x^2}{\frac{1}{x} + 2x}$$

Piirretään funktion  $f$  kuvaaja.

Kuvan perusteella funktion nollakohta on välillä  $]0, 1[$ . Valitaan alkuarvoksi  $x_1 = 1$ .

| $x_n$ | Iteraatio $g(x_{n-1})$ |
|-------|------------------------|
| $x_1$ | 1                      |
| $x_2$ | 0,66666666...          |
| $x_3$ | 0,65290925...          |
| $x_4$ | 0,65291864...          |
| $x_5$ | 0,65291864...          |



Iteroinnin perusteella nollakohdan likiarvo viiden desimaalin tarkkuudella on 0,65292.

Vastaus  $x \approx 0,65292$

## 164

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion

$$f(x) = 4x^3 + 18x^2 + 23x + 7 \text{ nollakohdat.}$$

Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaavaa vastaava funktio  $g$ .

$$f(x) = 4x^3 + 18x^2 + 23x + 7$$

$$f'(x) = 12x^2 + 36x + 23$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{4x^3 + 18x^2 + 23x + 7}{12x^2 + 36x + 23}$$

Piirretään funktion  $f$  kuvaaja.

Kuvan perusteella näyttäisi, että välillä  $] -1, 0[$  oleva nollakohta

olisi lähimpänä kohtaa  $x = -1$ .

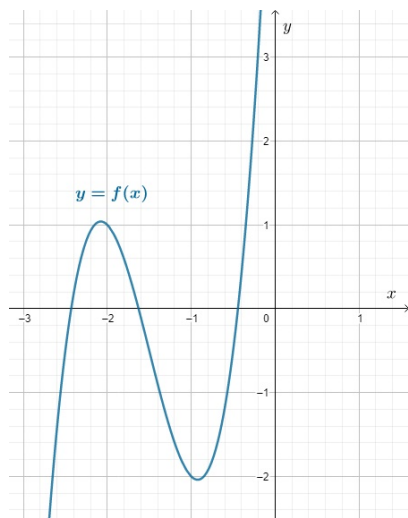
Koska ero on kuitenkin pieni, selvitetään myös varmuuden vuoksi välillä  $] -2, -1[$  oleva nollakohta.

Valitaan välin  $] -2, -1[$

nollakohdan iteroinnin alkuarvoksi

$x_1 = -1,5$  ja välin  $] -1, 0[$

alkuarvoksi  $x_1 = -0,5$ .



| $x_n$ | Iteraatio $g(x_{n-1})$ | Iteraatio $g(x_{n-1})$ |
|-------|------------------------|------------------------|
| $x_1$ | -1,5                   | -0,5                   |
| $x_2$ | -1,625                 | -0,4375                |
| $x_3$ | -1,62704918...         | -0,44251227...         |
| $x_4$ | -1,62705084...         | -0,44254622...         |
| $x_5$ | -1,62705084...         | -0,44254622...         |

Iteroinnin perusteella nollakohtien likiarvot neljän desimaalin tarkkuudella ovat  $-1,6271$  ja  $-0,4425$ . Jälkimmäinen on lähempänä arvoa  $-1$ , joten se on kysytty nollakohta.

Vastaus  $x \approx -0,4425$

**165**

Luku  $\sqrt[3]{3}$  on yhtälön

$$x^3 = 3$$

$$x^3 - 3 = 0$$

ratkaisu. Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $f(x) = x^3 - 3$  nollakohdat.

Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$f(x) = x^3 - 3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - 3}{3x^2}$$

Luku  $\sqrt[3]{3}$  on välillä  $]1, 2[$ , sillä

$$1 = \sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{8} = 2.$$

Valitaan iteroinnin alkuarvoksi  $x_1 = 1$ .

| $x_n$ | Iteraatio $g(x_{n-1})$ |
|-------|------------------------|
| $x_1$ | 1                      |
| $x_2$ | 1,66666666...          |
| $x_3$ | 1,47111111...          |
| $x_4$ | 1,44281209...          |
| $x_5$ | 1,44224979...          |
| $x_6$ | 1,44224957...          |

Iteroinnin perusteella  $\sqrt[3]{3} \approx 1,442$ .

Vastaus 1,442

## 166

- a) Kun  $f(x) = x^3 - 2x - 5$ , niin  $f'(x) = 3x^2 - 2$ .
- b) Funktio  $f$  on polynomifunktio, ja siksi se on kaikkialla jatkuva.

Lasketaan funktion  $f$  arvot kohdissa 2 ja 3.

$$f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 - 5 = -1 < 0$$

$$f(3) = 3^3 - 2 \cdot 3 - 5 = 16 > 0$$

Koska funktio  $f$  on jatkuva välillä  $[2, 3]$  ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, niin sillä on ainakin yksi nollakohta välillä  $]2, 3[$ .

c) Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$f(x) = x^3 - 2x - 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - 2x - 5}{3x^2 - 2}$$

Lasketaan funktiolle  $g$  neljä iteraatioaskelta lähtien alkuarvosta  $x_0 = 2$ .

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = 2,1$$

$$x_2 = 2,09456812\dots$$

$$x_3 = 2,09455148\dots$$

$$x_4 = 2,09455148\dots$$

Jonon viimeisen jäsenen likiarvo neljän desimaalin tarkkuudella on 2,0946.

Nollakohdan likiarvo on siis  $x \approx 2,0946$ .

- Vastaus
- a)  $f'(x) = 3x^2 - 2$
  - b) Koska funktio on jatkuva, ja  $f(2) < 0$  ja  $f(3) > 0$ , on sillä ainakin yksi nollakohta välillä  $]2, 3[$
  - c)  $x \approx 2,0946$

## 167

- a) Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$x^5 - x = 1$$

$$x^5 - x - 1 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $f(x) = x^5 - x - 1$  nollakohdat.

Polynomifunktio  $f$  on kaikkialla jatkuva.

- 1) Osoitetaan ensin, että funktiolla  $f$  on ainakin yksi nollakohta välillä  $[1, 2]$ .

Lasketaan funktion arvot kohdissa  $x = 1$  ja  $x = 2$ .

$$f(1) = 1^5 - 1 - 1 = -1 < 0$$

$$f(2) = 2^5 - 2 - 1 = 29 > 0$$

Koska funktio on jatkuva suljetulla välillä  $[1, 2]$  ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla  $f$  on ainakin yksi nollakohta välillä  $]1, 2[$ .

- 2) Osoitetaan seuraavaksi, että funktiolla  $f$  on enintään yksi nollakohta.

Tutkitaan funktion  $f$  kulkua derivaattafunktion avulla.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = 5x^4 - 1$$

Kun  $1 \leq x \leq 2$ , niin

$$f'(x) = 5x^4 - 1 \geq 5 \cdot 1^4 - 1 = 4.$$

Funktio on siis tällä välillä aidosti kasvava ja sillä voi olla enintään yksi nollakohta tällä välillä.

Kohtien 1 ja 2 perusteella funktiolla  $f$  on täsmälleen yksi nollakohta välillä  $1 \leq x \leq 2$ .

b) Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$f(x) = x^5 - x - 1$$

$$f'(x) = 5x^4 - 1$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^5 - x - 1}{5x^4 - 1}$$

Lasketaan funktiolle  $g$  neljä iteraatioaskelta lähtien alkuarvosta  $x_0 = 1$ .

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 1,25$$

$$x_2 = 1,17845939...$$

$$x_3 = 1,16753738...$$

$$x_4 = 1,16730408...$$

Jonon viimeisen jäsenen likiarvo kolmen desimaalin tarkkuudella on 1,167.

Nollakohdan likiarvo on siis  $x \approx 1,167$ .

## 168

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$x^3 = x + 2$$

$$x^3 - x - 2 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $f(x) = x^3 - x - 2$  nollakohdat.

Polynomifunktio  $f$  on kaikkialla jatkuva.

Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$f(x) = x^3 - x - 2$$

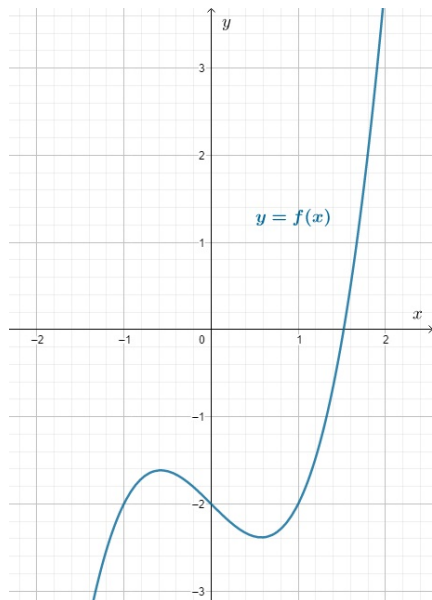
$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - x - 2}{3x^2 - 1}$$

Piirretään funktion  $f$  kuvaaja.

Kuvan perusteella funktion nollakohta on välillä  $]1, 2[$ .

Valitaan alkuarvoksi  $x_1 = 1$ .



Iteroidaan funktiota  $g$  lähtien alkuarvosta  $x_1 = 1$ , kunnes iteraation arvo pysyy kahden desimaalin tarkkuudella muuttumattomana.

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 1,63636363\dots$$

$$x_4 = 1,53039205\dots$$

$$x_5 = 1,521441465\dots$$

$$x_6 = 1,52137971\dots$$

Arvosta  $x_5$  alkaen jonon jäsenet pyöristyvät kahden desimaalin tarkkuudella likiarvoon 1,52.

Nollakohdan likiarvo on siis  $x \approx 1,52$ .

Koska funktio oli jatkuva, ja  $f(1) = -2 < 0$  sekä  $f(2) = 4 > 0$ , on funktiolla todellakin ainakin tämä yksi nollakohta välillä  $]1, 2[$ .

Osoitetaan seuraavaksi, ettei enempää nollakohtia ole välillä  $[1, \infty[$ .

Kun  $x \geq 1$ , niin

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \geq 3 \cdot 1^2 - 1 = 2 > 0.$$

Funktio on siis aidosti kasvava välillä  $x \geq 1$  ja sillä voi olla enintään yksi nollakohta tällä välillä.

Päätelyn perusteella funktiolla on täsmälleen yksi nollakohta ja yhtälöllä on siten täsmälleen yksi ratkaisu välillä  $[1, \infty[$ .

## 169

Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$f(x) = e^x - 4x^2$$

$$f'(x) = e^x - 8x$$

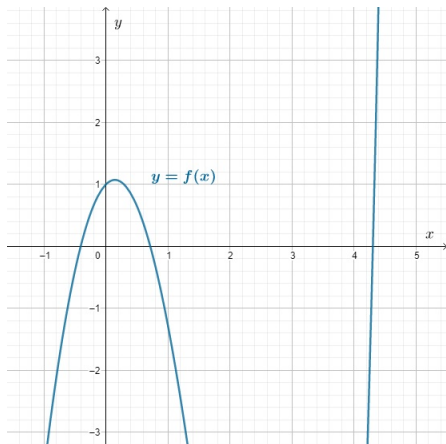
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n} - 4x_n^2}{e^{x_n} - 8x_n}$$

Piirretään funktion  $f$  kuvaaja. Kuvan perusteella positiiviset nollakohdat ovat väleillä  $]0, 1[$  ja  $]4, 5[$ .

Valitaan iteroinnin alkuarvoiksi  $x_1 = 1$  ja  $x_1 = 4$ .

Muodostetaan iterointikaavaa vastaava funktio.

$$g(x) = x - \frac{e^x - 4x^2}{e^x - 8x}$$



| $x_n$ | Iteraatio $g(x_{n-1})$ | Iteraatio $g(x_{n-1})$ |
|-------|------------------------|------------------------|
| $x_1$ | 1                      | 4                      |
| $x_2$ | 0,75732931...          | 4,41604511...          |
| $x_3$ | 0,71616399...          | 4,31565543...          |
| $x_4$ | 0,71480740...          | 4,30665268...          |
| $x_5$ | 0,71480591...          | 4,30658473...          |
| $x_6$ | 0,71480591...          | 4,30658472...          |

Iteroinnin perusteella nollakohtien likiarvot viiden desimaalin tarkkuudella ovat 0,71481 ja 4,30658.

Vastaus  $x \approx 0,71481$  ja  $x \approx 4,30658$

## 170

Muokataan yhtälöä.

$$x \cos x = x^2 - 1$$

$$x \cos x - x^2 + 1 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $f(x) = x \cos x - x^2 + 1$  nollakohdat.

Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

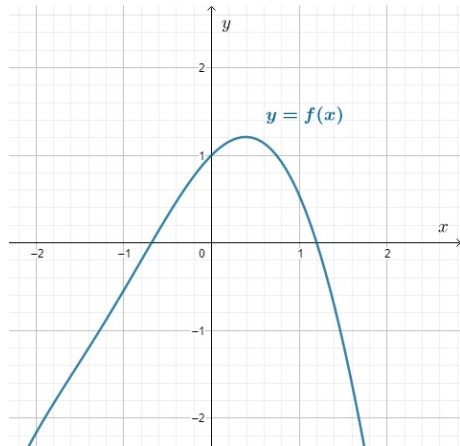
$$f(x) = x \cos x - x^2 + 1$$

$$f'(x) = \cos x - x \sin x - 2x$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x \cos x - x^2 + 1}{\cos x - x \sin x - 2x}$$

Piirretään funktion  $f$  kuvaaja.  
Kuvan perusteella nollakohdat  
ovat väleillä  $] -1, 0[$  ja  $] 1, 2[$ .

Valitaan iteroinnin alkuarvoiksi  
 $x_1 = -1$  ja  $x_1 = 1$ .



| $x_n$ | Iteraatio $g(x_{n-1})$ | Iteraatio $g(x_{n-1})$ |
|-------|------------------------|------------------------|
| $x_1$ | -1                     | 1                      |
| $x_2$ | -0,681956473           | 1,234794742            |
| $x_3$ | -0,685174763           | 1,199222654            |
| $x_4$ | -0,685174134           | 1,198360352            |
| $x_5$ | -0,685174134           | 1,198359845            |

Iteroinnin perusteella nollakohtien likiarvot neljän desimaalin tarkkuudella ovat  $-0,6852$  ja  $1,1984$ .

Vastaus  $x \approx -0,6852$  ja  $x \approx 1,1984$

## 171

a) Luku  $\ln 10$  on yhtälön

$$e^x = 10$$

$$e^x - 10 = 0$$

ratkaisu. Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $f(x) = e^x - 10$  nollakohdat.

Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$f(x) = e^x - 10$$

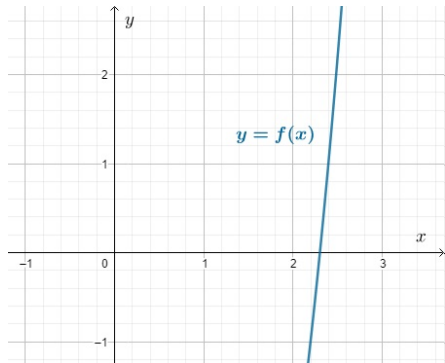
$$f'(x) = e^x$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{e^x - 10}{e^x}$$

Piirretään funktion  $f$  kuvaaja.

Kuvan perusteella nollakohta on välillä  $]2, 3[$ .

Valitaan iteroinnin alkuarvoksi  $x_1 = 2$ .



| $x_n$ | Iteraatio $g(x_{n-1})$ |
|-------|------------------------|
| $x_1$ | 2                      |
| $x_2$ | 2,35335283...          |
| $x_3$ | 2,30385224...          |
| $x_4$ | 2,30258589...          |
| $x_5$ | 2,30258509...          |

Iteroinnin perusteella  $\ln 10 \approx 2,3026$ .

b) Luku  $\ln \frac{1}{2}$  on yhtälön

$$e^x = \frac{1}{2}$$

$$e^x - \frac{1}{2} = 0$$

ratkaisu. Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2} \text{ nollakohdat.}$$

Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}$$

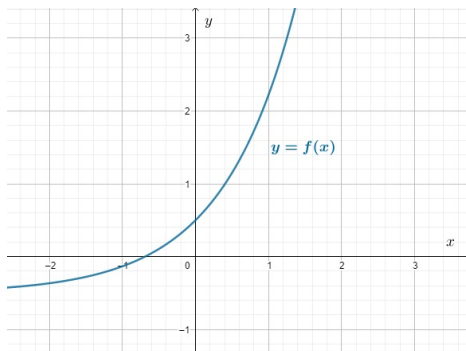
$$f'(x) = e^x$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{e^x - \frac{1}{2}}{e^x}$$

Piirretään funktion  $f$  kuvaaja.

Kuvan perusteella nollakohta on välillä  $]-1, 0[$ .

Valitaan iteroinnin alkuarvoksi  $x_1 = -1$ .



| $x_n$ | Iteraatio $g(x_{n-1})$ |
|-------|------------------------|
| $x_1$ | -1                     |
| $x_2$ | -0,64085908...         |
| $x_3$ | -0,69180367...         |
| $x_4$ | -0,69314627...         |
| $x_5$ | -0,69314718...         |

Iteroinnin perusteella  $\ln \frac{1}{2} \approx -0,6931$ .

Vastaus a) 2,3026 b)  $-0,6931$

## 172

- a) Koska  $\cos \pi = -1$ , voidaan luvun  $a$  arvoksi valita  $-1$ .
- b) Muokataan yhtälöä.

$$\cos x = -1$$

$$\cos x + 1 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $f(x) = \cos x + 1$  nollakohdat.

Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$f(x) = \cos x + 1$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\cos x + 1}{-\sin x}$$

Valitaan iteroinnin alkuarvoksi  $x_1 = 3$ , sillä se on lähellä  $\pi$ :n arvoa.

| $x_n$    | Iteraatio $g(x_{n-1})$ |
|----------|------------------------|
| $x_1$    | 3                      |
| $x_2$    | 3,070914844...         |
| $x_3$    | 3,106268467...         |
| $x_4$    | 3,123932397...         |
| ...      |                        |
| $x_{25}$ | 3,141592642...         |
| $x_{26}$ | 3,141592651...         |
| $x_{27}$ | 3,141592651...         |

Iteroinnin perusteella  $\pi \approx 3,1415927$ .

Vastaus a)  $a = -1$  b) 3,1415927

## 173

Luku  $\sqrt{a}$  on funktion  $f(x) = x^2 - a$  positiivinen nollakohta.

Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$f(x) = x^2 - a$$

$$f'(x) = 2x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

Tällöin siis  $x_n$  saadaan kaavalla

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - a}{2x_{n-1}}.$$

Muokataan kaavan oikeaa puolta.

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - a}{2x_{n-1}} \\ &= x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2}{2x_{n-1}} + \frac{a}{2x_{n-1}} \\ &= x_{n-1} - \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{x_{n-1}} \\ &= \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{x_{n-1}} \\ &= \frac{1}{2} \left( x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right) \end{aligned}$$

## 174

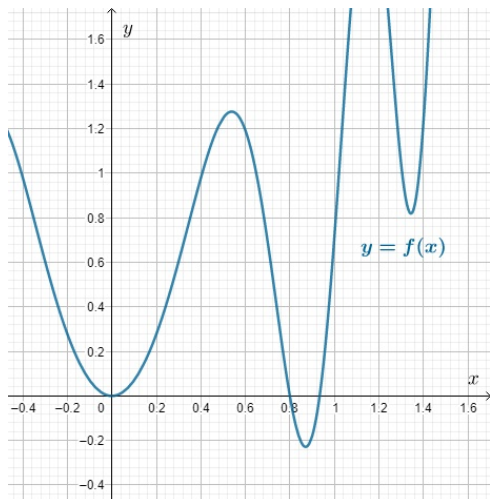
Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaavaa vastaava funktio  $g$ .

$$f(x) = x^2 + \sin 6x^2$$

$$f'(x) = 2x + 12x \cos 6x^2$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 + \sin 6x^2}{2x + 12x \cos 6x^2}$$

Piirretään funktion  $f$  kuvaaja. Valitaan kuvan perusteella ensimmäisen nollakohdan alkuarvoksi  $x_1 = 0,8$  ja toisen alkuarvoksi  $x_1 = 0,9$ .



| $x_n$ | Iteraatio $g(x_{n-1})$ | Iteraatio $g(x_{n-1})$ |
|-------|------------------------|------------------------|
| $x_1$ | 0,8                    | 0,9                    |
| $x_2$ | 0,799478690...         | 0,952864011...         |
| $x_3$ | 0,799479911...         | 0,935495039...         |
| $x_4$ | 0,799479911...         | 0,933308374...         |
| $x_5$ | 0,799479911...         | 0,933270551...         |
| $x_6$ | 0,799479911...         | 0,933270551...         |

Iteroinnin perusteella nollakohtien likiarvot viiden desimaalin tarkkuudella ovat 0,79948 ja 0,93327.

Vastaus  $x \approx 0,79948$  ja  $x \approx 0,93327$

## 175

- a) Yhtälön  $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$  ratkaisut ovat samat kuin funktion  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$  nollakohdat.

Polynomifunktio  $f$  on kaikkialla jatkuva.

- 1) Osoitetaan ensin, että funktiolla  $f$  on ainakin yksi nollakohta.

Lasketaan funktion arvot kohdissa  $x = 1$  ja  $x = 2$ .

$$f(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 - 20 = -7 < 0$$

$$f(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 - 20 = 16 > 0$$

Koska funktio on jatkuva suljetulla välillä  $[1, 2]$  ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla  $f$  on ainakin yksi nollakohta välillä  $]1, 2[$ .

- 2) Osoitetaan seuraavaksi, että funktiolla  $f$  on enintään yksi nollakohta.

Tutkitaan funktion  $f$  kulkua derivaattafunktion avulla.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$$

Derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Lisäksi diskriminantti

$D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = -104 < 0$ , eli derivaattafunktiolla ei ole nollakohtia. Siis  $f'(x) > 0$  kaikilla  $x$  :n arvoilla ja funktio  $f$  on aidosti kasvava. Sillä voi olla siis enintään yksi nollakohta.

Kohtien 1 ja 2 perusteella funktiolla  $f$  on täsmälleen yksi nollakohta.

- b) Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaavaa vastaava funktio  $g$ .

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$$

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 + 2x^2 + 10x - 20}{3x^2 + 4x + 10}$$

Valitaan iteroinnin alkuarvoksi  $x_0 = 1$ .

| $x_n$ | Iteraatio $g(x_{n-1})$ |
|-------|------------------------|
| $x_0$ | 1                      |
| $x_1$ | 1,4117647059...        |
| $x_2$ | 1,3693364706...        |
| $x_3$ | 1,3688081886...        |
| $x_4$ | 1,3688081078...        |
| $x_5$ | 1,3688081078...        |

Saman likiarvon yhdeksän desimaalin tarkkuudella tuottaa neljäs iterointikierrös.

Vastaus     b) 4. iterointikierrös

## 176

Määritetään funktion  $f(x) = x^4 - 10x^2 - 9x$  derivaatafunktiio.

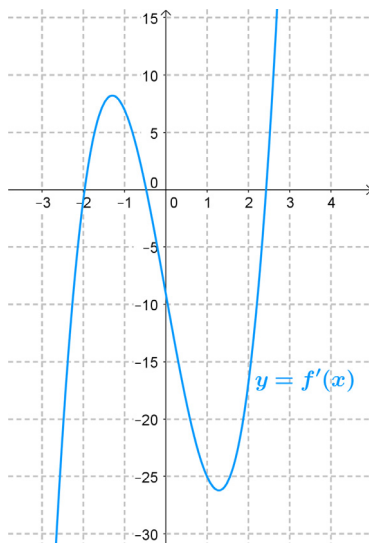
$$f'(x) = 4x^3 - 20x - 9$$

Funktion ääriarvokohdat sijaitsevat derivaatan nollakohdissa.

Piirretään funktion  $f'$  kuvaaja.

Kuvan perusteella yksi derivaatan nollakohta on likimain  $-2$ , ja kaksi muuta sijaitsevat väleillä  $]-1, 0[$  ja  $]2, 3[$ .

Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaavaa vastaava funktio  $g$ .



$$f'(x) = 4x^3 - 20x - 9$$

$$f''(x) = 12x^2 - 20$$

$$g(x) = x - \frac{f'(x)}{f''(x)} = x - \frac{4x^3 - 20x - 9}{12x^2 - 20}$$

Valitaan kuvaajan perusteella iteroinnin alkuarvoiksi  $x_1 = -2$ ,  $x_1 = 0$  ja  $x_1 = 2$ .

| $x_n$ | Iteraatio $g(x_{n-1})$ | Iteraatio $g(x_{n-1})$ | Iteraatio $g(x_{n-1})$ |
|-------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $x_1$ | -2                     | 0                      | 2                      |
| $x_2$ | -1,96428571...         | -0,45                  | 2,60714286...          |
| $x_3$ | -1,96312872...         | -0,47074559...         | 2,44890433...          |
| $x_4$ | -1,96312752...         | -0,47088167...         | 2,43413441...          |
| $x_5$ | -1,96312752...         | -0,47088168...         | 2,43400921...          |

Iteroinnin perusteella derivaatan nollakohtien likiarvot kahden desimaalin tarkkuudella ovat  $-1,96$ ,  $-0,47$  ja  $2,43$ .

Muodostetaan derivaatan kuvaajan avulla funktion kulkukaavio.

|         |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
|         | <b>-1,96</b>                                                                      | <b>-0,47</b>                                                                      | <b>2,43</b>                                                                       |                                                                                   |
| $f'(x)$ | -                                                                                 | +                                                                                 | -                                                                                 | +                                                                                 |
| $f(x)$  |  |  |  |  |
|         | <b>min</b>                                                                        | <b>max</b>                                                                        | <b>min</b>                                                                        |                                                                                   |

Vastaus     minimikohdat  $x \approx -1,96$  ja  $x \approx 2,43$ , maksimikohta  $x \approx -0,47$

## 177

Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$f(x) = -2x^4 + x^3 + 3x^2 + 0,1$$

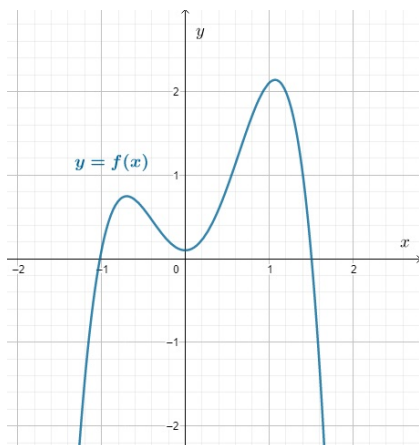
$$f'(x) = -8x^3 + 3x^2 + 6x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{-2x_n^4 + x_n^3 + 3x_n^2 + 0,1}{-8x_n^3 + 3x_n^2 + 6x_n}$$

| $x_n$    | a)             | b)             | c)             |
|----------|----------------|----------------|----------------|
| $x_1$    | -0,5           | 0,5            | 0,6            |
| $x_2$    | -0,02          | 0,19090909...  | 0,21490515...  |
| $x_3$    | 0,83224094...  | 0,01274650...  | 0,03381718...  |
| $x_4$    | 0,10259083...  | -1,29316189... | -0,46838945... |
| ...      |                |                |                |
| $x_{19}$ | -1,01911084... | -1,01911084... | 1,50875536...  |
| $x_{20}$ | -1,01911084... | -1,01911084... | 1,50875536...  |

Piirretään funktion  $f$  kuvaaja.

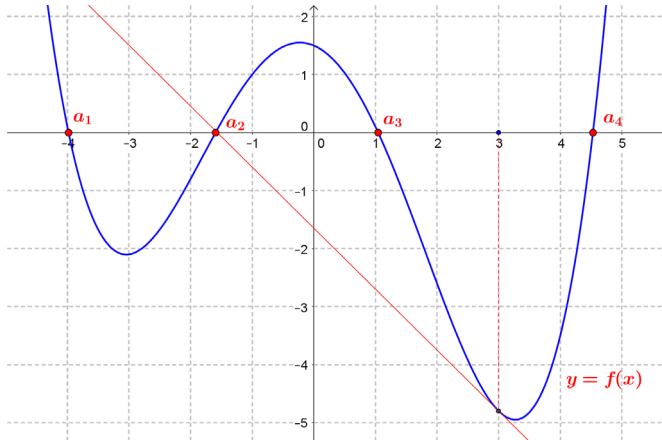
Funktion pienempi nollakohta kolmen desimaalin tarkkuudella on  $x \approx -1,019$ , ja suurempi  $x \approx 1,509$ .



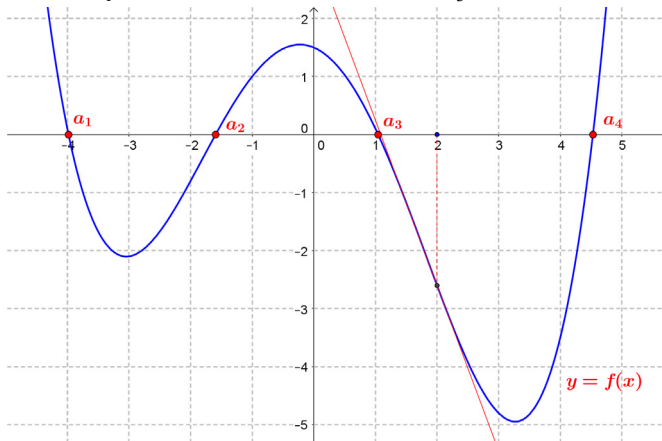
Vastaus    a)  $x_{20} = -1,01911\dots$  b)  $x_{20} = -1,01911\dots$   
c)  $x_{20} = 1,50875\dots$   
nollakohdat ovat  $x \approx -1,019$  ja  $x \approx 1,509$

## 178

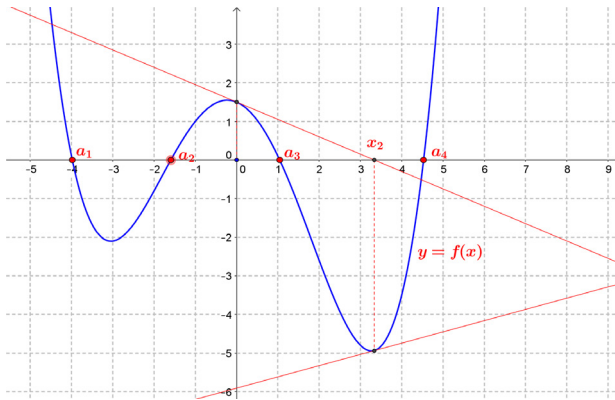
- a) Funktiolle kohtaan  $x_1 = 3$  piirretty tangentti leikkaa  $x$ -akselin hyvin lähellä nollakohtaa  $a_2$ , ja edelleen iteroimalla päästään vielä lähemmäksi, joten tällä alkuarvolla selviää nollakohta  $a_2$ .



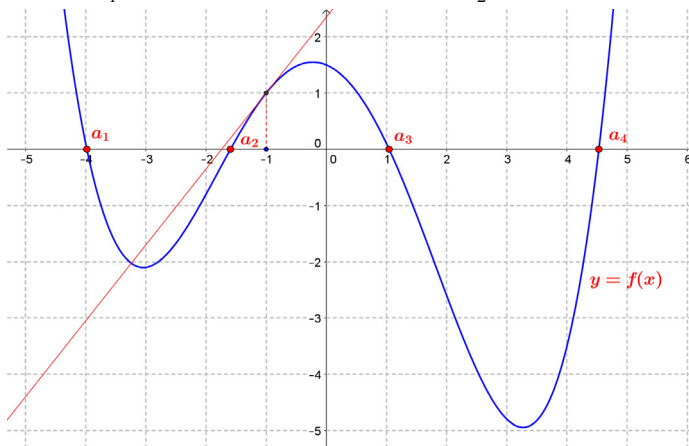
- b) Alkuarvo  $x_1 = 2$  johtaa nollakohtaan  $a_3$ .



- c) Funktiolle kohtaan  $x_1 = 0$  piirretty tangentti leikkaa  $x$ -akselin melko lähellä nollakohtaa  $a_4$ . Seuraava iteraatio vie kuitenkin varsin kauas kohdan  $a_4$  oikealle puolelle. Mutta koska funktio on (koko ajan jyrkemmin) kasvava kohdan  $a_4$  oikealla puolella, palaavat iteraatiot takaisinpäin ja suppenevat kohti nollakohtaa  $a_4$ .



- d) Alkuarvo  $x_1 = -1$  johtaa nollakohtaan  $a_2$ .



Vastaus a)  $a_2$  b)  $a_3$  c)  $a_4$  d)  $a_2$

## 179

- a) Esimerkin 4 mukaisesti funktiolle  $f$  Newtonin menetelmän iterointikaava on

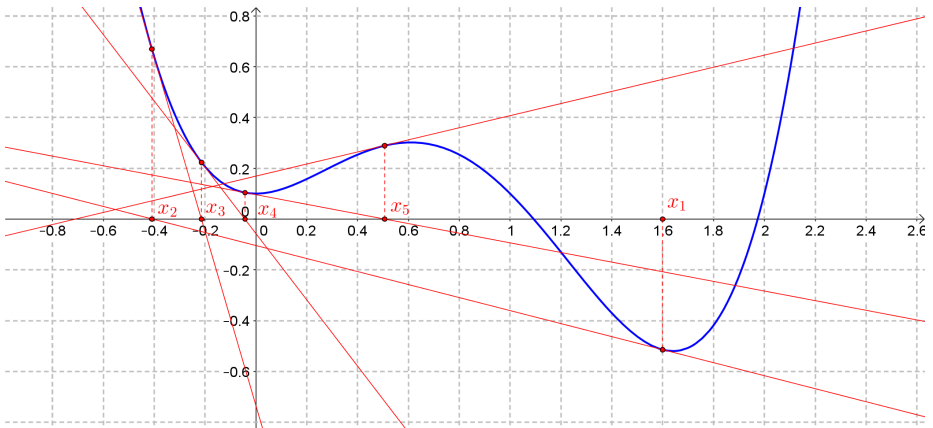
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - 3x_n^3 + 2x_n^2 + 0,1}{4x_n^3 - 9x_n^2 + 4x_n}.$$

Iteroidaan taulukkolaskentaohjelmalla lähtien alkuarvosta  $x_1 = 1,6$ .

| $x_n$    | Iteraatio $n - 1$ |
|----------|-------------------|
| $x_1$    | 1,6               |
| $x_2$    | -0,409375         |
| $x_3$    | -0,213749834      |
| $x_4$    | -0,043084393      |
| ...      |                   |
| $x_{28}$ | 1,973637870       |
| $x_{29}$ | 1,973632281       |

Iterointi saavuttaa viiden desimaalin tarkkuudella funktion  $f$  suuremman nollakohdan 28. iteraation jälkeen ( $x_{29} \approx 1,97363$ ).

b) Piirretään funktion  $f$  kuvaaja.



Alkuarvo on lähellä derivaattafunktion nollakohtaa. Funktiolla on lisäksi kolme derivaattafunktion nollakohtaa lähekkäin, ja iteraatio heilahtelee aluksi näiden ympärillä.

Vastaus a) 28. iteraatio ( $x_{29} \approx 1,97363$ )

## 180

Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaavaa vastaava funktio  $g$ .

$$f(x) = \frac{4x-1}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{-4x^2+2x+4}{(x^2+1)^2}$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\frac{4x-1}{x^2+1}}{\frac{-4x^2+2x+4}{(x^2+1)^2}} = x - \frac{4x^3 - x^2 + 4x - 1}{-4x^2 + 2x + 4}$$

Iteroidaan alkuarvoilla  $x_1 = -0,5$  ja  $x_1 = 1$ .

| $x_n$    | Iteraatio $g(x_{n-1})$ | Iteraatio $g(x_{n-1})$ |
|----------|------------------------|------------------------|
| $x_1$    | -0,5                   | 1                      |
| $x_2$    | 1,375                  | -2                     |
| $x_3$    | 17,38461538...         | -4,8125                |
| $x_4$    | 35,14551521...         | -9,791282398...        |
| ...      |                        |                        |
| $x_{36}$ | 1,52198E+11            | -41580195787,...       |
| ...      |                        |                        |
| $x_{99}$ | 1,40378E+30            | -3,8351E+29            |

Alkuarvot eivät johda nollakohtaan. Alkuarvolla  $x_1 = -0,5$  jonon jäsenet kasvavat jokaisella iteraatiolla, ja puolestaan alkuarvolla  $x_1 = 1$  ne pienenevät.

Siirretään alkuarvoja yksi desimaali kerrallaan lähemmäs nollakohtaa, kunnes menetelmä suppenee.

| $x_n$ | Iteraatio $g(x_{n-1})$ | Iteraatio $g(x_{n-1})$ |
|-------|------------------------|------------------------|
| $x_1$ | -0,4                   | 0,8                    |
| $x_2$ | 0,778125               | -0,38684210...         |
| $x_3$ | -0,30394579...         | 0,72764668...          |
| ...   |                        |                        |
| $x_7$ | 0,24999919...          | 0,24999890...          |
| $x_8$ | 0,25                   | 0,25                   |
| $x_9$ | 0,25                   | 0,25                   |

Kun alkuarvo on väliltä  $[-0,4; 0,8]$ , menetelmä suppenee nollakohtaan  $x = 0,25$ .

Vastaus      Iterointi suppenee kohti nollakohtaa, kun alkuarvo valitaan väliltä  $[-0,4; 0,8]$ .

## 181

Yhtälön  $x - \sqrt{x+4} = 0$  määrittelyehto on

$$x + 4 \geq 0$$

$$x \geq -4.$$

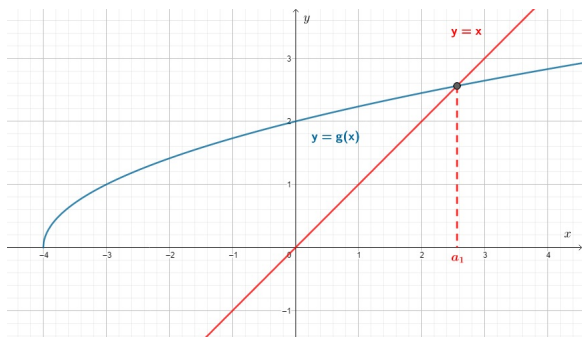
Muokataan yhtälö muotoon  $x = g(x)$ .

$$x - \sqrt{x+4} = 0$$

$$x = \sqrt{x+4}$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $g(x) = \sqrt{x+4}$  kiintopisteet.

Piirretään funktion  $g$  kuvaaja ja suora  $y = x$  samaan koordinaatistoon. Kuvan perusteella funktion  $g$  ainoa kiintopiste on välillä  $]2, 3[$ .



Iteroidaan funktiota  $g$  lähtien alkuarvosta  $x_1 = 2$ . Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

|            | <b>A</b>      |
|------------|---------------|
| <b>1</b>   | 2             |
| <b>2</b>   | 2,44948974... |
| <b>3</b>   | 2,53958456... |
| <b>...</b> |               |
| <b>10</b>  | 2,56155257... |
| <b>11</b>  | 2,56155276... |

Iteroinnin perusteella funktion  $g$  ainoan kiintopisteen likiarvo on 2,561553.

Siis yhtälön  $x - \sqrt{x+4} = 0$  ratkaisu on  $x \approx 2,561553$ .

Vastaus  $x \approx 2,561553$

## 182

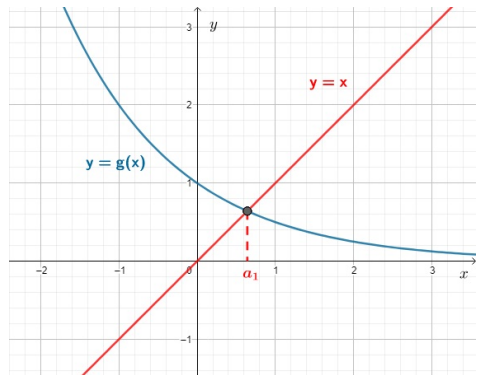
Muokataan yhtälö muotoon  $x = g(x)$ .

$$2^{-x} - x = 0$$

$$x = 2^{-x}$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $g(x) = 2^{-x}$  kiintopisteet.

Piirretään funktion  $g$  kuvaaja ja suora  $y = x$  samaan koordinaatistoon. Kuvan perusteella funktion  $g$  ainoa kiintopiste on välillä  $]0, 1[$ .



Iteroidaan funktiota  $g$  lähtien alkuarvosta  $x_1 = 1$ . Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

|           | <b>A</b>      |
|-----------|---------------|
| <b>1</b>  | 1             |
| <b>2</b>  | 0,5           |
| <b>3</b>  | 0,70710678... |
| <b>4</b>  | 0,61254732... |
| ...       |               |
| <b>10</b> | 0,64120525... |
| <b>11</b> | 0,64117707... |

Iteroinnin perusteella funktion  $g$  ainoan kiintopisteen likiarvo on 0,6412.

Siis yhtälön  $2^{-x} - x = 0$  ratkaisu on  $x \approx 0,6412$ .

Vastaus  $x \approx 0,6412$

## 183

Muokataan yhtälö muotoon  $x = g(x)$ .

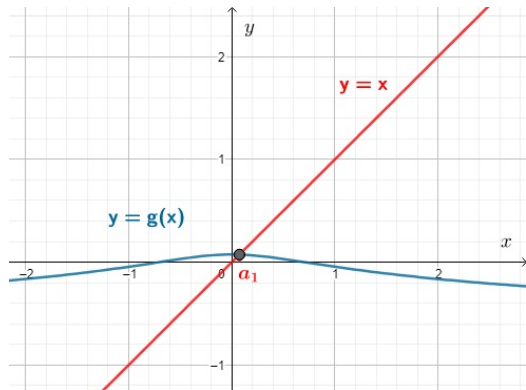
$$\lg(x^2 + \frac{1}{2}) + 4x = 0$$

$$x = \frac{\lg(x^2 + \frac{1}{2})}{-4}$$

$$x = -\frac{1}{4} \lg(x^2 + \frac{1}{2})$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $g(x) = -\frac{1}{4} \lg(x^2 + \frac{1}{2})$  kiintopisteet.

Piirretään funktion  $g$  kuvaaja ja suora  $y = x$  samaan koordinaatistoon. Kuvan perusteella funktion  $g$  ainoa kiintopiste on välillä  $]0, 1[$ .



Iteroidaan funktiota  $g$  lähtien alkuarvosta  $x_1 = 0$ . Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

|          | <b>A</b>      |
|----------|---------------|
| <b>1</b> | 0             |
| <b>2</b> | 0,07525749... |
| <b>3</b> | 0,07403455... |
| <b>4</b> | 0,07407376... |
| <b>5</b> | 0,07407251... |
| <b>6</b> | 0,07407255... |

Iteroinnin perusteella funktion  $g$  ainoan kiintopisteen likiarvo on 0,074073.

Siis yhtälön  $\lg(x^2 + \frac{1}{2}) + 4x = 0$  ratkaisu on  $x \approx 0,074073$ .

Vastaus  $x \approx 0,074073$

## 184

- a) Muokataan yhtälö muotoon  $x = 2 - \frac{1}{2}x^3$ .

$$x^3 + 2x - 4 = 0$$

$$2x = 4 - x^3 \quad | : 2$$

$$x = 2 - \frac{1}{2}x^3$$

- b) Muokataan yhtälö muotoon  $x = \sqrt[3]{4 - 2x}$ .

$$x^3 + 2x - 4 = 0$$

$$x^3 = 4 - 2x \quad | \sqrt[3]{\phantom{x}}$$

$$x = \sqrt[3]{4 - 2x}$$

Yhtälön  $x^3 + 2x - 4 = 0$  ratkaisut ovat samat kuin a- ja b-kohdissa johdettujen yhtälöiden ratkaisut.

Iteroidaan funktioita

a)  $g(x) = 2 - \frac{1}{2}x^3$  ja

b)  $g(x) = \sqrt[3]{4 - 2x}$

lähtien alkuarvosta  $x_1 = 1$ .

|           | a)            | b)            |
|-----------|---------------|---------------|
| <b>1</b>  | 1             | 1             |
| <b>2</b>  | 1,5           | 1,25992105... |
| <b>3</b>  | 0,3125        | 1,13964436... |
| <b>4</b>  | 1,98474121... | 1,19831041... |
| ...       |               |               |
| <b>10</b> | 3,21076E+47   | 1,17973783... |
| <b>11</b> | -1,655E+142   | 1,17939937... |

Iteroinnin perusteella näyttää, että a-kohdan funktiolla suoritettu iterointi ei suppene kohti yhtälön juurta.

b-kohdan funktiolla iteraatiot suppenevat kohti ratkaisua.

Vastaus     a) Ei tuota kiintopistettä   b) Tuottaa kiintopisteen

## 185

Yhtälön  $x^3 - 5x + 7 = 0$  ratkaisut ovat samat, kuin funktion

$$f(x) = x^3 - 5x + 7 \text{ nollakohdat.}$$

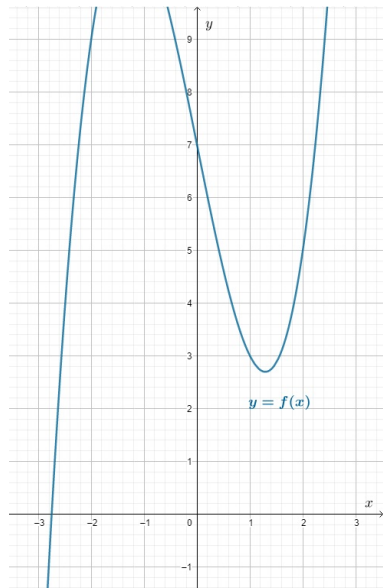
Kuvan perusteella yhtälön ratkaisu on välillä  $]-2, -3[$ .

Muokataan yhtälö muotoon  $x = g(x)$ .

$$x^3 - 5x + 7 = 0$$

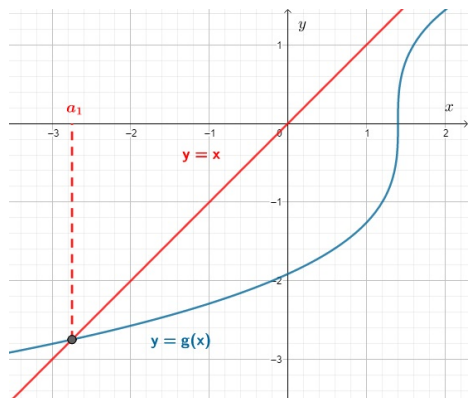
$$x^3 = 5x - 7$$

$$x = \sqrt[3]{5x - 7}$$



Yhtälön ratkaisu on funktion  $g(x) = \sqrt[3]{5x - 7}$  kiintopiste. Iteroidaan funktiota  $g$  lähtien alkuarvosta  $x_1 = -3$ .

|     | A              |
|-----|----------------|
| 1   | -3             |
| 2   | -2,80203933... |
| 3   | -2,75937064... |
| ... |                |
| 6   | -2,74747583... |
| 7   | -2,74737509... |
| 8   | -2,74735284... |



Iteroinnin perusteella funktion  $g$  ainoan kiintopisteen likiarvo on  $-2,747$ .

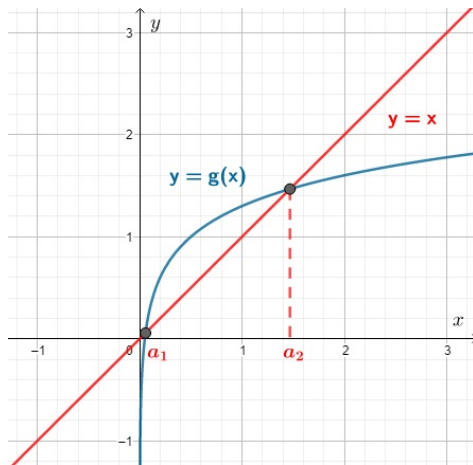
Siis yhtälön  $x^3 - 5x + 7 = 0$  ratkaisu on  $x \approx -2,747$ .

Vastaus  $-2,747$

## 186

- a) Piirretään funktion  $g$  kuvaaja ja suora  $y = x$  samaan koordinaatistoon.

Kuvan perusteella funktiolla  $g$  on kaksi kiintopistettä.



- b) Kuvaajan perusteella funktion  $g$  kiintopisteet ovat väleillä  $]0, 1[$  ja  $]1, 2[$ . Kiintopiste  $a_2$  löydetään iteroimalla funktiota  $g$  alkuarvolla  $x_1 = 1$ .

Kiintopistettä  $a_1$  varten yhtälöä on muokattava.

$$x = \lg(2x) + 1$$

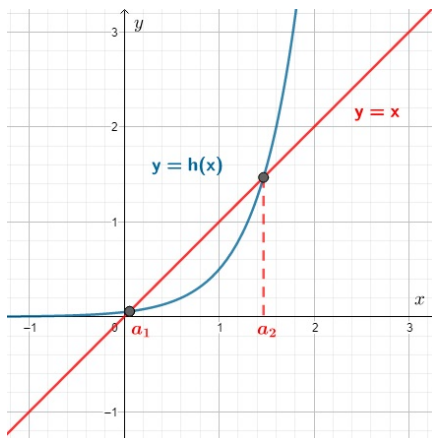
$$x - 1 = \log_{10}(2x)$$

$$10^{x-1} = 2x$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot 10^{x-1}$$

Funktion  $g$  kiintopisteet ovat samat kuin funktion

$$h(x) = \frac{1}{2} \cdot 10^{x-1} \text{ kiintopisteet.}$$



Kiintopiste  $a_1$  saadaan iteroimalla funktioita  $h$  alkuarvosta  $x_1 = 0$ . Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

|            | $a_1$         | $a_2$         |
|------------|---------------|---------------|
| <b>1</b>   | 0             | 1             |
| <b>2</b>   | 0,05          | 1,30102999... |
| <b>3</b>   | 0,05610092... | 1,41531730... |
| <b>...</b> |               |               |
| <b>11</b>  | 0,05701437... | 1,46765038... |
| <b>12</b>  | 0,05701437... | 1,46765260... |

Iteroinnin perusteella funktion  $g$  (ja  $h$ ) kiintopisteiden likiarvot ovat 0,05701 ja 1,46765.

Vastaus    a) kaksi kiintopistettä   b) 0,05701 ja 1,46765

## 187

Muokataan yhtälö muotoon  $x = g(x)$ .

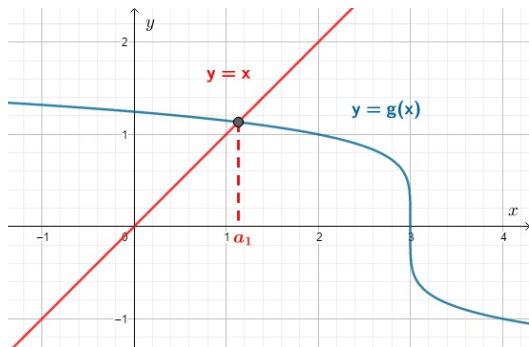
$$x^5 + x - 3 = 0$$

$$x^5 = 3 - x$$

$$x = \sqrt[5]{3 - x}$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $g(x) = \sqrt[5]{3 - x}$  kiintopisteet.

Kuvan perusteella funktion  $g$  kiintopiste on välillä  $]1, 2[$ .



Iteroidaan funktiota  $g$  lähtien alkuarvosta  $x_1 = 1$ .

|          | <b>A</b>      |
|----------|---------------|
| <b>1</b> | 1             |
| <b>2</b> | 1,14869835... |
| <b>3</b> | 1,13108550... |
| <b>4</b> | 1,13322953... |
| <b>5</b> | 1,13296941... |

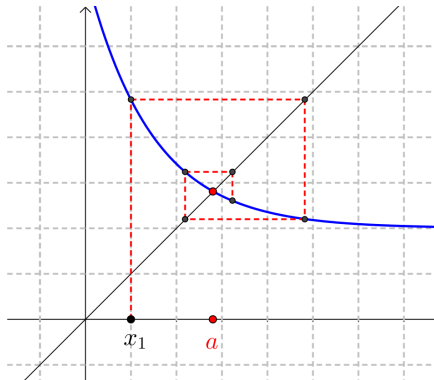
Iteroinnin perusteella funktion  $g$  ainoan kiintopisteen likiarvo on 1,133.

Siis yhtälön  $x^3 + x - 3 = 0$  ratkaisu on  $x \approx 1,133$ .

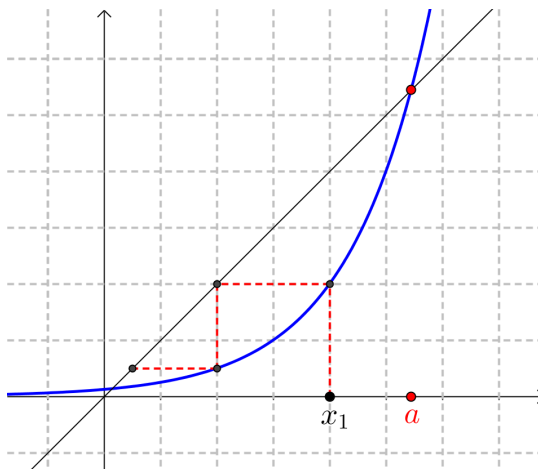
Vastaus  $x \approx 1,133$

## 188

- a) Kun kuvaajalla lähdetään alkuarvosta  $x_1$ , ja siirrytään aina funktion arvon kautta suoralle  $y = x$ , huomataan että lähestytään kiintopistettä  $a$ .



- b) Tässä tapauksessa liikutaan jokaisella iteraatiolla kauemmaksi kiintopisteestä  $a$ , eli kiintopisteiterointi ei lähesty sitä (se kuitenkin lähestyy toista kiintopistettä, nollaa).



**189**

a) Lasketaan iteroimalla lukujonon

$$x_{n+1} = g(x_n) = 2 + \ln x_n$$

arvoja alkuarvauksella  $x_0 = 1$ .

| $x_n$    | Iteraatio     |
|----------|---------------|
| $x_0$    | 1             |
| $x_1$    | 2             |
| $x_2$    | 2,69314718... |
| ...      |               |
| $x_9$    | 3,14602684... |
| $x_{10}$ | 3,14614033... |

Iteroinnin perusteella  $x_{10} \approx 3,146$ .

b) Muokataan yhtälöä.

$$x = 2 + \ln x$$

$$x - 2 = \log_e x$$

$$x = e^{x-2}$$

Lasketaan nyt lukujonon

$$x_{n+1} = h(x_n) = e^{x_n-2}$$

arvoja alkuarvauksella  $x_0 = 1$ .

| $x_n$    | Iteraatio     |
|----------|---------------|
| $x_0$    | 1             |
| $x_1$    | 0,36787944... |
| $x_2$    | 0,19551453... |
| ...      |               |
| $x_9$    | 0,15859443... |
| $x_{10}$ | 0,15859435... |

Iteroinnin perusteella toinen ratkaisu on  $x_{10} \approx 0,159$ .

Vastaus a)  $x_{10} \approx 3,146$  b)  $x = e^{x-2}$ ,  $x_{10} \approx 0,159$

## 190

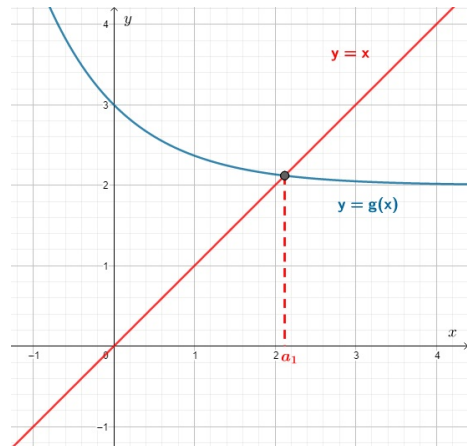
Muokataan yhtälö muotoon  $x = g(x)$ .

$$e^{-x} + 2 - x = 0$$

$$x = 2 + e^{-x}$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion  $g(x) = 2 + e^{-x}$  kiintopisteet.

Piirretään funktion  $g$  kuvaaja ja suora  $y = x$  samaan koordinaatistoon. Kuvan perusteella funktion  $g$  ainoa kiintopiste on välillä  $]2, 3[$ .



Iteroidaan funktiota  $g$  lähtien alkuarvosta  $x_1 = 2$ . Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

|     | A             |
|-----|---------------|
| 1   | 2             |
| 2   | 2,13533528... |
| ... |               |
| 7   | 2,12002786... |
| 8   | 2,12002828... |

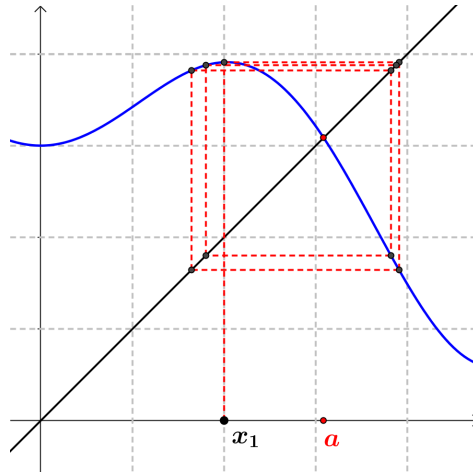
Iteroinnin perusteella funktion  $g$  ainoan kiintopisteen likiarvo on 2,120028.

Siis yhtälön  $e^{-x} + 2 - x = 0$  ratkaisu on  $x \approx 2,120028$ .

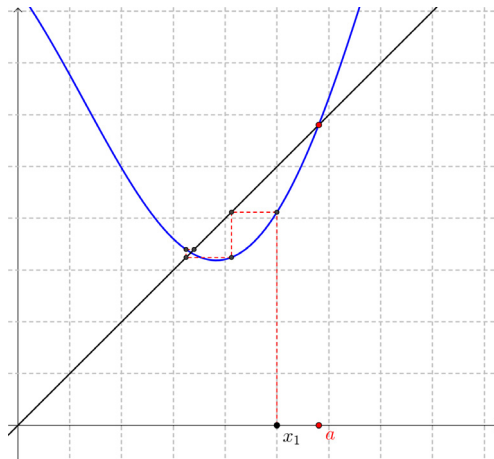
Vastaus        2,120028

191

a) Eivät lähesty, iterointi jää kiertämään kehää.



b) Eivät lähesty, iterointi lähestyy vasemmanpuoleista kiintopistettä.



## 192

Funktio on määritelty, kun  $x > 0$ .

Kuvaajan perusteella funktion  
 $f(x) = \log_3 x + 3x - x^3$

kiintopisteet ovat väleillä  $]0, 1[$   
 ja  $]1, 2[$ .

Muokataan  $x = f(x)$  eri  
 muotoihin kiintopisteiden  
 löytämiseksi.

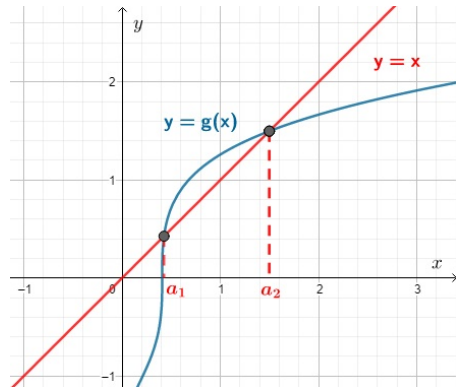
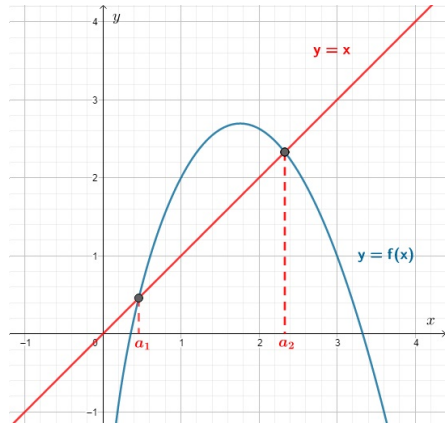
$$x = \log_3 x + 3x - x^3$$

$$x^3 = 2x + \log_3 x$$

$$x = \sqrt[3]{2x + \log_3 x}$$

Funktiolla  $g(x) = \sqrt[3]{2x + \log_3 x}$   
 on samat kiintopisteet kuin  
 funktiolla  $f$ . Sitä iteroimalla  
 löydetään kiintopiste  $a_2$ .

Valitaan tämän iteroinnin  
 alkuarvoksi  $x_1 = 1$ .



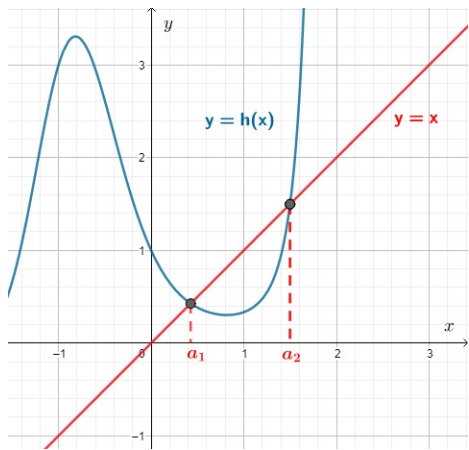
Muokataan funktio  $x = f(x)$  vielä toiseen muotoon kiintopisteen  $a_1$  löytämiseksi.

$$x = \log_3 x + 3x - x^3$$

$$\log_3 x = x^3 - 2x$$

$$x = 3^{x^3 - 2x}$$

Funktiolla  $h(x) = 3^{x^3 - 2x}$  on samat kiintopisteet kuin funktiolla  $f$ . Sitä iteroimalla löydetään kiintopiste  $a_1$ . Valitaan myös tämän iteroinnin alkuarvoksi  $x_1 = 1$ .



Iteroidaan funktioita taulukkolaskentaohjelmalla.

|     | $a_1 ( h(x) )$ | $a_2 ( g(x) )$ |
|-----|----------------|----------------|
| 1   | 1              | 1              |
| 2   | 0,33333333...  | 1,25992105...  |
| 3   | 0,50071467...  | 1,39764092...  |
| 4   | 0,38202609...  | 1,45810240...  |
| ... |                |                |
| 22  | 0,42663379...  | 1,49856645...  |
| 23  | 0,42651905...  | 1,49856645...  |

Iteroinnin perusteella kiintopisteiden likiarvot ovat 0,427 ja 1,499.

Vastaus  $x \approx 0,427$  ja  $x \approx 1,499$

## 193

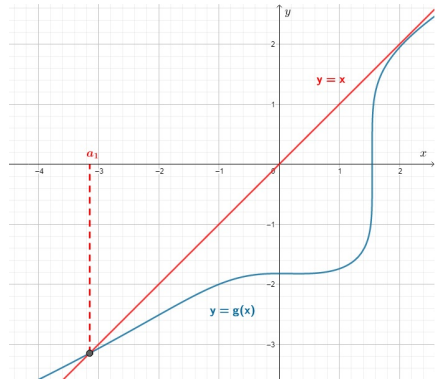
Muokataan yhtälöä.

$$x^5 - 8x^3 + 4x^2 + 20 = 0$$

$$x^5 = 8x^3 - 4x^2 - 20$$

$$x = \sqrt[5]{8x^3 - 4x^2 - 20}$$

Funktion  $g(x) = \sqrt[5]{8x^3 - 4x^2 - 20}$  kiintopisteet ovat samat kuin yhtälön ratkaisut. Kuvan perusteella kiintopiste on välillä  $]-4, -3[$ .



Muokataan yhtälö vielä toiseen muotoon.

$$x^5 - 8x^3 + 4x^2 + 20 = 0$$

$$x^5 = 8x^3 - 4x^2 - 20 \quad \left| : x^2, x \neq 0 \right.$$

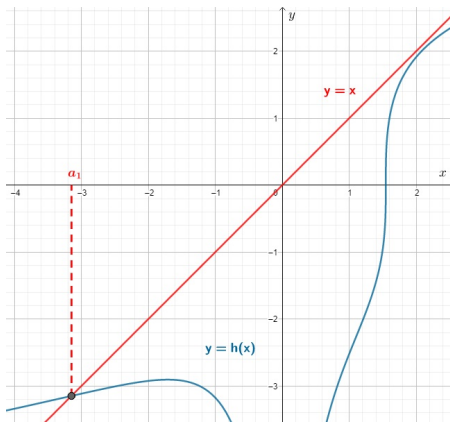
$$x^3 = 8x - 4 - \frac{20}{x^2}$$

$$x = \sqrt[3]{8x - 4 - \frac{20}{x^2}}$$

Funktion

$$h(x) = \sqrt[3]{8x - 4 - \frac{20}{x^2}}, \quad x \neq 0$$

kiintopisteet ovat samat kuin yhtälön ratkaisut.



Iteroidaan funktioita  $g$  ja  $h$  lähtien alkuarvosta  $x_1 = -3$ .

| $x_n$    | Iteraatio $g(x_{n-1})$ |
|----------|------------------------|
| $x_1$    | -3                     |
| $x_2$    | -3,06841276...         |
| $x_3$    | -3,10536475...         |
| ...      |                        |
| $x_{10}$ | -3,14770837...         |
| $x_{11}$ | -3,14796096...         |

| $x_n$ | Iteraatio $h(x_{n-1})$ |
|-------|------------------------|
| $x_1$ | -3                     |
| $x_2$ | -3,11488581...         |
| $x_3$ | -3,14071873...         |
| $x_4$ | -3,14655039...         |
| $x_5$ | -3,14786774...         |
| $x_6$ | -3,14816537...         |

Iterointien perusteella yhtälön ratkaisun likiarvo on  $-3,148$ .

Funktiolla  $g$  likiarvo saatiin 9. iterointikierroksella ja funktiolla  $h$  4. iterointikierroksella.

Vastaus Esimerkiksi  $x = \sqrt[5]{8x^3 - 4x^2 - 20}$ ,  $x_{10} \approx -3,148$ ;

$$x = \sqrt[3]{8x - 4 - \frac{20}{x^2}}, \quad x_5 \approx -3,148.$$

## 194

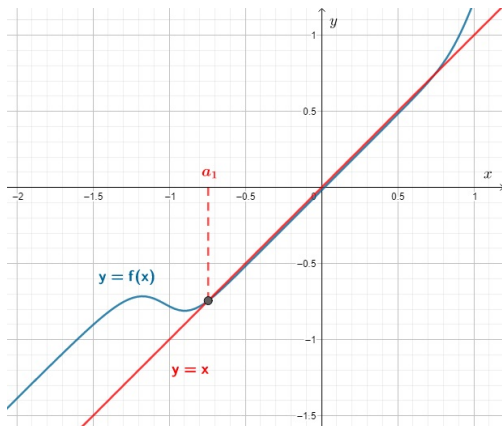
- a) Iteroidaan funktiota  $f$  lähtien alkuarvosta  $x_1 = -0,5$ .

|     | A              |
|-----|----------------|
| 1   | -0,5           |
| 2   | -0,51812511... |
| 3   | -0,53609674... |
| 4   | -0,55386031... |
| ... |                |
| 40  | -0,74335388... |
| 41  | -0,74336551... |

Iteroinnin perusteella kiintopisteen likiarvo on  $-0,7434$ .

- b) Piirretään funktion  $f$  kuvaaja.

Kuvaajasta nähdään, että funktion  $f$  kuvaaja on kiintopisteen läheisyydessä lähes yhdensuuntainen suoran  $y = x$  kanssa. Tästä syystä suppeneminen on hidasta.



- Vastaus a)  $-0,7434$   
 b) Funktio on kiintopisteen läheisyydessä lähes yhdensuuntainen suoran  $y = x$  kanssa

## 195

- a) Iteroidaan funktiota  $g$  lähtien alkuarvosta  $x_1 = 1$ .

|   | A              |
|---|----------------|
| 1 | 1              |
| 2 | 1,5            |
| 3 | 1,416666666... |
| 4 | 1,414215686... |
| 5 | 1,414213562... |
| 6 | 1,414213562... |

Iteroinnin perusteella kiintopisteen likiarvo on 1,41421356.

- b) Luvun suuruudesta päätellen, se voisi olla  $\sqrt{2}$ . Lisäksi kokeilemalla  $1,41421356^2 \approx 2$ .
- c) Ratkaistaan yhtälö  $g(x) = x$ .

$$\frac{1}{2} \left( x + \frac{2}{x} \right) = x \quad | \cdot 2$$

$$x + \frac{2}{x} = 2x \quad | \cdot x, x \neq 0$$

$$x^2 + 2 = 2x^2$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Yhtälön ratkaisut ovat  $\sqrt{2}$  ja  $-\sqrt{2}$ . Positiivinen kiintopiste on siis  $\sqrt{2}$ .

Vastaus    a) 1,41421356   b)  $\sqrt{2}$    c) Funktion positiivinen  
kiintopiste on  $\sqrt{2}$

## 196

Esimerkiksi sopiva funktio voitaisiin muokata yhtälöstä seuraavasti.

$$\begin{aligned}
 x^3 &= 3 & | +x^3 \\
 2x^3 &= x^3 + 3 & | : x^2, x \neq 0 \\
 2x &= x + \frac{3}{x^2} & | : 2 \\
 x &= \frac{1}{2} \left( x + \frac{3}{x^2} \right)
 \end{aligned}$$

Nyt iteroimalla funktioita  $g(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{3}{x^2} \right)$  lähtien alkuarvosta

$x_1 = 1$  saadaan laskettua luvun  $\sqrt[3]{3}$  likiarvo.

|           | <b>A</b>      |
|-----------|---------------|
| <b>1</b>  | 1             |
| <b>2</b>  | 2             |
| <b>3</b>  | 1,375         |
| <b>4</b>  | 1,48088843... |
| ...       |               |
| <b>17</b> | 1,44224511... |
| <b>18</b> | 1,44225179... |

Iteroinnin perusteella  $\sqrt[3]{3} \approx 1,44225$ .

Vastaus      Esimerkiksi  $x = \frac{1}{2} \left( x + \frac{3}{x^2} \right)$ ,  $\sqrt[3]{3} \approx 1,44225$

**197**

Tiedetään, että funktion  $g$  kiintopisteiterointi suppenee kohti kiintopistettä. Olkoon tämä funktion  $g$  kiintopiste  $a$ . Tällöin kiintopisteen määritelmän mukaisesti  $g(a) = a$ . Siis

$$g(a) = a$$

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a$$

$$\frac{f(a)}{f'(a)} = 0 \quad | \cdot f'(a), f'(a) \neq 0$$

$$f(a) = 0.$$

Eli funktion  $g$  kiintopiste  $a$  on funktion  $f$  nollakohta.

## 198

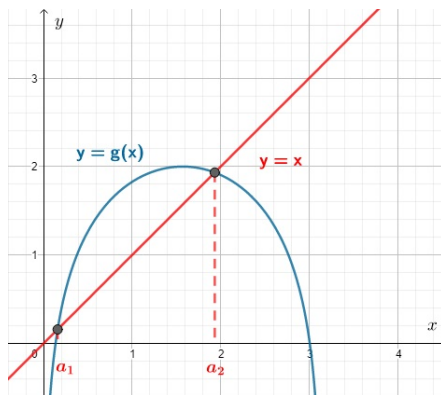
- a) Piirretään funktion  $g(x) = \ln(\sin x) + 2$  kuvaaja. Funktio on määritelty, kun  $\sin x > 0$ , eli se on määritelty välillä  $]0, \pi[$ .

Kuvan perusteella välillä  $[0, \pi]$  olevat kiintopisteet ovat väleillä  $]0, 1[$  ja  $]1, 2[$ .

Funktion  $g$  kiintopisteet ovat yhtälön  $x = g(x)$  juuria. Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$$x = \ln(\sin x) + 2$$

$$x \approx 0,1594 \text{ ja } x \approx 1,9329.$$



b) Määritetään derivaattafunktio.

$$g'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Lasketaan derivaatan itseisarvot kiintopisteiden kohdilla.

$$|g'(0,1594)| = |6,22\dots| = 6,22\dots > 1$$

$$|g'(1,9329)| = |-0,37\dots| = 0,37\dots < 1$$

Kiintopiste  $x \approx 0,1594$  on hylkivä ja kiintopiste  $x \approx 1,9329$  puoleensavetävä.

c) Iteroimalla funktiota  $g$  lähtöarvoista  $x_1 = 0,16$  ja  $x_1 = 1,93$  kummassakin tapauksessa jono suppenee kohti kiintopistettä  $x \approx 1,9329$ .

Vastaus a) 0,1594 ja 1,9329

b) Ensimmäinen on hylkivä ja jälkimmäinen puoleensavetävä

c) Molemmat iteroinnit suppenevat kohti kiintopistettä  $x \approx 1,9329$ .

## 199

- a) Ratkaistaan yhtälö
- $x = f(x)$
- .

$$x = ax(1-x)$$

$$x = ax - ax^2$$

$$ax^2 + x - ax = 0$$

$$x(ax + 1 - a) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad ax + 1 - a = 0$$

$$ax = a - 1 \quad | : a, a > 0$$

$$x = \frac{a-1}{a}$$

Funktion  $f$  kiintopisteet ovat  $x = 0$  ja  $x = \frac{a-1}{a}$ .

- b) Määritetään derivaatafunktiio.

$$f'(x) = a - 2ax$$

Tarkastellaan derivaatan itseisarvoja kiintopisteiden kohdalla.

$$|f'(0)| = |a - 2a \cdot 0| = |a|$$

$$\left| f'\left(\frac{a-1}{a}\right) \right| = \left| a - 2a \cdot \frac{a-1}{a} \right| = |2-a|$$

Kiintopiste  $0$  on puoleensavetävä, kun  $|a| < 1$ , eli  $-1 < a < 1$ .

Jälkimmäinen kiintopiste on puoleensavetävä, kun  $|2-a| < 1$ , eli  $1 < a < 3$ .

Vastaus a)  $x = 0$  ja  $x = \frac{a-1}{a}$

b) Kiintopiste  $x = 0$  on puoleensavetävä, jos  $-1 < a < 1$ .

Kiintopiste  $x = \frac{a-1}{a}$  on puoleensavetävä, jos  $1 < a < 3$

## 200

- a)  $f(x) = 2x(1-x)$ . Iteroidaan funktiota lähtien alkuarvosta  $x_1 = 0,1$ .

|     | A             |
|-----|---------------|
| 1   | 0,1           |
| 2   | 0,18          |
| ... |               |
| 7   | 0,49999968... |
| 8   | 0,5           |
| 9   | 0,5           |

Iterointi suppenee kiintopisteeseen  $\frac{1}{2}$ .

- b)  $f(x) = 3,5x(1-x)$ . Iteroidaan funktioita lähtien alkuarvosta  $x_1 = 0,7$ .

|     | A           |
|-----|-------------|
| 1   | 0,7         |
| 2   | 0,735       |
| 3   | 0,6817125   |
| ... |             |
| 39  | 0,50088421  |
| 40  | 0,874997264 |
| 41  | 0,382819683 |
| 42  | 0,826940707 |

Iterointi jää heilahtelemaan eikä näytä suppenevan.

- c)  $f(x) = 0,5x(1-x)$ . Iteroidaan funktiota lähtien alkuarvosta  $x_1 = -0,9$ .

|             | <b>A</b>     |
|-------------|--------------|
| <b>1</b>    | -0,9         |
| <b>2</b>    | -0,855       |
| <b>3</b>    | -0,7930125   |
| ...         |              |
| <b>56</b>   | -1,53048E-15 |
| <b>57</b>   | -7,65242E-16 |
| ...         |              |
| <b>1028</b> | -3,8342E-308 |
| <b>1029</b> | 0            |

Iterointi suppenee kiintopisteeseen 0.

- Vastaus    a) Iterointi suppenee kiintopisteeseen  $\frac{1}{2}$   
                  b) Iterointi ei suppene  
                  c) Iterointi suppenee kiintopisteeseen 0

**201**

Funktion  $f$  kiintopisteet ovat yhtälön  $x = f(x)$  ratkaisut. Yhtälön ratkaisut ovat taas samat kuin funktion  $h(x) = x - f(x)$  nollakohdat. Tarkastellaan funktion  $h$  arvoja välin  $[-1, 1]$  päätepisteissä.

$$h(-1) = -1 - f(-1) \leq -1 - (-1) = 0$$

$$h(1) = 1 - f(1) \geq 1 - 1 = 0$$

Toisin sanoen, joko  $h(-1) = 0$ ,  $h(1) = 0$  tai  $h(-1) < 0$  ja  $h(1) > 0$ .

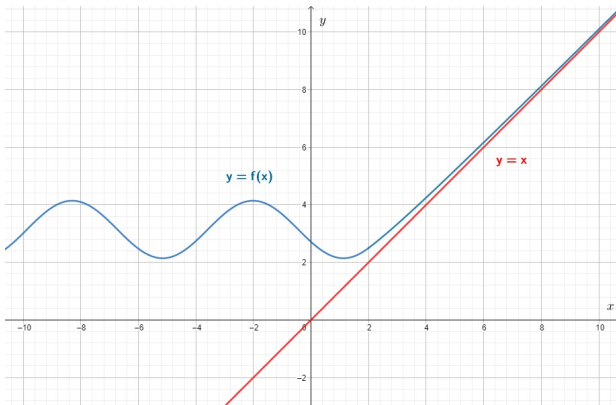
Jos  $h(-1) = 0$ , niin funktiolla  $f$  on kiintopiste  $x = -1$ .

Jos  $h(1) = 0$ , niin funktiolla  $f$  on kiintopiste  $x = 1$ .

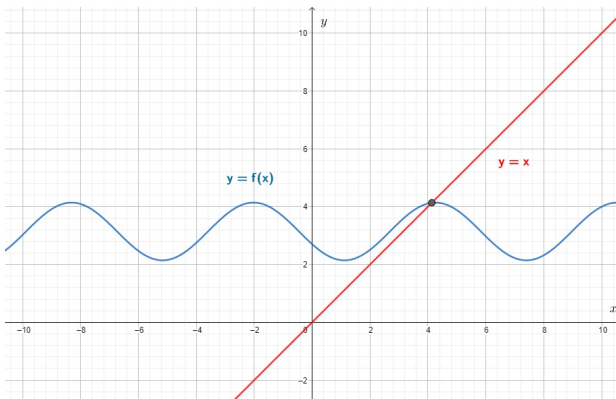
Jos taas  $h(-1) < 0$  ja  $h(1) > 0$ , niin jatkuvalla funktiolla  $h$  on Bolzanon lauseen nojalla ainakin yksi nollakohta välillä  $] -1, 1[$ . Tällöin funktiolla  $f$  on ainakin yksi kiintopiste välillä  $] -1, 1[$ .

## 202

Funktiolla voi olla nolla kiintopistettä (funktion kuvaaja lähestyy asymptoottisesti suoraa  $y = x$ )



tai yksi kiintopiste (leikattuaan suoran  $y = x$  kuvaaja ei voi derivaattarajoituksen vuoksi saavuttaa sitä enää uudelleen).



## 203

a) Sijoitetaan  $y = kx$  lausekkeeseen  $P_k(x, y) = \left( \frac{ky + x}{k^2 + 1}, \frac{k^2 y + kx}{k^2 + 1} \right)$ .

$$\begin{aligned} P_k(x, y) &= \left( \frac{ky + x}{k^2 + 1}, \frac{k^2 y + kx}{k^2 + 1} \right) \\ &= \left( \frac{k \cdot kx + x}{k^2 + 1}, \frac{k^2 \cdot kx + kx}{k^2 + 1} \right) \\ &= \left( \frac{x(k^2 + 1)}{k^2 + 1}, \frac{kx(k^2 + 1)}{k^2 + 1} \right) \\ &= (x, kx) \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

Siis jos  $y = kx$ , niin  $P_k(x, y) = (x, y)$ .

b) Jos  $P_k(x, y) = (x, y)$ , eli  $\left( \frac{ky + x}{k^2 + 1}, \frac{k^2 y + kx}{k^2 + 1} \right) = (x, y)$ , niin

$x = \frac{ky + x}{k^2 + 1}$  ja  $y = \frac{k^2 y + kx}{k^2 + 1}$ . Ratkaistaan yhtälöt  $y$ :n suhteen.

$$\begin{array}{lcl} x = \frac{ky + x}{k^2 + 1} & \left| \cdot (k^2 + 1) \right. & y = \frac{k^2 y + kx}{k^2 + 1} \quad \left| \cdot (k^2 + 1) \right. \\ x(k^2 + 1) = ky + x & & y(k^2 + 1) = k^2 y + kx \\ ky = k^2 x & \left| : k \right. & k^2 y + y - k^2 y = kx \\ y = kx & & y = kx \end{array}$$

Siis jos  $P_k(x, y) = (x, y)$ , niin  $y = kx$ .