

FI – Matematiikka, pitkä oppimäärä, preliminäärikoe

Kevät 2021

Koe koostuu 13 tehtävästä, joista vastataan kymmeneen. Tehtävät on jaettu kolmeen osaan. A-osassa on neljä kaikille pakollista tehtävää. B1-osassa on viisi tehtävää, joista vastataan kolmeen. B2-osassa on neljä tehtävää, joista vastataan kolmeen. Kaikki tehtävät arvostellaan pistein 0–12, joten kokeen maksimipistemäärä on 120.

A-osassa saat käyttää koejärjestelmän sähköistä taulukkokirjaa ja koejärjestelmän tarjoamia perusohjelmia. A-osa palautetaan tehtävän 4 jäljessä olevalla painikkeella. Tämän jälkeen A-osan vastauksia ei voi enää muokata. A-osan palauttamisen jälkeen kaikki koejärjestelmän ohjelmat ovat käytettävissäsi. Voit vastata B-osien tehtäviin myös ennen A-osan palauttamista.

Joissain tehtävissä kaikkien osatehtävien vastaukset kirjoitetaan samaan vastauskenttään. Jaottele vastauksesi osatehtävien mukaisesti. Halutessasi voit tuottaa vastausten tueksi piirroksia, kaavioita tai taulukoita ja liittää niistä kuvakaappauksen mihin tahansa tekstivastaukseen.

Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.

Sisällys

A-osa

Vastaa neljään tehtävään.

- | | |
|----------------------------------|-------|
| 1. Muuttujan arvon selvittäminen | 12 p. |
| 2. Prosenttilaskentaa | 12 p. |
| 3. Tilastollisia tunnuslukuja | 12 p. |
| 4. Rationaaliepäyhtälö | 12 p. |

B1-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

- | | |
|---------------------------|-------|
| 5. Suunnikas avaruudessa | 12 p. |
| 6. Ympyrän yhtälö | 12 p. |
| 7. Itseisarvotarkasteluja | 12 p. |
| 8. Numeerinen menetelmä | 12 p. |
| 9. Kolikonheitto | 12 p. |

B2-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

- | | |
|--------------------------|-------|
| 10. Epidemian leviäminen | 12 p. |
| 11. Pinta-aloja | 12 p. |
| 12. Pyörähdyskappaleita | 12 p. |
| 13. Laskusääntö | 12 p. |

Koe yhteensä	120 p.
---------------------	---------------

A-osa

 Vastaa neljään tehtävään.

1. Muuttujan arvon selvittäminen 12 p.

1.1. Ratkaise yhtälö $\frac{x}{5} = \frac{x+1}{3} - \frac{1}{60}$. 4 p.

1.2. Ratkaise yhtälö $|-2x + 4| = 2$. 4 p.

1.3. Määritä funktion $f(x) = e^{x-1} - x$ derivaatan nollakohdat. 4 p.

2. Prosenttilaskentaa 12 p.

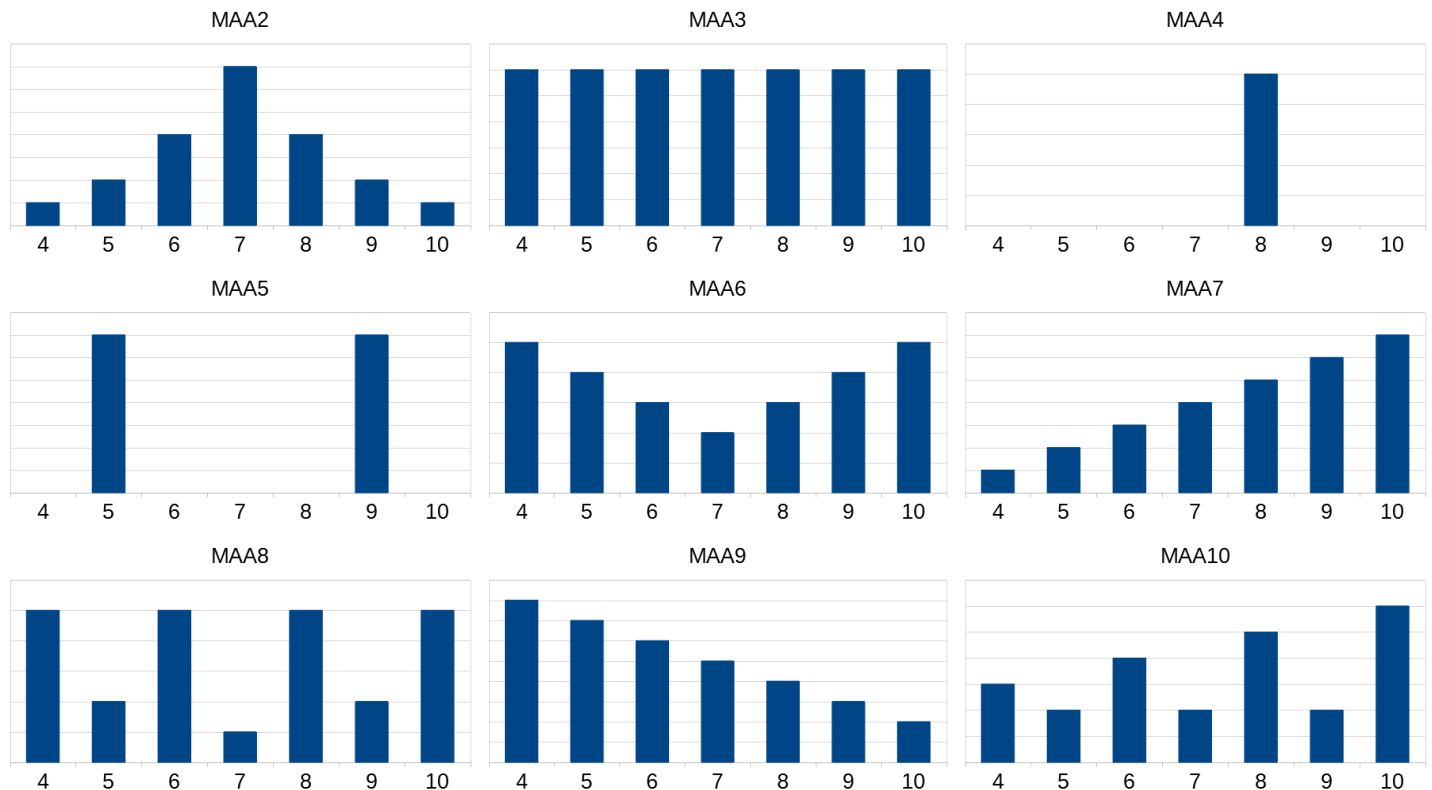
2.1. Yleinen arvonlisäverokanta on Suomessa 24 %. Arvonlisävero lisätään tuotteen lopulliseen myyntihintaan. Pesukone myydään alennusmyynnissä hintaan 699 €. Laske pesukoneen veroton hinta. 4 p.

2.2. Kun huonekaluliike myy sohvaryhmän 2 500 € hintaan, yritykselle jää hinnasta voittoa 30 %. Millä hinnalla yrityksen tulisi myydä sohvaryhmä, kun se haluaa saada myyntihinnasta voittoa 40 %? 4 p.

2.3. Matkapuhelinvalmistajan uusi puhelinmalli on k % kalliimpi kuin aiempi malli. Kuinka monta prosenttia halvempi vanhempi malli on? 4 p.

3. Tilastollisia tunnuslukuja 12 p.

Oheisiin taulukoihin on kuvattu erään lukion pitkän matematiikan kurssien arvosanjakaumat. Vastaa aineiston perusteella oheisiin kysymyksiin. Ilmoita pelkkä vastaus tai pelkät vastaukset. Älä perustele ratkaisujasi.



3.1. Millä kurssilla/kursseilla arvosanojen keskiarvo on 7? 2 p.

3.2. Millä kurssilla/kursseilla arvosanojen mediaani on 7? 2 p.

3.3. Mikä on kurssin MAA7 moodi? 2 p.

3.4. Minkä kurssin arvosanat noudattavat parhaiten normaalijakaumaa? 2 p.

3.5. Mikä on kurssin MAA4 arvosanojen keskihajonta? **2 p.**

3.6. Mikä on kurssin MAA5 arvosanojen keskihajonta? **2 p.**

4. Rationaaliepäyhtälö 12 p.

Ratkaise epäyhtälö $\frac{24}{x^2 - 25} \leq \frac{x - 6}{5 - x}$.

Saat estetyt laskinohjelmat käyttöön palautettuasi A-osan.

Palauta A-osa

B1-osa

 Vastaa kolmeen tehtävään.

5. Suunnikas avaruudessa 12 p.

Pisteestä $P = (2, 3, -4)$ lähtevät vektorit $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ ja $\vec{v} = -3\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ muodostavat suunnikkaan sivut. Määritä

5.1. suunnikkaan muut kärkipisteet **4 p.**

5.2. lävistäjien leikkauspiste **4 p.**

5.3. suunnikkaan pinta-ala. 4 p.**6. Ympyrän yhtälö 12 p.**

Ympyrän keskipiste sijaitsee suoralla $3x - 2y + 5 = 0$ ja eräs ympyrän kehän piste on $(4, 3)$. Määritä ympyrän yhtälö, kun ympyrän pinta-ala on

6.1. mahdollisimman pieni 6 p.**6.2. 10π 6 p.****7. Itseisarvotarkasteluja 12 p.**

Osoita väite todeksi:

Jos $|x - 5| \leq 11^{-9}$, niin $|x^2 - 25| \leq 11^{-8}$.

8. Numeerinen menetelmä 12 p.

Oheisella videolla selvitetään funktion $f(x) = \frac{(x+1)^2}{5} - 1$ ainoaa positiivista nollakohtaa.

0:00 / 0:32

8.1. Esittele lyhyesti se ratkaisuperiaate, jonka avulla nollakohta videolla selvitettiin. 3 p.

8.2. Miksi videon lopussa saatu nollakohta kolmen desimaalin tarkkuudella ei vastaa funktion todellisen nollakohdan kolmidesimaalista likiarvoa? 3 p.

8.3. Ratkaise videolla esiintyvää menetelmää hyödyntäen funktion $g(x) = e^x - 5x + 1$ se nollakohta, joka kuuluu välille $[0, 1]$. Ilmoita vastauksesi kuuden desimaalin tarkkuudella. 6 p.

9. Kolikonheitto 12 p.

Lauri ja Frans heittävät vuorotellen kolmea kolikkoa. Voittaja on se, joka saa ensimmäisenä kolme klaavaa yhdellä heittovuorolla.

Frans aloittaa heittämisen.

9.1. Millä todennäköisyydellä Lauri voittaa pelin toisella heittovuorollaan? 3 p.

9.2. Millä todennäköisyydellä Frans voittaa? 6 p.

9.3. Mikä on pelissä tarvittavien heittojen lukumäärän odotusarvo? Voit määrittää odotusarvon numeerisesti. 3 p.

B2-osa

 Vastaa kolmeen tehtävään.

10. Epidemian leviäminen 12 p.

10.1. Epidemiat levivät usein alussa eksponentiaalisesti. Koronaviruksen kohdalla arvioitiin, että tartuntojen määrä aluksi kaksinkertaistuu noin 6 päivässä. Eksponentiaalista kasvua kuvaa matemattinen malli, jonka mukaan uusien sairastuneiden lukumäärä hetkellä t on $X(t) = X_0 \cdot r^{\frac{t}{s}}$, missä X_0 on sairastuneiden lukumäärä hetkellä $t = 0$ ja s parametri, joka kertoo, kuinka kauan kestää, että sairastuneiden määrä kasvaa r -kertaiseksi. Kuinka monta uutta ihmistä mallin perusteella sairastuu koronaan 24 päivän päästä siitä, kun ensimmäinen tartunta havaittiin? 6 p.

10.2. Tautitapausten määrien kasvua ja viruksen etenemistä epidemian alun jälkeen voidaan hahmotella paremmin logistisen funktion avulla. Logistinen funktio on yksinkertainen tapa kuvata tilannetta, jossa tartuntatapaukset kasvavat ensin eksponentiaalisesti, mutta hidastuvat myöhemmin niin, että tartuntatapauksien kokonaismäärä on rajallinen.

Tällöin $X(t) = K \cdot \left(1 + \frac{K - X_0}{X_0} e^{-rt}\right)^{-1}$, missä K on taudille alttiiden potentiaalinen kokonaismäärä ja X_0 on sairastuneiden lukumäärä tarkastelun alussa.

Logistisella funktiolla on kohta, jossa X kasvaa suurimmalla nopeudella. Tähän ajankohtaan kohdistuu mielenkiintoa, koska ajankohta määrittää sen, missä vaiheessa taudin eteneminen alkaa hidastua ja kuinka paljon tautitapaukset kasvavat enimmillään. Osoita, että ajankohta, jolloin X kasvaa suurimmalla nopeudella, on

$$t_{\max} = \frac{1}{r} \ln \left(\frac{K - X_0}{X_0} \right).$$

Jos $r = 0,1714$, perjantaina 13.3. sairastuneita on 155 ja suomalaisista potentiaalisia taudille alttiita on 3 600 000, niin monenko päivän päästä epidemia kasvaa suurimmalla nopeudella? **6 p.**

11. Pinta-aloja 12 p.

Neliön $ABCD$ jokainen kärkipiste yhdistetään janoilla vastakkaisen sivun keskipisteeseen [Geogebra-tiedoston \(11kvadrat.ggb\)](#) mukaisesti. Yhdysjanat rajoittavat neliön keskelle nelikulmion $JKLM$.

11.1. Kuinka suuri osa nelikulmion $JKLM$ ala on neliön $ABCD$ alasta? **2 p.**

11.2. Osoita, että nelikulmion $JKLM$ ja neliön $ABCD$ pinta-alojen suhde ei riipu neliön $ABCD$ sivun pituudesta. **10 p.**

12. Pyörähdyskappaleita 12 p.

12.1. Pyörähdyskappaleet V_x ja V_y syntyvät, kun funktion $f(x) = \sqrt{x}$ kuvaaja pyörähtää x -akselin ja y -akselin ympäri, kun $x \in [0, a]$. Määritä parametrin a arvo, kun $V_x = V_y$. **3 p.**

12.2. Pyörähdyskappaleet V_x ja V_y syntyvät, kun funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$ kuvaaja pyörähtää x -akselin ja y -akselin ympäri, kun $x \in [0, a]$. Määritä parametrin a arvo, kun $V_x = V_y$. **3 p.**

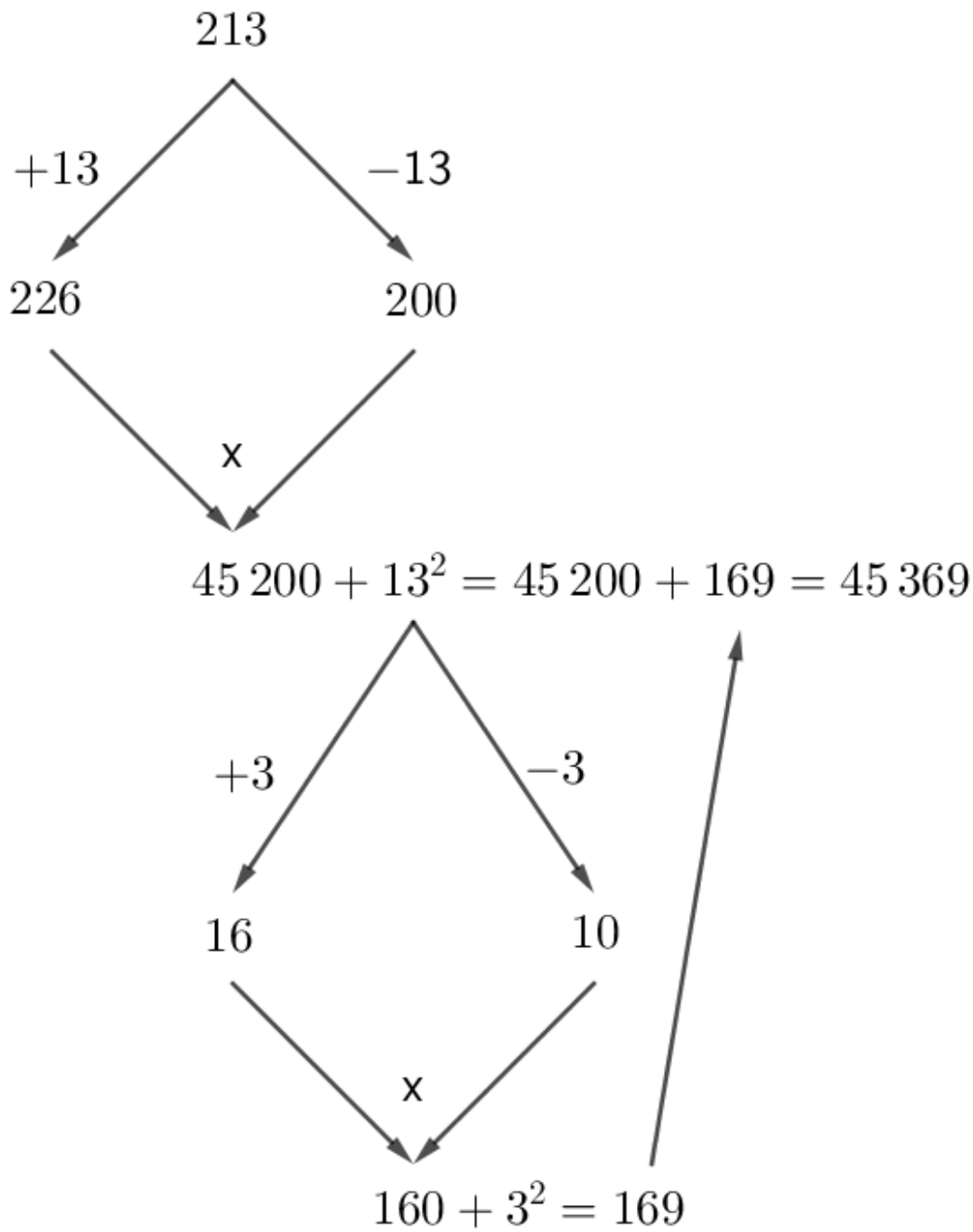
12.3. Pyörähdyskappaleet V_x ja V_y syntyvät, kun funktioiden $f(x) = \sqrt{ax}$ ja $g(x) = \sqrt[3]{ax}$ kuvaajien rajaama äärellinen alue pyörähtää x -akselin ja y -akselin ympäri. Määritä parametrin $a > 0$ arvo, kun $V_x = V_y$. 6 p.

13. Laskusääntö 12 p.

Dimitri laski potenssin 213^2 arvon oheisella tavalla:

$$\begin{aligned} 213^2 &= (213 + 13) \cdot (213 - 13) + 13^2 \\ &= 226 \cdot 200 + 13^2 \\ &= 45\,200 + ((13 + 3) \cdot (13 - 3) + 3^2) \\ &= 45\,200 + (16 \cdot 10 + 9) \\ &= 45\,200 + 169 \\ &= 45\,369 \end{aligned}$$

Dimitri teki laskutekniikastaan lisäksi havainnollistavan kuvan.



13.1. Laske Dimitrin tekniikkaa hyödyntäen potenssin 431^2 arvo. 3 p.

13.2. Osoita Dimitrin tekniikka toimivaksi kaikille kolminumeroisten lukujen neliöille. 9 p.

Lähteet

- 3 Lähde: MFKA.
- 3 Lähde: MFKA.
- 3 Lähde: MFKA.
- 3 Lähde: MFKA.
- 3 Lähde: MFKA.
- 3 Lähde: MFKA.
- 3 Lähde: MFKA.
- 3 Lähde: MFKA.
- 3 Lähde: MFKA.
- 8 Lähde: MFKA.
- 10 Lähde: Juha Kilponen. *Koronaviruskriisi leikkaa syvän loven Suomen talouteen*. Suomen Pankki. BoF Economics Review. <https://helda.helsinki.fi/bof/handle/123456789/17022>. Julkaistu: 30.4.2020. Viitattu: 14.11.2020.
- 11 Lähde: MFKA.
- 13 Lähde: MFKA.

Tarkista, että vastasit ohjeiden mukaiseen määrään tehtäviä. Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.