TYÖ 30. JÄÄN TIHEYDEN MÄÄRITYS

Tehtävä

Tehtävänä on määrittää jään tiheys.

Välineet

Byretti (51010) tai esim. 100 ml mittalasi (50016) ja siihen sopivia jääpaloja, alkoholia (sopii jäähdytinneste lasol), analyysivaaka Adventurer (49950) tai Analytical plus (49940), pipetti, pinsetit tms.

Taustatietoja

Tiheys saadaan massan ja tilavuuden osamääränä. Veden tiheyden arvo on noin 1000 kg/m^3 (MAOL s. 78,81 ja ilman tiheys noin 1,29 kg/m^3 (MAOL s. 78,84. F1, s. 50-52 (44-46). Tiheydet riippuvat lämpötilasta ja korkeudesta.

Suoritusohjeita

Byrettiin laitetaan esim. pipetillä etanolia (lasolia) siten, että pinta on 40 ml:n kohdalla. Sitten katkaistaan sopiva noin 1 –2 cm jääpala ja punnitaan vaa' alla 1 mg:n tarkkuudella. Jääpala pudotetaan byrettiin. Nopeus on tärkeää, jotta jääpala ei sula. Nestepinnan nousukorkeudesta saadaan jään tilavuus. Jää uppoaa kokonaan etanoliin (lasoliin). Jääpalan tilavuus voidaan määrittää myös upottamalla jääpala nopeasti mittalasiin, jossa on lasolia. Tämä ei ole niin tarkka tilavuuden määrityskeino kuin byrettimittaus (1 ml = 1 cm^3). Mittaus kannattaa suorittaa usealla jääpalalla, esim. viisi kertaa. Jään tiheys lasketaan keskiarvona. Tiheyden absoluuttinen virhe lasketaan virhekaavalla (**). Tuloksena ilmoitetaan jään tiheys virherajoineen.

Mittauspöytäkirja

Taulukko 1.

Massa (g)	Tilavuus (cm^3)	Tiheys (g/cm^3)
		Keskiarvo:

$$\text{Jään tiheys} = \frac{\text{massa}}{\text{tilavuus}} \quad \text{eli} \quad \rho = \frac{m}{V} \qquad (*)$$

Jään tiheys =

VIRHETARKASTELUT:

Tiheyden maksimivirheelle voidaan johtaa lauseke (totea!, ks. liite 1)

$$\boxed{\Delta\rho \;=\; \frac{1}{V}\Delta m \;+\; \frac{m}{V^2}\Delta V} \qquad \textbf{(**)}$$

Laske tiheyden maksimivirhe **Δρ**, joka on myös tiheyden *absoluuttinen virhe.* Käytä massan m ja tilavuuden V arvona jonkin mittauksen arvoja.

V =
m =
ΔV =
Δm =

Lasketaan tiheyden absoluuttinen virhe Δρ lausekkeen (**) mukaan:

$\Delta\rho$ =

TULOS: <u>JÄÄN TIHEYS VIRHERAJOINEEN</u>: ρ ± Δρ

ρ = (±)· 10^3 kg/m^3.

Vertaa tulostasi taulukon arvoon (MAOL s. 77).

Taulukon arvo: jään tiheys =

Pohdi virhelähteitä. Mitkä seikat aiheuttivat tulokseen virhettä?

Tehtävä 1. Jääkappale, jonka tilavuus on V, kelluu vedessä. Jään tiheys on 0,92 g/cm^3 ja veden 1,0 g/cm^3. Kuinka monta prosenttia jääkappaleesta on veden pinnan yläpuolella?

Tehtävä 2. Miksi järvet jäätyvät vain pinnalta eikä pohjasta?

<u>Liite 1</u>. <u>Tuloksen virheen määrittäminen virheen kasautumissääntöjen avulla;</u>
tulos virherajoineen: $f \pm \Delta f$ **.**

TULOKSEN VIRHE VOIDAAN MONISSA TAPAUKSISSA LASKEA SEURAAVIEN YKSINKERTAISTEN, <u>VIRHEEN KASAUTUMISTA KUVAAVIEN SÄÄNTÖJEN</u> AVULLA:

$$f = a + b \quad \Rightarrow \quad |\Delta f| = |\Delta a| + |\Delta b| \tag{1}$$

$$f = a - b \quad \Rightarrow \quad |\Delta f| = |\Delta a| + |\Delta b| \tag{2}$$

$$f = ab \quad \Rightarrow \quad \frac{|\Delta f|}{|f|} = \frac{|\Delta a|}{|a|} + \frac{|\Delta b|}{|b|} \tag{3}$$

$$f = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{|\Delta f|}{|f|} = \frac{|\Delta a|}{|a|} + \frac{|\Delta b|}{|b|} \tag{4}$$

$$f = a^n \quad \Rightarrow \quad \frac{|\Delta f|}{|f|} = \left| n \frac{\Delta a}{a} \right| \tag{5}$$

Eksponentti n säännössä 5 voi olla negatiivinen tai murtoluku, joten sääntöä 5 voi soveltaa myös juurilausekkeiden käsittelyyn. Säännöt 1…5 perustuvat ns. *kokonaisdifferentiaaliin.*
Kolmen muuttujan x, y, z tapauksessa kokonaisdifferentiaali antaa säännön:

$$|\Delta f| = \left| \frac{\delta f}{\delta x} \Delta x \right| + \left| \frac{\delta f}{\delta y} \Delta y \right| + \left| \frac{\delta f}{\delta z} \Delta z \right|. \tag{6}$$

Säännöissä 1 … 6 esiintyvät itseisarvomerkit voidaan jättää pois niistä termeistä, jotka tiedetään positiivisiksi. Tällöin virheen tulkitaan edustavan virheen itseisarvoa. Yksiköiden sijoittaminen ei ole tarpeen, koska ne supistuisivat välittömästi pois. Kun muistaa, että virheen arvioinnilla pyritään selvittämään virheen suuruusluokka, numerosijoituksissa voi pyöristää suureiden arvoja. Absoluuttinen virhe saadaan kertomalla mittaustuloksen perusteella laskettu arvo (yleensä keskiarvo) suhteellisella virheellä.

Virhetarkastelua on ohjeissa sekä esim. seuraavassa kirjallisuudessa:
- Arminen-Mäkelä-Mäkinen-Puhakka-Vierinen: Fysiikan laboratoriotyöt, Tammertekniikka 2. painos, 1999 s. 9-12.
- Luoma-Rahkonen-Tuovinen: Kokeellinen fysiikka s. 14-15,
- Hirvinen-Suvilinna-Virtanen: Fysiikan töitä, MAOL, Ky 1983 s. 13-14,
- Mäki-Valjakka-Vulli: Fysiikan työt I osa I, TTKK 1999 s. 29-33).

(Suorakulmaisen särmiön tilavuuden virheelle ΔV on johdettu jo aiemmin (ks. työ 1) lauseke:
$\Delta V = bc \cdot \Delta a + ac \cdot \Delta b + ab \cdot \Delta c$, missä a, b ja c ovat särmien pituudet.

Suorakulmaisen särmiön tilavuus $V_1 = abc$.
Virheen kasautumissäännön 3 mukaan saadaan:

$$\left|\frac{\Delta V_1}{V_1}\right| = \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right| + \left|\frac{\Delta c}{c}\right|.$$

Termien ollessa positiivisia voidaan itseisarvomerkit jättää pois.
Kerrotaan yhtälön molemmat puolet tilavuudella $V_1 = abc$;

$$\frac{\Delta V_1}{abc} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} \quad \Big| \cdot abc \text{, jolloin saadaan:}$$

$$\Delta V_1 = abc \cdot \frac{\Delta a}{a} + abc \cdot \frac{\Delta b}{b} + abc \cdot \frac{\Delta c}{c} \text{ ja supistamalla saadaan edelleen:}$$

$$\Delta V_1 = bc \cdot \Delta a + ac \cdot \Delta b + ab \cdot \Delta c .$$

<u>Tiheyden maksimivirhekaavan Δρ johtaminen.</u>

TAPA I: *Virheen kasautumissääntöjen avulla.*

Tiheys $\rho = \frac{m}{V}$.

Virheen kasautumissäännön 4 avulla saadaan: $\left|\frac{\Delta \rho}{\rho}\right| = \left|\frac{\Delta m}{m}\right| + \left|\frac{\Delta V}{V}\right|$.

Sijoitetaan lausekkeet $\rho = \frac{m}{V}$ ja $m = \rho V$

yhtälöön: $\left|\frac{\Delta \rho}{\rho}\right| = \left|\frac{\Delta m}{m}\right| + \left|\frac{\Delta V}{V}\right|$. Tällöin saadaan: $\left|\frac{\Delta \rho}{\frac{m}{V}}\right| = \left|\frac{\Delta m}{\rho V}\right| + \left|\frac{\Delta V}{V}\right|$ ja edelleen sijoittamalla

$\rho = \frac{m}{V}$ saadaan;

$$\left|\frac{V\Delta \rho}{m}\right| = \left|\frac{\Delta m}{\frac{m}{V}V}\right| + \left|\frac{\Delta V}{V}\right| \text{, josta seuraa } \left|\frac{V\Delta \rho}{m}\right| = \left|\frac{\Delta m}{m}\right| + \left|\frac{\Delta V}{V}\right|.$$

Kerrotaan nyt ko. yhtälön molemmat puolet $\frac{m}{V}$:llä, jolloin seuraa:

$$\left|\frac{m \cdot V\Delta \rho}{V \cdot m\rho}\right| = \left|\frac{m \cdot \Delta m}{V \cdot m}\right| + \left|\frac{m\Delta V}{V \cdot V}\right| \text{, jos saadaan}$$

$$|\Delta \rho| = \left|\frac{\Delta m}{V}\right| + \left|\frac{m\Delta V}{V^2}\right| \text{ ja lopuksi saadaan tiheyden virhekaava}$$

$$\Delta \rho = \frac{1}{V}\Delta m + \frac{m}{V^2}\Delta V .$$

TAPA II.

Virhearvio voidaan laskea **kokonaisdifferentiaali**n tai **logaritmisen derivoinnin** avulla. Tiheyden maksimivirhekaavan $\Delta\rho$ johtaminen *Kokonaisdifferentiaalin* avulla.

Tiheys $\rho = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{V}}$.

(ks. Luoma-Rahkonen-Tuovinen: Kokeellinen fysiikka s. 14-15,
Hirvinen-Suvilinna-Virtanen: Fysiikan töitä, MAOL, Ky 1983 s. 13-14,
Mäki-Valjakka-Vulli: Fysiikan työt I osa I, TTKK 1999 s. 29-33).
Tiheyden maksimivirheelle saadaan osittaisderivoinnilla ja diffrentioimalla:

$$\delta\rho \quad \leq \quad \left|\frac{\delta\rho}{\delta \mathrm{m}}\right|\delta \mathrm{m} + \left|\frac{\delta\rho}{\delta \mathrm{V}}\right|\delta \mathrm{V}$$

$$\Delta\rho \quad \leq \quad \left|\frac{\delta\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{V}}\right)}{\delta \mathrm{m}}\right|\Delta \mathrm{m} + \left|\frac{\delta\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{V}}\right)}{\delta \mathrm{V}}\right|\Delta \mathrm{V}$$

$$\Delta\rho \quad \leq \quad \left|\frac{1}{\mathrm{V}}\right|\Delta \mathrm{m} + \left|-\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{V}^2}\right|\Delta \mathrm{V}$$, josta edelleen saadaan maksimivirheen lauseke:

$$\Delta\rho \leq \frac{1}{\mathrm{V}}\Delta \mathrm{m} + \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{V}^2}\Delta \mathrm{V}.$$

TAPA III.

Jos yhtälössä on vain kerto- ja jakolaskuja sekä potenssiinkorotuksia, virhekaavan johto yksinkertaistuu käyttämällä *logaritmista derivointia.* Vastaava tiheyden maksimivirheen tulos voidaan johtaa myös seuraavasti:

$$\rho = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{V}}.$$

Otetaan molemmista puolista logaritmi, jolloin saadaan: $\ln\rho = \ln\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{V}}$.

Ja edelleen: $\ln\rho = \ln \mathrm{m} - \ln \mathrm{V}$.

Derivoimalla yhtälön molemmat puolet ja laskemalla yhteen termien itseisarvot saadaan tiheyden ρ suhteelliselle maksimivirheelle yhtälö: $\Delta\rho \leq \frac{1}{\mathrm{V}}\Delta \mathrm{m} + \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{V}^2}\Delta \mathrm{V}$.