7.lk matematiikka

Murtoluvut

Versio 4.2 (Syksy 2026)

Janne Koponen

Tässä monisteessa teoriaosuudet ovat kuvakaappauksia tekemistäni kurssin powerpoint-dioista. Diat löytyivät aikaisemmin Hatanpään koulun kotisivuilta. Nyt ne on siirretty pedanettiin materiaalisivuilleni:

https://peda.net/p/joykop/mm

Osa esimerkeistä on sellaisia, että niitä voi kotonakin olla mukavampi seurata vaihe vaiheelta, esimerkiksi murtolukujen kertolaskuissa.

Kun joskus aikaa riittää, muokkaan tästäkin siistimmän version, jossa teoriat eivät ole kopioidut dioista. Jostain syystä kuitenkin juuri tämä kurssi on joka vuosi sitä kiireisintä aikaa vuodesta.

Janne Koponen

Sisällys

1. Jaollisuus ja tekijät 4
2. Alkuluvut 6
3. Suurin yhteinen tekijä (syt) ja pienin yhteinen jaettava (pyj) 8
4. Murtoluku ja sekaluku 10
5. Muunnokset sekalukuihin ja desimaalilukuihin 14
6. Yhteen ja vähennyslasku 20
7. Murtolukujen kertolasku 26
8. Murtolukujen jakolasku 30
9. Murtolukulaskuja, laskujärjestys 36
10. Prosentti 38
11. Kertaustehtäviä 42
12. Vastauksia: 45

1. Jaollisuus ja tekijät

Olkoon a ja b ovat positiivisia kokonaislukuja.
Luku a on **jaollinen** luvulla b, jos jakolaskun $\frac{a}{b} = c$ tulos on kokonaisluku.
Tällöin vastaavasti kertolaskulla saadaan $b \cdot c = a$, missä b ja c ovat luvun a **tekijöitä**.

Luvulla voi olla useita eri tekijöitä, koska sama luku voidaan saada monella erilaisella kertolaskulla. Esimerkiksi luku 12 voidaan saada kertolaskuilla:
$1 \cdot 12 = 12, \quad 2 \cdot 6 = 12 \quad tai \quad 3 \cdot 4 = 12$
Tällöin luvun 12 kaikki tekijät ovat: 1, 2, 3, 4, 6 ja 12.
Erityishuomio: Jokaisella kokonaisluvulla on aina tekijänä ainakin luku 1 ja luku itse.

Esimerkki 1.

Onko luku 10 jaollinen luvuilla: a) 2 b) 4?

a) $\frac{10}{2} = 5$ eli 10 on jaollinen luvulla 2. b) $\frac{10}{4} = 2{,}5$ eli 10 ei ole jaollinen luvulla 4.

Eli käytännössä jaollisuuden voi testata jakamalla jakolaskun. B-esimerkissä laskimme jakolaskun loppuun, mutta jaollisuuden toteamisen kannalta olisi riittänyt myös todeta, $\frac{10}{4} = 2\ jää\ 2$.

Jaollisuussääntöjä muutamalle erikoistapaukselle

Muutamille luvuille on olemassa myös jakolaskuja nopeampia tapoja testata jaollisuutta.

Luku	Ohje testaamiseen
2	Kokonaisluku on jaollinen 2:lla jos sen viimeinen (ykkösten paikka) numero on 0, 2, 4, 6 tai 8.
3	Kokonaisluku on jaollinen 3:lla, jos sen numerot laskettuna yhteen ovat jaollisia 3:lla.
5	Kokonaisluku on jaollinen 5:llä, jos sen viimeinen numero on 0 tai 5.
9	Kokonaisluku on jaollinen 9:llä, jos sen numerot laskettuna yhteen ovat jaollisia 9:lla.
10	Kokonaisluku on jaollinen 10:llä, jos sen viimeinen numero on 0.

Esimerkki 2.

a) 34 on jaollinen luvulla 2, koska sen viimeinen numero on 4.

b) 37 ei ole jaollinen luvulla 2, koska en viimeinen numero on 7.

c) 123456 testataan laskemalla 1+2+3+4+5+6=21, $\frac{21}{3} = 7$ eli 123456 on jaollinen 3:lla.

d) 1234 testataan laskemalla 1+2+3+4=10, $\frac{10}{3} = 3\ jää\ 1$ eli 1234 ei ole jaollinen 3:lla.

Esimerkki 3.

a) Luettele luvun 6 tekijät:
0 Ei ole, nollalla ei voida jakaa
1 On kaikkien kokonaislukujen tekijä
2 On
3 On
4 Ei, koska $\frac{6}{4} = 1\ jää\ 2$
5 Ei, koska $\frac{6}{5} = 1\ jää\ 1$
6 On, jokainen luku on itsensä tekijä
Vastaus: 1, 2, 3 ja 6.

b) Luettele luvun 100 tekijät:
Käydään läpi tekijäpareittain:
1 On ja sen pari on 100, koska 1 · 100 = 100
2 On ja sen pari on 50, koska 2 · 50 = 100
3 Ei ole
4 On ja sen pari on 25
5 On ja sen pari on 20
6, 7, 8 ja 9 eivät ole, voi testata jakolaskulla
10 on sen pari on 10
Enempää ei tarvitse testata, koska parin pitäisi olla alle 10, eli uusia tekijöitä ei enää löytyisi.
Vastaus: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 ja 100.

Tehtäviä

1. Onko luku 20 jaollinen luvulla
   a) 2 b) 3
   c) 4 d) 9

2. Onko luku 42 jaollinen luvulla
   a) 5 b) 6
   c) 7 d) 8

3. Onko luku 120 jaollinen luvulla
   a) 5 b) 10
   c) 15 d) 18

---

4. Mitkä seuraavista luvuista ovat jaollisia kahdella?
   a) 13 b) 126
   c) 1234567 d) 0

5. Mitkä seuraavista luvuista ovat jaollisia kolmella?
   a) 7 b) 27
   c) 127 d) 1227

6. Mitkä seuraavista luvuista ovat jaollisia viitosella?
   a) 15 b) 157
   c) 2050 d) 3682

7. Mitkä seuraavista luvuista ovat jaollisia kutosella?
   a) 12 b) 125
   c) 1308 d) 137537

8. Mitkä seuraavista luvuista ovat jaollisia kymmenellä?
   a) 124 b) 1240
   c) 2341200 d) 12480002

---

9. Luokassa on 20 oppilasta. Voidaanko heidät jakaa yhtä suuriin ryhmiin, jos ryhmiä on
   a) 4 b) 7
   c) 15 d) 20

10. Korttipakassa on 52 korttia ja kaikki kortit jaetaan pelaajille. Saavatko kaikki yhtä monta korttia, jos pelaajia on
    a) 5 b) 8
    c) 4 d) 3

---

11. Luettele kaikki luvun 12 tekijät

12. Luettele kaikki luvun 13 tekijät

13. Luettele kaikki luvun 60 tekijät

14. Korttipakassa on 52 korttia. Millä kaikilla pelaajamäärillä kortit voidaan jakaa kaikille tasan?

15. Pussissa on palloja, jotka voidaan jakaa tasan kolmelle, viidelle ja seitsemälle. Montako palloa pussissa vähintään on?

16. Vuodessa on 365 päivää, moneenko yhtä monen päivän jaksoon pystyt vuoden jakamaan?

2. Alkuluvut

Alkulukuja on perinteisesti pidetty arvoituksellisina ja salaperäisinä lukuina, joihin kätkeytyy paljon matemaattisia arvoituksia. Ne ovat monesti myös kirjoissa ja elokuvissa arvoitusten kohteina, jos juonessa on jotain matematiikkaan viittaavaa. Oikeassa elämässä alkulukuja käytetään muun muassa internetin salaustekniikoissa. Peruskoulun matematiikan kannalta suurin merkitys alkuluvuilla on tekijöihin jaossa ja murtolukujen laventamisessa ja sieventämisessä.

> **Alkuluvuksi** kutsutaan ykköstä suurempia kokonaislukuja, joka ei ole jaollinen muilla positiivisilla kokonaisluvuilla kuin 1 ja luku itse. Alkuluvulla on siis vain kaksi tekijää 1 ja se itse.
> Alkulukuja kutsutaan myös jaottomiksi luvuiksi.

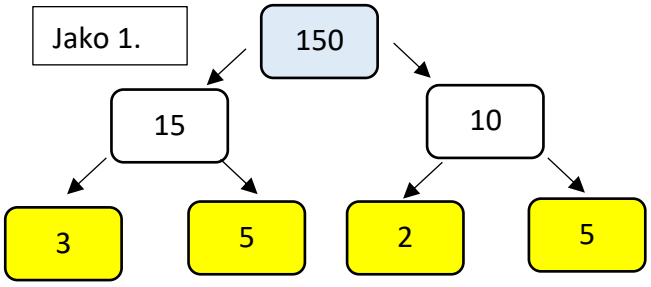
Esimerkki 1.

Käydään läpi pieniä kokonaislukuja ja tarkistetaan ovatko ne alkulukuja:
0 ja 1 eivät kelpaa, koska alkuluvun pitää olla suurempi kuin 1.
2 on alkuluku.
3 on alkuluku.
4 ei ole alkuluku, se voidaan jakaa numerolla 2.
5 on alkuluku.
6 ei ole alkuluku, se voidaan jakaa numerolla 2 ja 3.
7 on alkuluku.
8 ei ole alkuluku, se voidaan jakaa numerolla 2 ja 4.
Tällä tavalla voidaan jatkaa ikuisesti, mutta mitä pidemmälle edetään, sitä vaivalloisempaa työ on. Tähän vaivalloisuuteen perustuvat alkulukuihin liittyvät salaukset, kun salausavaimeksi valitaan kahden todella ison alkuluvun tulo, on alkuperäisten alkulukujen selvittäminen todella hidasta.

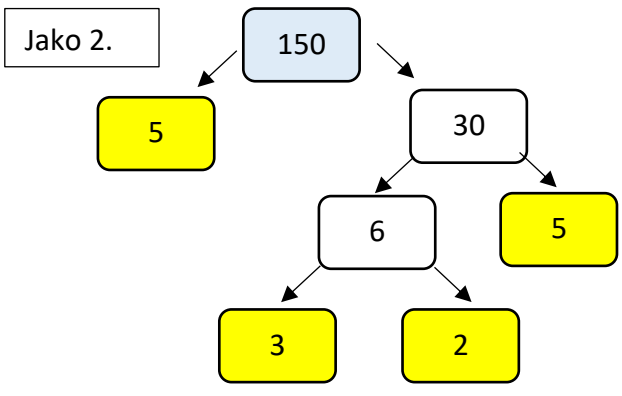
> Jokainen ykköstä suurempi kokonaisluku voidaan ilmoittaa yksikäsitteisesti alkulukujen kertolaskuna. Näitä kertolaskun alkulukuja kutsutaan **alkutekijöiksi**.

Esimerkki 2.

Määritetään luvun 150 alkutekijät käyttäen alkutekijäpuuta. Ideana on se, että jaetaan luku kahteen tekijään. Saadut tekijät jaetaan edelleen kahteen tekijään. Tätä toistetaan, kunnes jokaisen tekijähaaran päässä on alkuluku jota ei voida enää jakaa. Näiden alkulukujen kertolasku tuottaa alkuperäisen luvun ja niitä kutsutaan kyseisen luvun alkutekijöiksi.



Sillä ei ole väliä, millaisen jaon valitsee, lopputulos on aina sama (keltaisella). Vieressä on tehty kaksi eri jakoa mallina. Lopputulos molemmilla on:



$$\mathbf{150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2}$$

Alkutekijät ilmoitetaan yllä olevalla tyylillä kertolaskumuodossa ja tarvittaessa voidaan käyttää potensseja.

Tehtäviä

1. Mitkä seuraavista ovat alkulukuja (kyllä/ei)?
   a) 5 b) 9
   c) 11 d) 12
   e) 14 f) 17
   g) 37 h) 49

2. a) Ruksita alla olevasta taulukosta pois ne luvut, jotka eivät ole alkulukuja.

~~1~~	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

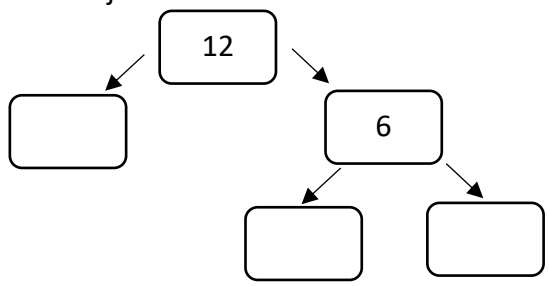
   b) Luettele alkuvut, jotka ovat pienempiä kuin 50.

3. a) Luettele kaikki luvun 20 tekijät

   b) Ympäröi edellisestä listasta alkuluvut

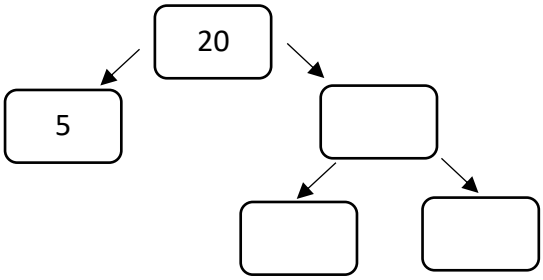
---

4. Täydennä tekijöihinjakopuu ja päättele luvun 12 alkutekijät



   Vastaus: 12 =

5. Jaa luku 20 alkutekijöihin.



   Vastaus: 20 =

Tee seuraavat tehtävät vihkoosi ja käytä tekijöihinjakopuuta.

6. Jaa luku 60 alkutekijöihin.

7. Jaa luku 200 alkutekijöihin.

8. Jaa luku 63 alkutekijöihin.

9. Jaa luku 420 alkutekijöihin.

10. Jaa luku 990 alkutekijöihin.

---

11. Mikä on se luku, jonka alkutekijät ovat
    a) 2, 3 ja 5

    b) 2, 3, 3 ja7?

12. Kuinka monta erilaista lukua keksit, joiden alkutekijät ovat 5,7 ja 11?

---

13. a) Etsi lukujen 50 ja 75 alkutekijät

    b) Mikä on 50 ja 75 yhteisten alkutekijöiden tulo?

    c) Jaa luvut 50 ja 75 b-kohdan vastauksella. Mitä huomaat a-kohdan vastauksiin verratessa?

    d) Jos haluat laventaa murtoluvut $\frac{1}{50}$ ja $\frac{1}{75}$ samannimisiksi, milläköhän luvulla niitä kannattaisi laventaa?

3. Suurin yhteinen tekijä (syt) ja pienin yhteinen jaettava (pyj)

Murtolukujen laskuissa on hyödyllistä löytää aina mahdollisimman optimaalisia lukuja, joilla murtolukuja lavennetaan tai supistetaan. Kun nyt on tutustuttu tekijöihin ja alkutekijöihin tutustutaan seuraavaksi käsitteisiin syt ja pyj, joiden avulla nämä optimaaliset luvut voidaan määritellä.

> Olkoot a ja b positiivisia kokonaislukuja. Lukujen a ja b **suurin yhteinen tekijä** on suurin luku, joka on sekä a:n että b:n tekijä.
> Lukujen a ja b suurinta yhteistä tekijää merkitään lyhyesti: **syt(a, b)**
> Jos muuta suurinta yhteistä tekijää ei ole, on 1 aina kaikkien kokonaislukujen yhteinen tekijä.

Esimerkki 1.

Selvitetään syt(12, 20)
Luvun 12 tekijät ovat: 1, 2, 3, 4, 6 ja 12.
Luvun 20 tekijät ovat: 1, 2, 4, 5, 10 ja 20.
Suurin molemmissa luetteloissa oleva luku on 4, joten **syt(12, 20) = 4**

Selvittäminen alkutekijöiden avulla:
$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$
$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$
yhteisiä alkutekijöitä ovat $2 \cdot 2 = 4$, joten **syt(12, 20) = 4**

Kannattaa on huomata, että syt(12, 20) = 4 on suurin mahdollinen luku, jolla lukuja 12 ja 20 voidaan supistaa. Eli tällä tavalla selvitetään supistaja. Alkutekijöiden avulla erityisen kätevää, kun lukuja on monta.

> Olkoot a ja b positiivisia kokonaislukuja. Lukujen a ja b **pienin yhteinen jaettava** on pienin positiivinen luku, joka voidaan jakaa sekä luvulla a että b.
> Lukujen a ja b pienintä yhteistä jaettavaa merkitään lyhyesti: **pyj(a, b)**
> Pienin yhteinen jaettava on aina olemassa ja maksimissaan se voi olla $a \cdot b$.

Esimerkki 1.

Selvitetään pyj(12, 20)
Luvun 12 kertotaulu: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, …
Luvun 20 kertotaulu: 20, 40, 60, 80, 100, …
Pienin molemmissa luetteloissa oleva luku on 60, joten **pyj(12, 20) = 60**

Selvittäminen alkutekijöiden avulla:
$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$
$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$
yhteisiä alkutekijöitä ovat $2 \cdot 2 = 4$ ja niiden lisäksi on 3 ja 5, joten **pyj(12, 20) = $\mathbf{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60}$**

Huomaa, että alkutekijöistä jäivät ”yli” 3 ja 5. Nämä ovat sellaisia lukuja, joilla on hyvä laventaa (”ristiin”) murtolukuja samannimisiksi, jos niiden nimittäjät ovat 12 ja 20. Pyj(12, 20) = 60 on puolestaan se lopputulos, mitä lavennusten jälkeen nimittäjiin tulee.

Murtoluvut - 3. Suurin yhteinen tekijä (syt) ja pienin yhteinen jaettava (pyj)

Tehtäviä

1. a) Mitkä ovat luvun 9 tekijät?

   b) Mitkä ovat luvun 15 tekijät?

   c) syt(9, 15) =

   d) Supista murtoluku (supistajana c-vastaus)

   $\frac{9}{15} =$

2. a) Määritä syt(12, 18)

   b) Supista murtoluku

   $\frac{12}{18} =$

3. a) Määritä syt(15, 27)

   b) Supista murtoluku

   $\frac{15}{27} =$

Tee seuraavat tehtävät vihkoosi.

4. a) Määritä syt(33, 55)
   b) Supista murtoluku $\frac{33}{55}$

5. a) Määritä syt(16, 56)
   b) Supista murtoluku $\frac{16}{56}$

6. a) Määritä syt(31, 40)
   b) Supista murtoluku $\frac{31}{40}$

7. a) Määritä syt(21, 56)
   b) Supista murtoluku $\frac{21}{56}$

8. Laatikossa on 156 sinistä kuulaa ja 195 punaista kuulaa. Kuulapelin alussa jokaisella pelaajalla pitää olla keskenään saman verran sinisiä kuulia ja saman verran punaisia kuulia. Montako pelaajaa enintään peliin voi osallistua, jos kaikkia kuulia pitää käyttää.

9. a) Jatka luvun 4 kertotauluja
   4, 8, ____, ____, ____, ____, ____
   b) Jatka luvun 6 kertotauluja
   6, 12, ____, ____, ____, ____, ____
   c) pyj(4, 6) =

   d) Lavenna samannimisiksi

   $\frac{1}{4} =$ $\frac{1}{6} =$

10. a) Määritä pyj(12, 15)

    b) Lavenna samannimisiksi

    $\frac{1}{12} =$ $\frac{1}{15} =$

11. Määritä pyj(3, 5)

    b) Lavenna samannimisiksi

    $\frac{1}{3} =$ $\frac{1}{5} =$

Tee seuraavat vihkoosi, pohdi myös, miten laventaisit samannimisiksi murtoluvut, joiden nimittäjinä kyseiset luvut ovat

12. Määritä
    a) pyj(3, 4) b) pyj(6, 8)
    c) pyj(6, 9) d) pyj(4, 9)

13. Määritä
    a) pyj(12, 20) b) pyj(20, 30)
    c) pyj(16, 25) d) pyj(18, 36)

14. Määritä
    a) pyj(32, 48) b) pyj(26, 65)
    c) pyj(21, 27) d) pyj(36, 56)

15. Määritä
    a) pyj(3, 4, 5) b) pyj(5, 6, 8)
    c) pyj(6, 15, 21) d) pyj(16, 20, 25)

16. Kaupassa on muffinivuokia 12 kpl paketeissa ja valmismuffinitaikinaa 20 kpl paketeissa. Montako muffinia pitää vähintään tehdä, ettei vuokia tai taikinaa jää yli?

4. Murtoluku ja sekaluku

Murtoluku

1

- Murtoluku on jakolasku, jota ei ole laskettu loppuun asti.

Esimerkki 1.

$\frac{3}{4} = 0{,}75$ (3 on jaettava ja 4 on jakaja)

- Murtoluku on lukuna kuitenkin yhtä pätevä kuin desimaalilukuvastauskin. Joskus murtolukuvastaus on jopa parempi.

Esimerkki 2.

$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$

(desimaaliluku on pakko katkaista, joten se ei ole yhtä tarkka.)

Murtoluvun osat:

$\frac{2}{5}$ — 2: Osoittaja (jaettava); 5: Nimittäjä (jakaja)

Sekaluvun osat:

$3\frac{2}{5}$ — 2: Osoittaja (jaettava); 5: Nimittäjä (jakaja); 3: Kokonaisosa

Laventaminen/supistaminen

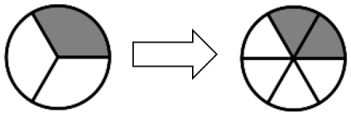
2

- Murtoluvun laventaminen tehdään kertomalla sekä osoittaja että nimittäjä samalla luvulla.
- Luvun arvo ei muutu lavennettaessa.

Esimerkki 1.

$\frac{1}{3} \overset{2)}{=} \frac{2}{6}$

Sama esimerkki pitsanpaloilla



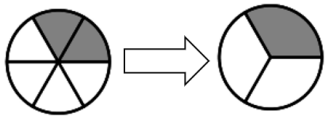
Pitsan määrä pysyi samana, vaikka paloja on enemmän.

- Supistaminen on laventamisen vastakohta. Sekä osoittaja että nimittäjä jaetaan samalla luvulla.
- Luvun arvo ei taaskaan muutu.

Esimerkki 1.

$\frac{2}{6} \overset{(2}{=} \frac{1}{3}$

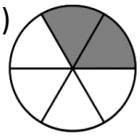
Sama esimerkki pitsanpaloilla

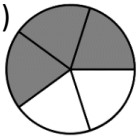


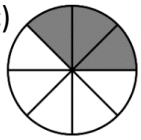
Nyt pitsanpalat ”hitsattiin” yhteen, mutta määrä on sama.

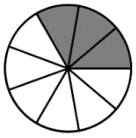
Tehtäviä

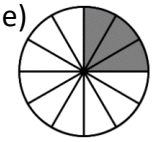
1. Merkitse murtolukuna.

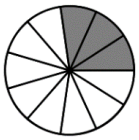
a) 

b) 

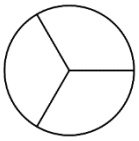
c) 

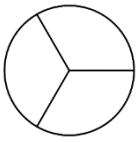
d) 

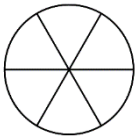
e) 

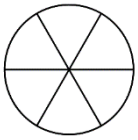
f) 

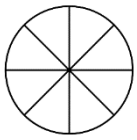
2. Väritä kuvasta murtoluvun osoittama alue.

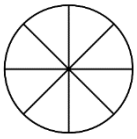
a) $\frac{1}{3}$ 

b) $\frac{2}{3}$ 

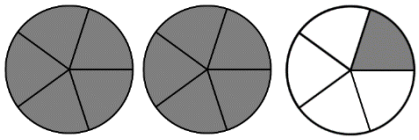
c) $\frac{4}{6}$ 

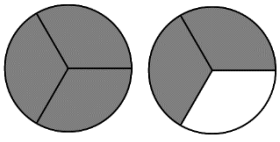
d) $\frac{1}{6}$ 

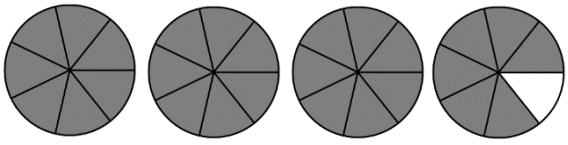
e) $\frac{5}{8}$ 

f) $\frac{1}{4}$ 

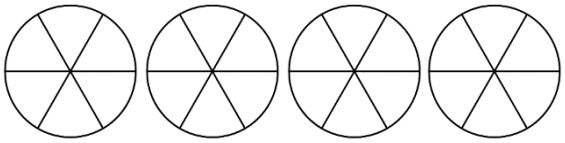
3. Merkitse murtolukuna ja sekalukuna

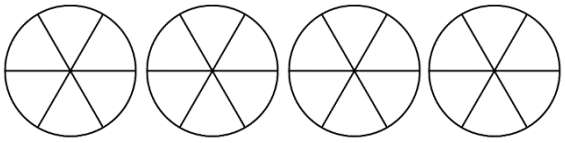
a) 

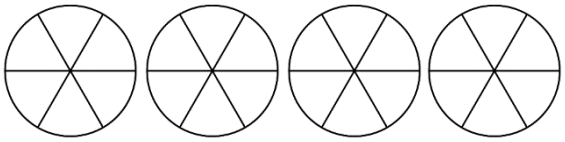
b) 

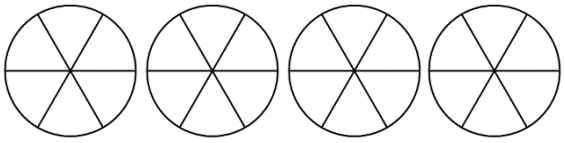
c) 

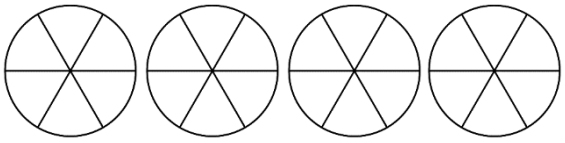
4. Väriä kuvasta murtoluvun tai sekaluvun osoittama alue.

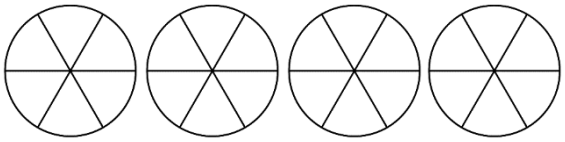
a) $1\frac{4}{6}$ 

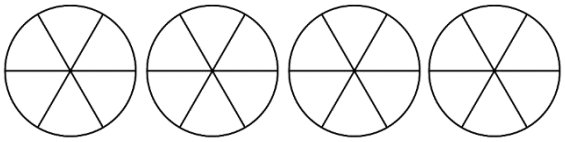
b) $3\frac{1}{6}$ 

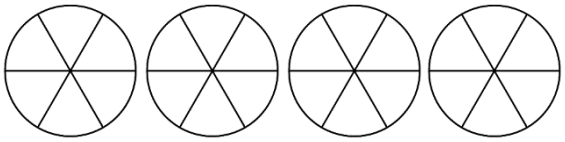
c) $2\frac{5}{6}$ 

d) $\frac{13}{6}$ 

e) $\frac{20}{6}$ 

f) $\frac{5}{3}$ 

g) $2\frac{1}{2}$ 

h) $1\frac{8}{3}$ (hämäävä, mutta mahdollinen) 

5. Lavenna samannimisiksi.

a) $\frac{2}{3} =$ $\frac{2}{6} =$

b) $\frac{1}{12} =$ $\frac{3}{4} =$

c) $\frac{2}{3} =$ $\frac{2}{9} =$

d) $\frac{1}{3} =$ $\frac{1}{7} =$

e) $\frac{5}{18} =$ $\frac{2}{6} =$

f) $\frac{4}{15} =$ $\frac{2}{5} =$

6. Lavenna samannimisiksi.

a) $\frac{3}{4} =$ $\frac{5}{6} =$

b) $\frac{1}{9} =$ $\frac{2}{12} =$

c) $\frac{2}{3} =$ $\frac{2}{4} =$

d) $\frac{1}{3} =$ $\frac{2}{5} =$

e) $\frac{1}{4} =$ $\frac{2}{6} =$

f) $\frac{1}{15} =$ $\frac{1}{12} =$

7. Lavenna samannimisiksi

a) $1\frac{2}{3} =$ $\frac{2}{6} =$

b) $2\frac{1}{3} =$ $\frac{2}{12} =$

c) $\frac{2}{3} =$ $4\frac{2}{15} =$

d) $2\frac{2}{3} =$ $1\frac{8}{21} =$

8. Lavenna samannimisiksi. (Pohdi, mitkä ovat nimittäjien tekijät ja mikä on nimittäjien pyj)

a) $\frac{7}{300} =$ $\frac{13}{60} =$

b) $\frac{1}{81} =$ $\frac{1}{54} =$

c) $\frac{2}{35} =$ $\frac{1}{15} =$

d) $\frac{1}{30} =$ $\frac{1}{42} =$

9. Supista.

a) $\frac{2}{6} =$ b) $\frac{3}{6} =$

c) $\frac{2}{4} =$ d) $\frac{3}{15} =$

e) $\frac{5}{30} =$ f) $\frac{5}{15} =$

10. Supista.

a) $\frac{4}{10} =$ b) $\frac{9}{15} =$

c) $\frac{8}{12} =$ d) $\frac{6}{15} =$

e) $\frac{25}{30} =$ f) $\frac{20}{15} =$

11. Supista.

a) $2\frac{3}{9} =$ b) $8\frac{2}{8} =$

c) $1\frac{6}{10} =$ d) $3\frac{9}{15} =$

e) $\frac{125}{30} =$ f) $6\frac{2}{15} =$

12. Lavenna/supista luvut samannimisiksi. Ympyröi suurempi luku.

a) $\frac{1}{2} =$ $\frac{3}{8} =$

b) $\frac{3}{5} =$ $\frac{2}{3} =$

c) $\frac{4}{8} =$ $\frac{10}{16} =$

d) $\frac{3}{4} =$ $\frac{5}{6} =$

13. Ympyröi luvuista suurempi. Perustele muuttamalla ensin samannimisiksi (tai sanallisesti).

a) $\frac{1}{2} =$ $\frac{5}{8} =$

b) $\frac{3}{15} =$ $\frac{2}{12} =$

c) $\frac{-2}{4} =$ $\frac{-10}{16} =$

d) $\frac{3}{5} =$ $\frac{2}{3} =$

e) $-\frac{3}{4} =$ $\frac{1}{6} =$

f) $\frac{1}{15} =$ $\frac{1}{12} =$

14. Järjestä murtoluvut järjestyksessä suurimmasta pienimpään

$\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$

$\frac{5}{6}$ $\frac{14}{12}$

$\frac{8}{20}$ $\frac{21}{30}$

15. Järjestä murto/sekaluvut järjestyksessä suurimmasta pienimpään

$\frac{5}{3}$ $1\frac{3}{4}$

$1\frac{2}{5}$ $\frac{19}{12}$

$1\frac{8}{30}$ $\frac{28}{15}$

16. Kallella, Villellä ja Maijalla on jokaisella samanlainen pullo limonadia. Kalle on juonut kolme viidesosaa juomastaan, Ville on juonut viisi kahdeksasosaa juomastaan ja Maija on juonut neljä seitsemäsosaa. Kuka on juonut eniten ja kuka vähiten. Tee laskut vihkoosi.

17. Anulla, Liisalla ja Petrillä on jokaisella samanlainen pullo limonadia. Anu on juonut kolme seisemäsosaa juomastaan, Liisalla on jäljellä kaksi kolmasosa juomastaan ja Petri on juonut viisi kahdestoistaosaa juomastaan. Kuka on juonut eniten ja kuka vähiten. Tee laskut vihkoosi.

5. Muunnokset sekalukuihin ja desimaalilukuihin

Murtoluku <-> Sekaluku

3

Sekaluku -> murtoluku

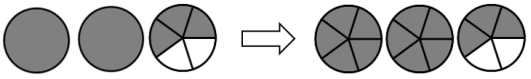
- Alla laskuesimerkki, miten sekaluku muutetaan murtoluvuksi.

Esimerkki 1.

$$2\frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3}{5} = \frac{13}{5}$$

Yleensä näitä välivaiheita ei kirjoiteta näkyviin.

Sama pitsanpaloilla:



Murtoluku -> Sekaluku

- Kuinka monta kertaa nimittäjä mahtuu osoittajaan -> kokonaisosa.
- Mitä jää jäljelle on sekaluvun jäljelle jäänyt osoittajaosa.
- Käytännössä kyseessä on siis jakolasku.

Esimerkki 2.

$$\frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$$

		0	2		
	5	1	3		
		1	0		
			3		

Homman voi ajatella myös päässä. Jakolasku toimii kuitenkin hankalissakin tapauksissa.

Murto/sekaluku <-> Desimaaliluku

4

- Päättyvä desimaaliluku voidaan aina muuttaa murto/sekaluvuksi
  - Päättymätön on hankalampaa eikä aina edes onnistu
- Nimittäjäksi voidaan valita 10, 100, 1000, jne.
  - Nollia yhtä monta kuin desimaaliluvussa desimaaleja

Esimerkki 1.

a) $0{,}25 = \frac{25}{100} \overset{(25}{=} \frac{1}{4}$

b) $3{,}4 = 3\frac{4}{10} \overset{(2}{=} 3\frac{2}{5}$

- Muutokseen murto/sekaluvusta desimaaliluvuksi on kaksi keinoa.
  - Lavennetaan nimittäjäksi 10, 100, tms.
  - Tai tehdään jakolasku

Esimerkki 2.

a) $4\overset{5)}{\frac{3}{20}} = 4\frac{15}{100} = 4{,}15$

b) $3\frac{5}{8} = 3{,}625$

Pilkun vasen puoli tulee suoraan kokonaisosista

		0,	6	2	5
	8	5,	0		
	-	4	8		
			2	0	
		-	1	6	
				4	0
			-	4	0
					0

Tehtäviä

Valitse kustakin lohkosta omaa osaamistasoasi vastaavat tehtävät, lohkojen välissä on vaakaviiva. Mallivastauksia ei ole supistettu, ellei sitä erikseen ole pyydetty, jotta voit keskittyä nimenomaan muunnoksiin. Yleensä vastaukset pitää kuitenkin supistaa.

1. Muuta sekaluvut murtoluvuiksi.

a) $1\frac{2}{3} =$ b) $1\frac{5}{6} =$

c) $-1\frac{2}{7} =$ d) $1\frac{6}{15} =$

e) $2\frac{2}{5} =$ f) $-2\frac{3}{10} =$

2. Muuta sekaluvut murtoluvuiksi.

a) $1\frac{2}{8} =$ b) $-1\frac{5}{7} =$

c) $2\frac{2}{7} =$ d) $-2\frac{2}{15} =$

e) $3\frac{2}{15} =$ f) $2\frac{13}{100} =$

3. Muuta sekaluvut murtoluvuiksi.

a) $-4\frac{2}{3} =$ b) $5\frac{5}{6} =$

c) $5\frac{2}{9} =$ d) $2\frac{6}{20} =$

e) $-4\frac{2}{25} =$ f) $2\frac{3}{60} =$

---

4. Muuta murtoluvut sekaluvuiksi.

a) $\frac{5}{3} =$ b) $\frac{4}{3} =$

c) $\frac{-9}{4} =$ d) $\frac{12}{5} =$

e) $\frac{15}{8} =$ f) $\frac{-13}{6} =$

5. Muuta murtoluvut sekaluvuiksi.

a) $-\frac{31}{6} =$ b) $\frac{15}{6} =$

c) $\frac{24}{12} =$ d) $-\frac{100}{15} =$

e) $\frac{-25}{12} =$ f) $\frac{13}{3} =$

6. Muuta murtoluvut sekaluvuiksi.

a) $\frac{35}{6} =$ b) $-\frac{45}{6} =$

c) $\frac{-87}{12} =$ d) $\frac{100}{5} =$

e) $-\frac{284}{12} =$ f) $\frac{113}{3} =$

---

7. Muuta murtoluvut desimaaliluvuiksi.

a) $\frac{2}{10} =$ b) $\frac{-3}{10} =$

c) $\frac{82}{100} =$ d) $\frac{6}{100} =$

e) $-\frac{25}{10} =$ f) $\frac{13}{1000} =$

8. Muuta murtoluvut desimaaliluvuiksi.

a) $\frac{2}{5} =$

b) $\frac{3}{5} =$

c) $\frac{1}{4} =$

d) $-\frac{1}{5} =$

e) $\frac{3}{2} =$

f) $\frac{3}{4} =$

9. Muuta murtoluvut desimaaliluvuiksi.

a) $\frac{1}{20} =$

b) $\frac{-1}{25} =$

c) $\frac{28}{20} =$

d) $\frac{6}{25} =$

e) $\frac{15}{50} =$

f) $-\frac{3}{50} =$

Jos tehtävissä 10. ja 11. tulee päättymätön luku, pyöristä 5 desimaaliin.

10. *Muuta murtoluvut desimaaliluvuiksi.

a) $\frac{1}{8} =$

b) $-\frac{3}{6} =$

c) $\frac{1}{3} =$

d) $\frac{6}{15} =$

e) $\frac{-25}{30} =$

f) $\frac{13}{15} =$

11. *Muuta murtoluvut desimaaliluvuiksi.

a) $-\frac{2}{6} =$

b) $\frac{3}{7} =$

c) $\frac{-8}{12} =$

d) $\frac{6}{9} =$

---

12. Muuta sekaluvut desimaaliluvuiksi.

a) $2\frac{2}{10} =$ b) $1\frac{3}{10} =$

c) $3\frac{32}{100} =$ d) $-2\frac{7}{100} =$

e) $-3\frac{152}{1000} =$ f) $2\frac{13}{1000} =$

13. Muuta sekaluvut desimaaliluvuiksi.

a) $3\frac{2}{5} =$

b) $-6\frac{1}{5} =$

c) $3\frac{1}{4} =$

d) $5\frac{1}{5} =$

e) $-2\frac{1}{2} =$

f) $12\frac{3}{4} =$

14. Muuta sekaluvut desimaaliluvuiksi.

a) $-5\frac{7}{20} =$

b) $8\frac{1}{25} =$

c) $3\frac{8}{20} =$

d) $7\frac{40}{25} =$

e) $-8\frac{17}{50} =$

f) $9\frac{32}{50} =$

Jos (kun) tehtävissä 15. ja 16. tulee päättymätön luku, pyöristä 5 desimaaliin.

15. *Muuta sekaluvut desimaaliluvuiksi.

a) $-2\frac{3}{8} =$

b) $4\frac{2}{6} =$

c) $7\frac{2}{3} =$

d) $-5\frac{8}{15} =$

e) $-9\frac{25}{30} =$

f) $4\frac{13}{15} =$

16. *Muuta sekaluvut desimaaliluvuiksi.

a) $5\frac{4}{6} =$

b) $-8\frac{6}{7} =$

c) $15\frac{8}{12} =$

d) $-8\frac{5}{9} =$

e) $4\frac{8}{15} =$

f) $3\frac{5}{12} =$

17. Muuta desimaaliluvut murtoluvuiksi tai sekaluvuiksi.

a) 0,3 =

b) –0,47 =

c) 0,7 =

d) –0,37 =

e) 1,3 =

f) 3,7 =

18. Muuta desimaaliluvut murtoluvuiksi tai sekaluvuiksi ja **supista**.

a) –0,5 =

b) 0,4 =

c) 1,2 =

d) –0,35 =

e) 1,25 =

f) 3,4 =

19. Muuta desimaaliluvut murtoluvuiksi tai sekaluvuiksi ja **supista**.

a) –25,75 =

b) 0,32 =

c) –1,25 =

d) 0,30 =

e) 1,265 =

f) –3,472 =

Tämä vain niille, joille muu on jo helppoa.

Sitten vähän syvällisempää asiaa murtolukuihin ja päättymättömiin desimaalilukuihin liittyen.

Käyttämämme lukujärjestelmä pohjautuu lukuun kymmenen, joka saadaan kertolaskulla 2 kertaa 5. Tämä seurauksena kaikkien sellaisten murtolukujen, joiden **supistetun** muodon **nimittäjän** alkutekijöinä on muita alkulukuja kuin 2 tai 5, desimaalimuodot ovat päättymättömiä. Jos oli liian pitkä ja monimutkainen virke on sama asia numeroituna ohjeena.

Voit testata onko murtoluvun desimaalimuoto päättymätön seuraavasti:
1. Supista murtoluku.
2. Jaa murtoluvun nimittäjä alkutekijöihin.
3. Jos alkutekijöissä on vain lukuja 2 ja 5, on desimaaliesitys päättyvä, jos on muita alkulukuja (esim. 3 tai 7), ei desimaaliluku lopu ikinä.

Esimerkki

a) $\frac{14}{35} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

b) $\frac{15}{35} = \frac{3}{7} = 0{,}428571428571\ldots$

Tarkkasilmäiset kuitenkin huomaavat b-esimerkistä, että vaikka desimaaleja riittää loputtomasti, ne toistuvat ikuisesti. Peli ei siis ole menetetty.

Tässä vaiheessa on hyvä miettiä sitäkin, miksi desimaaliluku lähtee toistamaan itseään. Syy löytyy jakolaskusta, jolla desimaaliluvut saadaan

	0,	4	2	8	5	7	1	4	
7	3,	0							
–	2	8							
		2	0						
	–	1	4						
			6	0					
		–	5	6					
				4	0				
			–	3	5				
					5	0			
				–	4	9			
						1	0		
					–		7		
							3	0	

Keltaisella on merkitty se tilanne, missä sama jakolasku tulee ensimmäistä kertaa uudelleen käsittelyyn. Siitä kohdasta alkaen desimaaliesitys toistaa itseään.

Kun toistuvia desimaaliesityksiä kirjoitetaan näkyville, voi toistuvan osan ilmoittaa merkitsemällä sen yläpuolelle vaakaviivan. Esimerkiksi $\frac{3}{7} = 0{,}\overline{428571}$ tarkoittaa, että desimaaliesitys jatkuu loputtomasti toistaen tuota numeroyhdistelmää. Tätä kuitenkin käytetään hyvin harvoin ja matematiikassakin, jos halutaan olla tarkkoja, jätetään luku murtolukumuotoon desimaalimuodon sijaan.

Otetaan seuraavaksi tarkasteluun tilanteet, joissa nimittäjä on 9, 99, 999, jne.

Esimerkkejä

$\frac{4}{9} = 0{,}4444444\ldots$

$\frac{42}{99} = 0{,}4242424\ldots$

$\frac{42}{990} = 0{,}04242424\ldots$
(Huomaa, miten nolla ysien perässä vaikutti.)

$\frac{123}{999} = 0{,}123123123\ldots$

$\frac{42}{999} = 0{,}042042042\ldots$

$\frac{128}{99} = 1\frac{29}{99} = 1{,}2929292929\ldots$

Jos nimittäjä on siis ”9-joukko”, tulee toistuvia desimaalilukuja, jonka toistuvan pätkän pituus on ”ysien määrä” ja toistuva numerojoukko on osoittaja. Kokonaisosat pitää toki ensin poistaa, kun viimeisessä tapauksessa on näytetty. Tämä toimii myös toisinpäin:

$0{,}45745674567\ldots = \frac{457}{999}$

Tämän teoriapläjäyksen jälkeen pääsetkin tekemään asiaan liittyviä tehtäviä.

Tämän sivun tehtäviin ei tarkoituksella ole vastauksia takana. Tarkistamisen voidaan laskimella. **Joka laskun laskettuasi, tarkista laskimella.**

20. Muunna seuraavat murtoluvut desimaalimuotoon. Tee tarvittaessa jakolaskut vihkoosi.
    a) $\frac{1}{3} =$
    b) $\frac{1}{6} =$
    c) $\frac{1}{9} =$
    d) $\frac{1}{11} =$
    e) $\frac{1}{13} =$
    f) $\frac{1}{15} =$

21. Muunna seuraavat murtoluvut desimaalimuotoon. Tee tarvittaessa jakolaskut vihkoosi.
    a) $\frac{4}{7} =$
    b) $\frac{8}{11} =$
    c) $\frac{13}{9} =$
    d) $\frac{5}{13} =$
    e) $\frac{5}{6} =$
    f) $\frac{2}{30} =$

22. Muunna seuraavat desimaaliluvut murto/sekalukumuotoon. Käytä apuna edellisistä tehtävistä saamiasi likiarvoja.
    a) 0,66666… =
    b) 1,3333… =
    c) 0,83333… =
    d) 1,166666… =

23. Määritä seuraaville desimaaliluvuille murto/sekalukuesitys.
    a) 0,55555… =
    b) 0,34343434… =
    c) 2,323232323… =
    d) 7,777777… =
    e) 0,456456456… =
    f) 3,454545… =

24. Määritä seuraaville desimaaliluvuille murto/sekalukuesitys. Supista vastaus, kaikissa on enintään kaksinumeroinen nimittäjä.
    a) 0,272727… =
    b) 0,454545… =
    c) 0,060606…=
    d) 0,424242… =

25. Sitten samanlaisia, mutta vaikeampia. Käytä laskinta tai kännyä apuna supistamisissa. Huomaa, että 0,2 pitää merkitä erikseen ja ysirimpsun perässä pitää olla nolla, jotta desimaalit menevät oikein.
    Tähän löytyy vastaus vastausosiosta, älä lunttaa ennen kuin olet itse oikeasti yrittänyt.
    $0{,}2\overline{142857} =$

6. Yhteen ja vähennyslasku

Murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku

5

- Murtolukuja voi laskea yhteen tai vähentää vain, kun ne ovat samannimisiä [sic].
  - Tarvittaessa ne pitää laventaa samannimisiksi.
- Laskutoimitus suoritetaan vain osoittajilla, nimittäjä ei muutu.
- Huomaa, että negatiivisten lukujen laskusäännöt pätevät myös murtoluvuille. Varaudu siis pohtimaan, miten mikin lasketaan

Esimerkki 1.

a) $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$

b) $\frac{3}{8}+{}^{2)}\frac{2}{4}=\frac{3}{8}+\frac{4}{8}=\frac{7}{8}$

Esimerkki 2. (negatiiviset mukana)

a) $\frac{3}{10}-\frac{7}{10}=\frac{3-7}{10}=\frac{-4}{10}{}^{(2}=\frac{-2}{5}$

b) $-\frac{3}{8}-\frac{1}{8}=\frac{-3-1}{8}=\frac{-4}{8}\ {}^{(4}=\frac{-1}{2}$

c) $-\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{-3+1}{8}=\frac{-2}{8}\ {}^{(2}=\frac{-1}{4}$

Sinisellä olevia välivaiheita ei merkitä näkyville.

Sekalukujen yhteen- ja vähennyslasku (1)

6

- Sekaluvut voi laskea monella tavalla
- Tapa 1. Muutetaan murtoluvuiksi, lasketaan lasku ja muutetaan tarvittaessa takaisin sekaluvuksi.
- Tapa 2. Lasketaan kokonaiset erikseen ja murto-osat erikseen.
  - Vaatii enemmän välivaiheita, mutta toimii usein paremmin varsinkin isoilla luvuilla.
  - Tämä on usein se, miten asia on helpompi hahmottaa päässälaskuna.

Esimerkki 1.

Laske $2\frac{3}{4}+5\frac{2}{4}$

Tapa 1.

$$2\frac{3}{4}+5\frac{2}{4}=\frac{11}{4}+\frac{22}{4}=\frac{33}{4}=8\frac{1}{4}$$

Tapa 2.

$$2\frac{3}{4}+5\frac{2}{4}=2+5+\frac{3}{4}+\frac{2}{4}$$
$$=7+\frac{5}{4}=7+1\frac{1}{4}=8\frac{1}{4}$$

Sekalukujen yhteen- ja vähennyslasku (2)

7

Esimerkki 2.

Laske $-2\frac{3}{4}+5\frac{2}{4}$

Tapa 1.

$$-2\frac{3}{4}+5\frac{2}{4}$$
$$=-\frac{11}{4}+\frac{22}{4}$$
$$=\frac{11}{4}$$
$$=2\frac{3}{4}$$

Tapa 2.

$$-2\frac{3}{4}+5\frac{2}{4}$$
$$=-2+5-\frac{3}{4}+\frac{2}{4}$$
$$=3-\frac{1}{4}$$
$$=2\frac{4}{4}-\frac{1}{4}$$
$$=2\frac{3}{4}$$

Sekalukujen yhteen- ja vähennyslasku (3)

8

Tapa 2 vaikuttaa pidemmältä, mutta isommilla kokonaisosilla se voi olla helpompi

Esimerkki 3. Laske $13\frac{1}{11}-8\frac{3}{8}$

Tapa 1.

$$13\frac{1}{11}-8\frac{3}{8}$$
$$=\frac{^{8)}144}{11}-\frac{^{11)}67}{8}$$
$$=\frac{1152}{88}-\frac{737}{88}$$
$$=\frac{415}{88}$$
$$=4\frac{63}{88}$$

Tapa 2.

$$13\,^{8)}\frac{1}{11}-8\,^{11)}\frac{3}{8}$$
$$=13-8+\frac{8}{88}-\frac{33}{88}$$
$$=5-\frac{25}{88}$$
$$=4\frac{88}{88}-\frac{25}{88}$$
$$=4\frac{63}{88}$$

Tässä tämä ei enää vaikuta yhtään työläältä verrattuna murtoluvuksi muuttamiseen.

Tehtäviä

Tehtävät alkavat todella helpoista ja niitä on paljon. **Jos ekat ovat helppoja, siirry vaikeampiin.**

1. Laske
   a) $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=$ b) $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=$
   c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=$ d) $\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=$
   e) $\frac{2}{5}+\frac{4}{5}=$ f) $\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=$

2. Laske
   a) $\frac{3}{4}-\frac{2}{4}=$ b) $\frac{3}{5}-\frac{7}{5}=$
   c) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=$ d) $\frac{3}{5}-\frac{6}{5}=$
   e) $\frac{6}{8}-\frac{5}{8}=$ f) $\frac{2}{4}-\frac{3}{4}=$

3. Laske (supista aina lopputulos, jos voit)
   a) $\frac{4}{9}-\frac{7}{9}=$ b) $\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=$
   c) $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=$ d) $\frac{3}{5}-\frac{6}{5}=$
   e) $\frac{8}{12}-\frac{3}{12}=$ f) $\frac{3}{15}-\frac{2}{15}=$

4. Pitsat leikataan kahdeksaan osaan. <u>Kirjoita laskuna</u> ja laske kuinka paljon pitsaa on, kun
   a) lautasella on kolme pitsan palaa ja laatikossa neljä palaa.

   b) laatikossa on seitsemän palaa ja siitä syödään neljä.

   c) yhtä pitsaa on viisi palaa ja toista neljä palaa.

   d) kokonaisesta pitsasta syödään 3 palaa.

5. Laske. (Muista lavennus ennen laskua.)
   a) $\frac{3}{8}+\frac{2}{4}=$
   b) $\frac{3}{10}+\frac{1}{5}=$
   c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=$
   d) $\frac{3}{5}+\frac{8}{6}=$

6. Laske
   a) $\frac{3}{8}-\frac{2}{4}=$
   b) $\frac{3}{10}-\frac{1}{5}=$
   c) $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=$
   d) $\frac{3}{5}-\frac{8}{6}=$

7. Laske
   a) $\frac{5}{6}-\frac{2}{4}-\frac{1}{2}=$
   b) $\frac{5}{4}-\frac{3}{12}+\frac{1}{6}=$
   c) $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=$
   d) $\frac{3}{7}-\frac{8}{6}-\frac{1}{7}=$

8. Kirjoita laskuna ja laske.
   a) Kalle syö kolmanneksen karkkipussista ja Ville puolet. Kuinka paljon on syöty?

   b) Säiliössä on vettä $\frac{4}{5}$. Sitä valuu pois $\frac{1}{3}$ säiliön tilavuudesta. Kuinka paljon vettä on jäljellä?

   c) Kalle lukee kirjasta $\frac{1}{5}$ ja seuraavana päivänä aikoo lukea siitä $\frac{2}{3}$. Kuinka iso osa jää jäljelle?

   d) Ville omistaa $\frac{2}{7}$ talosta, Kalle $\frac{1}{6}$ ja Mirkku loput. Kuinka paljon Mirkku omistaa?

9. Laske

a) $\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=$

b) $\frac{5}{6}-\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=$

c) $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=$

d) $\frac{3}{7}+\frac{8}{7}-\frac{1}{7}=$

e) $\frac{6}{15}+\frac{4}{15}-\frac{1}{15}=$

f) $\frac{8}{25}-\frac{12}{25}+\frac{1}{25}=$

10. Laske

a) $\frac{3}{4}-\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=$

b) $\frac{5}{6}-\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=$

c) $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=$

d) $\frac{3}{7}-\left(\frac{8}{7}+\frac{1}{7}\right)=$

e) $\frac{6}{12}+\left(\frac{4}{12}-\frac{1}{12}\right)=$

f) $\left(\frac{5}{12}+\frac{3}{12}\right)-\frac{1}{12}=$

11. Kirjoita laskuna ja laske.

a) Suklaalevy on 18 osassa. Kalle syö 5 osaa ja Ville 8. Kuinka iso osa suklaalevystä jäi?

b) Kallen autossa on $\frac{1}{8}$ tankillista bensaa. Hän tankkaa siihen puoli tankillista lisää ja ajaa kotiin, joka kuluttaa $\frac{3}{8}$ tankillista. Paljonko tankissa vielä on?

c) Limsakoriin mahtuu 24 pulloa. Kallella on 37 pulloa, joista 12 menee kavereille, 15 jää jääkaappiin ja 7 hän juo. Montako korillista limsaa Kallella vielä on?

12. Laske

a) $\frac{1}{4}-\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\right)=$

b) $\frac{5}{6}-\left(\frac{3}{12}+\frac{1}{6}\right)=$

c) $\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)=$

d) $\left(\frac{3}{7}+\frac{8}{6}\right)-\frac{1}{7}=$

e) $\frac{6}{12}+\left(\frac{4}{15}-\frac{1}{12}\right)=$

f) $\frac{8}{25}-\left(\frac{11}{15}+\frac{1}{15}\right)=$

13. Laske

a) $-\frac{3}{4}-\frac{2}{4}=$

b) $-\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=$

c) $-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=$

d) $-\frac{3}{6}+\frac{8}{6}=$

e) $-\frac{6}{15}-\frac{4}{15}=$

f) $-\frac{8}{5}-\frac{12}{5}=$

14. Laske

a) $-\frac{3}{6}-\frac{2}{4}=$

b) $-\frac{3}{15}+\frac{1}{5}=$

c) $-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=$

d) $\frac{3}{7}-\frac{8}{14}=$

e) $-\frac{6}{9}-\frac{4}{27}=$

f) $\frac{8}{30}-\frac{12}{15}=$

15. Laske

a) $1\frac{1}{4}+2\frac{2}{4}=$

b) $2\frac{3}{5}+2\frac{1}{5}=$

c) $2\frac{1}{3}+1\frac{1}{3}=$

d) $-1\frac{2}{5}-2\frac{3}{5}=$

e) $5\frac{2}{3}+2\frac{2}{3}=$

16. Laske

a) $1\frac{1}{4}-2\frac{2}{4}=$

b) $2\frac{3}{5}-2\frac{1}{5}=$

c) $2\frac{1}{3}-1\frac{1}{3}=$

d) $-1\frac{2}{5}+2\frac{3}{5}=$

e) $5\frac{2}{3}-2\frac{2}{3}=$

17. Laske

a) $-2\frac{1}{8}+3\frac{2}{4}=$

b) $2\frac{2}{5}-4\frac{3}{10}=$

c) $2\frac{1}{12}+1\frac{1}{4}=$

d) $-1\frac{2}{5}-2\frac{3}{10}=$

18. Laske

a) $-2\frac{1}{5}+3\frac{2}{4}=$

b) $-2\frac{3}{5}-2\frac{1}{6}=$

c) $-2\frac{1}{4}+1\frac{2}{3}=$

d) $\frac{2}{5}-2\frac{1}{7}=$

e) $5\frac{2}{5}-\frac{7}{3}=$

19. Laske

a) $-1+\frac{3}{4}=$

b) $2-\frac{1}{5}=$

c) $\frac{1}{3}+3=$

d) $-\frac{2}{5}-2=$

e) $5-\frac{2}{5}=$

20. Laske

a) $1+2\frac{1}{4}=$

b) $2\frac{3}{7}-2=$

c) $2-1\frac{1}{3}=$

d) $\frac{-2}{5}+2\frac{3}{5}=$

e) $5\frac{2}{7}-\frac{3}{7}=$

Laske seuraavat tehtävät muuttamatta niitä välillä puhtaiksi murtoluvuiksi

21. Laske vihkoon

a) $1\frac{1}{4}+2\frac{2}{4}$ b) $2\frac{3}{5}+2\frac{1}{5}$

c) $2\frac{1}{3}+1\frac{1}{2}$ d) $1\frac{2}{5}+2\frac{7}{10}$

e) $5\frac{2}{3}+2\frac{2}{3}$ f) $8\frac{5}{6}+\frac{4}{12}$

22. Laske vihkoon

a) $7\frac{3}{4}-2\frac{2}{4}$ b) $5\frac{3}{5}-2\frac{1}{5}$

c) $9\frac{1}{3}-4\frac{1}{2}$ d) $8\frac{1}{5}-3\frac{3}{10}$

e) $5\frac{1}{3}-2\frac{2}{3}$ f) $8\frac{1}{6}-\frac{7}{12}$

23. Laske vihkoon (vähän haastavampia)

a) $3\frac{3}{4}-4\frac{2}{4}$ b) $5\frac{3}{5}-5\frac{4}{5}$

c) $2\frac{1}{3}-3\frac{1}{2}$ d) $3\frac{1}{5}-8\frac{3}{10}$

e) $8\frac{2}{3}-7\frac{1}{3}$ f) $8\frac{1}{6}-12\frac{4}{12}$

24. Laske vihkoon (taas vähän haastavampia)

a) $3\frac{5}{12}-4\frac{3}{15}$

b) $2\frac{6}{8}-5\frac{4}{5}$

c) $16\frac{8}{16}-3\frac{5}{20}$

d) $-3\frac{4}{5}-8\frac{3}{10}$

e) $-\frac{2}{3}+7\frac{1}{3}$

f) $-8\frac{1}{15}-12\frac{4}{12}$

7. Murtolukujen kertolasku

Murtolukujen kertolasku (1)

9

- Osoitttajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät kerrotaan keskenään.

Esimerkki 1.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{8}{15}$$

(sinisiä välivaiheita ei tarvitse kirjoittaa näkyville)

- Kokonaisluvulla kerrotaan vain osoittaja.

Esimerkki 2.

$$5\cdot\frac{8}{9}=\frac{5\cdot 8}{9}=\frac{40}{9}=4\frac{4}{9}$$

- Sekaluvut pitää muuttaa murtoluvuiksi.

Esimerkki 3.

$$2\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{11}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{55}{24}=2\frac{7}{24}$$

- Kertolaskun merkkisäännöt pätevät

Esimerkki 4.

a) $-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=-\frac{3}{8}$

b) $-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=+\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$

Murtolukujen kertolasku (2)

10

- Supistamista voidaan tehdä jo ennen kertolaskun laskemista.
- Supistaminen voidaan tehdä siten, että yliviivataan supistettavat ja kirjoitetaan uudet arvot niiden ylä/alapuolelle.

Esimerkki 4.

$$\frac{\cancel{4}^{\,1}}{5}\cdot\frac{9}{\cancel{8}_{\,2}}=\frac{1\cdot 9}{5\cdot 2}=\frac{9}{10}$$

(sinisiä välivaiheita ei tarvitse kirjoittaa näkyville)

Esimerkki 5.

$$\frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{3}_{\,1}}\cdot\frac{\cancel{9}^{\,3}}{\cancel{4}_{\,2}}=\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$$

Esimerkki 6. (Haastavampi)

$$\frac{\cancel{16}^{\,2}}{\cancel{27}_{\,9}}\cdot\frac{\cancel{15}^{\,1}}{\cancel{35}_{\,7}}\cdot\frac{\cancel{21}^{\,1}}{\cancel{8}_{\,1}}=\frac{2\cdot 1\cdot 1}{3\cdot 1\cdot 1}=\frac{2}{3}$$

Eli myös kerran supistettua numeroa voi supistaa, jos sille löytyy supistuskaveri.

Tehtäviä

Tehtävien ylä- ja alapuolella on tilaa supistusmerkinnöille. Jos ei mahdu, käytä ruutuvihkoasi.

1. Laske

a) $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} =$ b) $\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} =$

c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} =$ d) $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{5} =$

e) $\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} =$ f) $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{3} =$

2. Laske (supista ennen kertolaskua, jos voit)

a) $\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3} =$ b) $\frac{3}{14} \cdot \frac{7}{5} =$

c) $\frac{21}{6} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) =$ d) $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} =$

e) $\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{15} =$ f) $\frac{12}{8} \cdot \frac{4}{9} =$

3. Laske

a) $\frac{5}{4} \cdot \frac{16}{25} =$ b) $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{10} =$

c) $-\frac{8}{5} \cdot \frac{-5}{16} =$ d) $\frac{123}{67} \cdot \frac{67}{123} =$

e) $\frac{25}{6} \cdot \frac{4}{15} =$ f) $\frac{125}{64} \cdot \frac{32}{25} =$

4. Laske

a) $\frac{50}{4} \cdot \frac{20}{25} =$ b) $\frac{200}{9} \cdot \frac{36}{100} =$

c) $\frac{24}{5} \cdot \frac{25}{16} =$ d) $\frac{49}{6} \cdot \frac{42}{-210} =$

e) $\frac{35}{22} \cdot \frac{33}{15} =$ f) $\frac{75}{64} \cdot \frac{128}{25} =$

5. Merkitse laskuna ja laske.

a) Suklaalevystä leikataan $\frac{2}{3}$ ja siitä syötiin $\frac{3}{4}$. Kuinka iso osa alkuperäisestä syötiin?

b) Auton tankissa on $\frac{3}{5}$ bensaa ja siitä kuluu ajossa $\frac{3}{8}$. Kuinka iso osa tankin tilavuudesta kului?

---

6. Laske

a) $5 \cdot \frac{2}{3} =$ b) $2 \cdot \frac{7}{5} =$

c) $\frac{1}{2} \cdot 6 =$ d) $10 \cdot \frac{7}{5} =$

e) $\frac{5}{6} \cdot 7 =$ f) $6 \cdot \frac{4}{9} =$

7. Laske

a) $15 \cdot \frac{2}{5} =$ b) $-2 \cdot \frac{-7}{8} =$

c) $\frac{5}{18} \cdot 6 =$ d) $10 \cdot \frac{7}{2} =$

e) $\frac{5}{42} \cdot 7 =$ f) $6 \cdot \frac{4}{24} =$

8. Laske

a) $2 \cdot \frac{2}{3} =$ b) $7 \cdot \frac{7}{49} =$

c) $\frac{1}{5} \cdot 30 =$ d) $1 \cdot \frac{7}{4} =$

9. Merkitse ja laske.

a) 60 litran tynnyristä $\frac{3}{4}$ on vettä. Kuinka paljon vettä on?

b) 45 litran tankki on $\frac{4}{15}$ osa täynnä. Paljonko tankissa on ainetta?

c) Kallen lenkistä $\frac{11}{15}$ osaa on ylämäkeä. Koko matka on 25 km. Kuinka pitkä matka on ylämäkeä?

Tässä välissä muutamia isoja lukuja. Kannattaa ehdottomasti ensin supistaa ja sitten vasta kertoa.

10. Laske.

a) $\frac{15}{8} \cdot \frac{16}{25} \cdot \frac{10}{4} =$

b) $\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{14} \cdot \frac{6}{4} =$

c) $\frac{9}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{22}{27} =$

d) $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{1} =$

11. Laske vihkoon

a) $\frac{25}{6} \cdot \frac{10}{4} \cdot \frac{4}{15} =$ b) $\frac{125}{64} \cdot \frac{10}{4} \cdot \frac{32}{25} =$

c) $\frac{42}{8} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{25}{6} =$ d) $\frac{120}{9} \cdot \frac{27}{5} \cdot \frac{6}{24} =$

12. Laske vihkoon*

a) $\frac{14}{13} \cdot \frac{9}{21} \cdot \frac{69}{27} =$ b) $\frac{12}{6} \cdot \frac{24}{10} \cdot \frac{30}{18} =$

c) $\frac{25}{21} \cdot \frac{140}{10} \cdot \frac{9}{15} =$ d) $\frac{15}{33} \cdot \frac{10}{4} \cdot \frac{22}{25} =$

Muista, että sekaluku pitää muuttaa murtoluvuksi ennen kertomista.

13. Laske

a) $1\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} =$

b) $2\frac{7}{3} \cdot \frac{3}{2} =$

c) $\frac{2}{11} \cdot 2\frac{9}{10} =$

d) $2\frac{2}{4} \cdot 3\frac{3}{10} =$

14. Laske vihkoon

a) $5\frac{5}{7} \cdot 1\frac{4}{10} =$

b) $6\frac{25}{125} \cdot 1\frac{4}{31} =$

c) $5\frac{5}{3} \cdot 1\frac{4}{11} =$

d) $6\frac{2}{5} \cdot 2\frac{6}{32} =$

15. Laske

a) $\frac{3}{7} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) =$

b) $-\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} =$

c) $-\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) =$

d) $\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{15}{9}\right) =$

e) $-\frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{4}{15}\right) =$

f) $-\frac{3}{8} \cdot \frac{16}{9} =$

16. Laske

a) $-1\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{15} =$

b) $2\frac{7}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) =$

c) $-\frac{5}{11} \cdot \left(-2\frac{9}{10}\right) =$

d) $-2\frac{2}{4} \cdot 3\frac{3}{10} =$

17. Laske

a) $-\frac{35}{6} \cdot \frac{-10}{4} \cdot \frac{2}{-15} =$

b) $\frac{150}{64} \cdot \left(-\frac{10}{4}\right) \cdot \frac{16}{25} =$

c) $\frac{-54}{8} \cdot \frac{16}{-45} \cdot \left(-\frac{25}{6}\right) =$

d) $-\frac{120}{3} \cdot \frac{27}{15} \cdot \frac{-6}{30} =$

8. Murtolukujen jakolasku

Murtolukujen jakolasku

11

- Murtoluku jaetaan murtoluvulla siten, että jaettava kerrotaan jakajan käänteisluvulla.

Esimerkki 1.

$$\frac{1}{3}:\frac{2}{5}=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{6}$$

Esimerkki 2.

$$\frac{9}{20}:\frac{6}{25}=\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{4}{\cancel{20}}}\cdot\frac{\overset{5}{\cancel{25}}}{\underset{2}{\cancel{6}}}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$$

Muutamia erikoisesimerkkejä:

Esimerkki 2.

a) $\frac{3}{4}:5=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{4\cdot5}=\frac{3}{20}$

(sinistä välivaihetta ei tarvitse kirjoittaa näkyville)

b) $5:\frac{3}{4}=5\cdot\frac{4}{3}=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}$

c) $1\frac{3}{4}:2\frac{4}{5}=\frac{7}{4}:\frac{14}{5}=\frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{4}\cdot\frac{5}{\underset{2}{\cancel{14}}}=\frac{5}{8}$

Käänteisluku

Edellä puhuttiin käänteisluvusta, mutta ei kerrottu, mikä se on. Tässä selitys vähän jälkikäteen:

Luvun a **käänteisluku** sellainen luku b, jonka kertolasku a:n kanssa tuottaa arvon 1, eli $a \cdot b = 1$.

Käytännössä murtoluvun käänteisluku saadaan vaihtamalla osoittaja ja nimittäjä päikseen, mistä tulee sana ”käänteis”.

esim. Luvun $\frac{3}{4}$ käänteisluku on $\frac{4}{3}$, koska $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{12}{12}=1$

Kokonaisluvun a käänteisluku on $\frac{1}{a}$

esim. Luvun 4 käänteisluku on $\frac{1}{4}$, koska $4\cdot\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1$

Esimerkki 4.

Luvun 2 käänteisluku on $\frac{1}{2}$

Luvun $\frac{3}{7}$ käänteisluku on $\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$

Luvun $2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$ käänteisluku on $\frac{4}{11}$

Luvun –4 käänteisluku on $-\frac{1}{4}$

Luvun $\frac{9}{5}$ käänteisluku on $\frac{5}{9}$

Tehtäviä

1. Merkitse luvun

   a) 3 käänteisluku b) $\frac{3}{4}$ käänteisluku

   c) $\frac{1}{7}$ käänteisluku d) $\frac{3}{5}$ käänteisluku

   e) $-\frac{5}{6}$ käänteisluku f) $2\frac{4}{5}$ käänteisluku

2. Laske (merkitse aina välivaihe, jossa jakolasku on muutettu kertolaskuksi)

   a) $\frac{1}{4}:\frac{1}{3}=$

   b) $\frac{3}{4}:\frac{7}{5}=$

   c) $\frac{1}{3}:\frac{1}{3}=$

   d) $\frac{3}{5}:\frac{7}{5}=$

   e) $\frac{5}{6}:\frac{2}{3}=$

   f) $\frac{4}{15}:\frac{4}{9}=$

3. Laske vihkoon (merkitse aina myös lasku ja välivaiheet)

   a) $\frac{3}{7}:\frac{1}{3}=$ b) $\frac{3}{8}:\frac{6}{5}=$

   c) $\frac{1}{3}:\frac{4}{5}=$ d) $\frac{7}{5}:\frac{7}{5}=$

   e) $\frac{4}{3}:\frac{12}{9}=$ f) $\frac{4}{15}:\frac{4}{9}=$

4. Laske vihkoon

   a) $\frac{2}{15}:\frac{1}{3}=$ b) $\frac{3}{8}:\frac{5}{8}=$

   c) $-\frac{1}{3}:\left(-\frac{3}{5}\right)=$ d) $\frac{8}{5}:\frac{7}{10}=$

   e) $\frac{16}{9}:\frac{20}{3}=$ f) $-\frac{4}{5}:\frac{7}{9}=$

5. Merkitse lasku ja laske.

   a) Kuinka monta $\frac{1}{3}$ litran pullollista limsaa mahtuu $\frac{3}{2}$ litran astiaan?

   b) Kuinka monta kertaa pitää juosta $\frac{1}{8}$ km lenkki, jotta matkaa tulisi $\frac{3}{4}$ km?

---

6. Laske

   a) $\frac{3}{4}:5=$

   b) $\frac{5}{6}:3=$

   c) $\frac{12}{13}:4=$

   d) $\frac{6}{7}:(-3)=$

   e) $\frac{5}{8}:4=$

   f) $\frac{15}{4}:5=$

7. Laske

a) $5 : \frac{1}{3} =$

b) $2 : \frac{1}{4} =$

c) $-3 : \frac{7}{10} =$

d) $5 : \left(-\frac{1}{6}\right) =$

e) $12 : \frac{3}{4} =$

f) $2 : \frac{1}{-5} =$

Seuraavissa laskuissa kannattaa ehdottomasti supistaa jo kertolaskuvaiheessa.

8. Laske

a) $\frac{5}{4} : \frac{25}{16} =$

b) $\frac{2}{9} : \frac{10}{3} =$

c $\frac{8}{5} : \frac{16}{15} =$

d) $\frac{111}{67} : \frac{111}{67} =$

e) $\frac{25}{6} : \frac{15}{4} =$

f) $\frac{125}{64} : \frac{25}{32} =$

9. Laske vihkoon

a) $\frac{32}{7} : \frac{16}{21} =$ b) $\frac{250}{81} : \frac{125}{36} =$

c $\frac{18}{5} : \frac{27}{15} =$ d) $\frac{56}{6} : \frac{49}{30} =$

e) $\frac{66}{6} : \frac{11}{13} =$ f) $\frac{15}{7} : \frac{300}{10} =$

---

10. Laske

a) $\frac{2}{3} : 5 =$

b) $\frac{7}{5} : (-2) =$

c) $\frac{1}{2} : 6 =$

d) $2 : \frac{4}{5} =$

e) $-5 : \frac{5}{-6} =$

f) $6 : \frac{3}{5} =$

11. Laske vihkoon

a) $1\frac{2}{3} : \frac{2}{3} =$ b) $3\frac{3}{5} : 2 =$

c) $\frac{1}{2} : 2\frac{2}{3} =$ d) $1\frac{3}{5} : 1\frac{1}{3} =$

e) $\frac{5}{6} : 3\frac{1}{3} =$ f) $\frac{4}{9} : 5\frac{3}{5} =$

12. Merkitse lasku ja laske.

a) Puolikas pitsa jaetaan tasan kolmen kaverin kesken. Kuinka paljon kukin saa?

b) Kuinka monta kertaa pitää juosta $\frac{3}{4}$ km lenkki, jotta matkaa tulisi 6 km?

c) Kauhan tilavuus on $\frac{2}{5}$ litraa. Montako kertaa sillä pitää heittää löylyä, jotta 4 litran löylyastia tulee tyhjennettyä?

13. Laske

a) $-\frac{2}{3}:\left(-\frac{2}{4}\right)=$

b) $-\frac{7}{3}:\frac{3}{2}=$

c) $\frac{2}{5}:\left(-\frac{9}{10}\right)=$

d) $-2\frac{1}{4}:\frac{3}{10}=$

e) $-5\frac{1}{4}:\left(-\frac{3}{8}\right)=$

f) $-2:1\frac{1}{2}=$

14. Laske vihkoon käyttäen murtolukujen jakolaskua

a) Kuinka monta $\frac{1}{3}$ litran pullollista vettä tarvitaan, jotta voi täyttää 5 litran vesikanisterin?

b) Kymmenen litraa mehua säilötään $\frac{3}{4}$ litran pulloihin. Kuinka monta pulloa tarvitaan?

c) $1\frac{1}{2}$ litran limonadipullo jaetaan tasan kuudelle hengelle. Kuinka paljon kukin saa?

15. Laske vihkoon käyttäen murtolukujen jakolaskua ja kertolaskua

a) Kolme $1\frac{1}{2}$ litran limpparipulloa tyhjennetään $\frac{1}{2}$ litran pulloihin. Kuinka monta $\frac{1}{2}$ litran pulloa tarvitaan?

b) Kalle ostaa kuusi $\frac{1}{3}$ litran mehupulloa. Mehut jaetaan tasan neljän kaveruksen kesken. Kuinka paljon kukin saa?

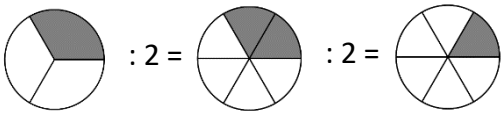
Miksi murtoluvun jakolasku toimii kuten toimii? Selitystä sitä kaipaaville.

Tämä aukeama on heille, jotka haluavat tietää miksi murtolukujen jakolasku tehdään jakajan käänteisluvulla kertomalla.

Vaihe 1. Murtoluvun jakaminen kokonaisluvulla:

Pohditaan, miten voitaisiin laskea jakolasku $\frac{1}{3}:2$. Murtoluku $\frac{1}{3}$ ei luontaisesti jakaudu kahteen osaan. Jotta voimme sen jakaa, meidän pitää laventaa se siten, että se voidaan jakaa. Näin laskien saamme

$^{2)}\frac{1}{3}:2=\frac{2}{6}:2=\frac{2:2}{6}=\frac{1}{6}$, mikä näyttää piirakkakuviona tältä



Sama menetelmä toimii muillakin luvuilla

$^{5)}\frac{3}{4}:5=\frac{15}{20}:5=\frac{15:5}{20}=\frac{3}{20}$

Lukujen 3, 4 ja 5 tilalle voidaan vaihtaa mitkä vain kokonaisluvut (toki nimittäjänä eikä jakajana saa olla nollaa, koska nollalla ei saa jakaa) ja lopputuloksena tulee aina olemaan samanlainen tulos, jossa kokonaisluku on kertonut murtoluvun nimittäjän. Koska tämä toimii aina, voidaan ottaa käyttöön seuraava laskusääntö:

> Murtoluku jaetaan kokonaisluvulla kertomalla kokonaisluvulla murtoluvun nimittäjä.
> $\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b\cdot c}$
> missä a, b ja c saavat olla mitä tahansa kokonaislukuja, kun b ≠ 0 ja c ≠ 0.

Tätä voidaan nyt soveltaa käytännössä

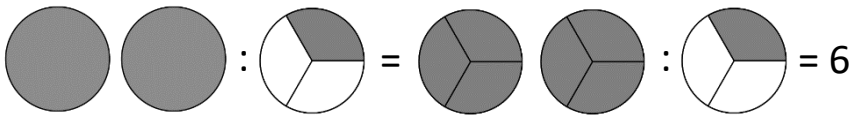
Esimerkki 1.

a) $\frac{1}{5}:3=\frac{1}{5\cdot 3}=\frac{1}{15}$

b) $\frac{2}{7}:5=\frac{2}{7\cdot 5}=\frac{2}{35}$

Vaihe 2. Kokonaisluvun jakaminen helpoilla murtoluvuilla muotoa $\frac{1}{n}$:

Jakolaskua voidaan ajatella monella tavalla. Ajatellaan sitä seuraavaksi sisältöjaon kannalta. Tällöin esimerkiksi jakolaskua $15:3$ ajatellaan ”Kuinka monta kertaa luku 3 mahtuu lukuun 15?” ja vastaus on 5 kertaa. Sama toimii murtoluvuillakin. Tutkitaan siksi ensin laskua $2:\frac{1}{3}$. Piirakkakuvioiden avulla saadaan



Laskutoimituksena sama voidaan ajatella vaikka näin

$2:\frac{1}{3}=\frac{6}{3}:\frac{1}{3}=6,$ muista, että $\frac{6}{3}=6\cdot\frac{1}{3}$ eli $\frac{1}{3}$ mahtuu 6 kertaa murtolukuun $\frac{6}{3}$.

Kuten edellisessäkin tilanteessa, tämäkin menetelmä toimii aina, kun jaettava on kokonaisluku ja jakaja muotoa $\frac{1}{n}$, missä n:n paikalla on joku kokonaisluku (ei nolla). Tällaisen laskun lopputulos saadaan siis aina kertomalla kokonaisluku murtolukujakajan nimittäjällä ja saadaan laskusääntö:

Kokonaisluku saadaan jaettua murtoluvulla muotoa $\frac{1}{n}$ kertomalla kokonaisluku murtoluvun nimittäjällä n.

$a:\frac{1}{n} = a \cdot n$

missä a ja n voivat olla mitä tahansa kokonaislukuja, kun n ≠ 0.

Tätäkin voidaan nyt soveltaa käytännössä

Esimerkki 2.

$4:\frac{1}{7} = 4 \cdot 7 = 28$

Vaihe 3. Murtoluvun jakaminen helpoilla murtoluvuilla muotoa $\frac{1}{n}$:

Murtoluku $\frac{a}{b}$ voidaan aina jakaa kertolaskuksi $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$ ja tätä tietoa hyväksikäyttäen voimme jakaa myös murtolukuja helpoilla murtoluvuilla tyyliin $\frac{1}{n}$.

$\frac{2}{3}:\frac{1}{5} = \frac{1}{3} \cdot 2:\frac{1}{5} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 5 = \frac{1}{3} \cdot 10 = \frac{10}{3}$

Tämäkin toimii taas kaikille kokonaisluvuilla (kunhan nollalla ei jaeta) ja saadaan taas uusi laskusääntö:

Murtoluku voidaan jakaa murtoluvulla muotoa $\frac{1}{n}$ seuraavasti:

$\frac{a}{b}:\frac{1}{n} = \frac{a \cdot n}{b}$

missä a, b ja n voivat olla mitä tahansa kokonaislukuja, kun b ≠ 0 ja n ≠ 0.

Tätä tietoa voimme hyväksikäyttää siinä, kun päättelemme jakolaskumenetelmän mille tahansa murtoluvuille.

Vaihe 4. Murtoluvun jakaminen murtoluvulla:

Tarkastellaan seuraavaksi murtolukujen jakolaskua $\frac{2}{3}:\frac{5}{7}$. Lukujen 2, 3, 5 ja 7 tilalla voisi olla mitkä vain kokonaisluvut (paitsi nolla muiden kuin kakkosen paikalla).

$\frac{2}{3}:\frac{5}{7} = \frac{2}{3}:5:\frac{1}{7} = \frac{2}{3 \cdot 5}:\frac{1}{7} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5}$

Huomasitko lopputempun. Laskua ei laskettu loppuun asti vaan jätettiin kertolaskut laskematta. Kun emme laskeneet laskua loppuun, vaan jätämme sen tuolla tavoin kesken, huomaamme tärkeän asian. Jakolasku muuttuikin kertolaskuksi, mutta jakajana oleva murtoluku kääntyi ”ylösalaisin”, siitä tuli käänteisluku (katso seuraava sivu). Tästä saamme vihdoin murtolukujen laskusäännön:

Murtoluvulla jaetaan kertomalla sen käänteisluvulla:

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ tai $a:\frac{c}{d} = a \cdot \frac{d}{c}$

missä a, b, c ja d voivat olla mitä vain kokonaislukuja, kun b ≠ 0, c ≠ 0 ja d ≠ 0.

Esimerkki 3.

a) $\frac{3}{5}:\frac{4}{11} = \frac{3}{5} \cdot \frac{11}{4} = \frac{33}{20} = 1\frac{13}{20}$

b) $5:\frac{2}{3} = 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$

9. Murtolukulaskuja, laskujärjestys

Muistin virkistykseksi laskujärjestys. Sitä noudatetaan myös murtolukujen laskuissa.

Laskujärjestys:
1. Sulkeet
2. Potenssit (potensseja ei tosin tällä kertaa laskuissa ole)
3. Kerto ja jakolaskut
4. Yhteen ja vähennyslaskut

Tehtäviä

Tässä on myös vain otos tehtävistä, mitä pitäisi osata. Tunnilla jaan tähänkin lisätehtäviä.

Jos tila ei riitä, laske ruutuvihkoon.

1. Laske
   a) $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=$
   b) $\frac{1}{4}-\frac{2}{4}=$
   c) $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}=$
   d) $\frac{1}{4}:\frac{2}{4}=$

2. Laske
   a) $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}:\frac{1}{3}=$
   b) $\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\right):\frac{1}{3}=$
   c) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=$
   d) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)=$

3. Laske
   a) $\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{4}\right)=$
   b) $\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\right):3=$
   c) $\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{4}\right):3=$
   d) $\frac{5}{2}:\left(\frac{7}{4}-\frac{1}{2}\right)=$

4. Laske
   a) $2+\left(-\frac{2}{5}\right)=$
   b) $-\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{4}\right)+\frac{1}{3}=$
   c) $-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=$
   d) $\frac{1}{2}:\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)=$

5. Laske vihkoon*
   a) $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{4}\right)=$
   b) $\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{6}-\frac{1}{5}:\frac{3}{10}=$
   c) $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right):\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=$
   d) $\frac{3}{5}:\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{10}=$

6. Laske vihkoon*
   a) $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{4}\right)=$
   b) $\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\right):\frac{3}{10}=$
   c) $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\right):\left(\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\right)=$
   d) $\frac{3}{5}:\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\right)\cdot\frac{3}{10}=$

7. Laske vihkoon. Muodosta murtolukulauseke ja laske.
   a) Kallella on $\frac{1}{2}$ pitsa ja Villellä $\frac{1}{4}$ pitsa. Kuinka paljon heillä on pitsaa yhteensä?
   b) Kallella on $1\frac{1}{3}$ pitsa ja Villellä $2\frac{1}{4}$ pitsa. Kuinka paljon heillä on pitsaa yhteensä?
   c) Kallella on $\frac{1}{2}$ pitsa ja Villellä $\frac{1}{4}$ pitsa. Kuinka paljon enemmän Kallella on pitsaa?
   d) Kallella on $2\frac{1}{4}$ pitsa ja Villellä $1\frac{1}{3}$ pitsa. Kuinka paljon enemmän Kallella on pitsaa?

8. Laske vihkoon. Muodosta yksi murtolukulauseke ja laske.
   a) Kalle ja Ville ostivat molemmat pitsan. Kallelle jäi $\frac{1}{3}$ ja Villelle $\frac{2}{5}$ pitsaa. Kuinka paljon pojat söivät yhteensä?
   b) Kalle ja Ville ostivat molemmat 2 pitsaa. Kallelle jäi $1\frac{2}{3}$ ja Villelle $\frac{4}{5}$ pitsaa. Kuinka paljon pojat söivät yhteensä?

9. Laske vihkoon. Muodosta yksi murtolukulauseke ja laske.
   a) Lattialla on kolme koria, joissa jokaisessa on $\frac{1}{3}$ litraa mehua ja $\frac{1}{2}$ vettä. Kuinka paljon juotavaa on kaikissa koreissa yhteensä?
   b) Lattialla on kolme koria, joissa jokaisessa on $1\frac{1}{3}$ litraa mehua ja $2\frac{1}{3}$ vettä. Kuinka paljon juotavaa on kaikissa koreissa yhteensä?

10. Laske vihkoon. Muodosta murtolukulauseke ja laske.
    a) Kuinka monta $\frac{1}{2}$ litran mitallista vettä menee 3 litran kattilaan?
    b) Kuinka monta $1\frac{1}{3}$ litran mitallista vettä menee 7 litran kattilaan?

11. Laske vihkoon. Muodosta yksi murtolukulauseke ja laske.
    a) Kallen repussa on $\frac{1}{4}$ litran ja $\frac{1}{2}$ litran vesipullot. Kuinka paljon Kalle pystyy kuljettamaan vettä 7 vedenhakumatkalla?
    b) Kallen repussa on $1\frac{1}{2}$ litran ja $\frac{1}{3}$ litran pullot. Kuinka monta kertaa Kalle joutuu vettä hakemaan, jotta $10\frac{1}{2}$ litran astia on täynnä?

10. Prosentti

Prosentti tarkoittaa sadasosaa.

$$1\ \% = \frac{1}{100}$$

Usein kiinnostaa desimaalimuoto, eli:

$$1\ \% = 0{,}01$$

Nämä ovat totta molempiin suuntiin eli

$$\frac{1}{100} = 1\ \% \quad \text{ja} \quad 0{,}01 = 1\ \%$$

Sana *prosentti* tulee latinankielisestä ilmaisusta *per centum* (sataa kohden) tai *pro centum* (sadasta tai sadan puolesta).

Olennaisia murtolukuja prosentteina

Yleissivistykseen ja normaaliin elämään kuuluu tietää, että tietyt murtoluvut vastaavat tiettyjä prosenttilukuja laskemattakin.

$1 = 100\ \%$ $\qquad$ $0 = 0\ \%$

$\frac{1}{2} = 50\ \%$

$\frac{1}{3} = 33{,}3333\ldots\ \% \approx 33{,}3\ \%$ $\qquad$ $\frac{2}{3} = 66{,}6666\ldots\ \% \approx 66{,}7\ \%$

$\frac{1}{4} = 25\ \%$ $\qquad$ $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 50\ \%$ $\qquad$ $\frac{3}{4} = 75\ \%$

$\frac{1}{5} = 20\ \%$ $\qquad$ $\frac{2}{5} = 40\ \%$ $\qquad$ $\frac{3}{5} = 60\ \%$ $\qquad$ $\frac{4}{5} = 80\ \%$

$\frac{1}{6} = 16{,}6666\ldots\ \% \approx 16{,}7\ \%$

$\frac{1}{10} = 10\ \%$ $\qquad$ $\frac{2}{10} = 20\ \%$ $\qquad$ $\frac{3}{10} = 30\ \%$ $\qquad$ jne…

Edellä olevat ovat siis matemaattista yleissivistystä. Ne voi aina laskea, mutta osa opettelee ne ulkoa. Kuitenkin paras tapa muistaa ne on niiden käyttäminen ja tarvittaessa laskeminen silloin kuin ei muista.

Desimaali- ja prosenttiluvut

Desimaaliluku muutetaan prosenttiluvuksi sadalla kertomalla (ja lisäämällä perään %-merkki). Käytännössä desimaalipilkku siirtyy kaksi numeroa oikealle. Vastaavasti prosenttiluku muutetaan desimaaliluvuksi jakamalla luku sadalla (ja poistamalla %-merkki), jolloin desimaalipilkku siirtyy kaksi numero vasemmalle. Tätä satasella kertomista/jakamista ei yleensä merkitä näkyville vaan muunnos tehdään suoraan.

Esimerkki 1.

Muunnetaan oheiset prosenttiluvut desimaaliluvuiksi:

a) $20\ \% = 0{,}2$ b) $3\ \% = 0{,}03$ c) $2{,}5\ \% = 0{,}025$ d) $146\ \% = 1{,}46$

Muunnetaan oheiset desimaaliluvut prosenttiluvuiksi:

e) $0{,}4 = 40\ \%$ f) $0{,}04 = 4\ \%$ g) $0{,}0005 = 0{,}05\ \%$ h) $2 = 200\ \%$

Murto- ja prosenttiluvut

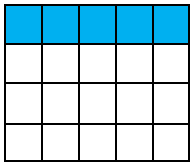
Murtoluku voidaan muuttaa prosenttiluvuksi joko laventamalla se sadasosiin tai laskemalla se jakolaskuna desimaaliluvuksi ja muuttamalla se prosenttiluvuksi.

Kuinka monta prosenttia?

Tyypillisesti ensimmäinen prosentteihin liittyvä kysymys on ”kuinka monta prosenttia…?”. Loppupeleissä melkein aina tällaisissa tilanteissa laskemme jakolaskun tai meillä on murtoluku.

Esimerkki 1.

Kuinka monta prosenttia kuviosta on väritetty?



Väritettyjä ruutuja on 5, ruutuja yhteensä on 20, joten

Tapa 1.

$\frac{5}{20} = \frac{25}{100} = 25\ \%$

Tapa 2.

$\frac{5}{20} = 0{,}25 = 25\ \%$

Molemmat tavat toimivat.

Montako prosenttia joku on jostain?

Toinen tyypillinen prosenttilasku on selvittää lukumäärä, kun prosenttimäärä tiedetään.

Esimerkki 2.

Laatikossa on 40 palloa. Palloista 20 % on punaisia. Montako punaista palloa laatikossa on?

Tapa 1.

$20\ \% = \frac{20}{100}$

$\frac{20}{100} \cdot 40 = 8$

Tapa 2.

$20\ \% = 0{,}2$

$0{,}2 \cdot 40 = 8$

Näistäkin molemmat ovat toimivia, tapojen paremmuus riippuu usein, millainen lasku on kyseessä.

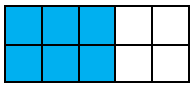
Tehtäviä

1. Merkitse väritetyn alueen määrä murtolukuna ja prosentteina.

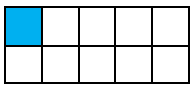
a)



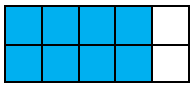
b)



c)

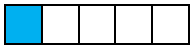


d)



2. Merkitse väritetyn alueen määrä murtolukuna ja prosentteina.

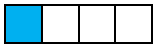
a)



b)



c)



d)



3. Merkitse väritetyn alueen määrä murtolukuna ja prosentteina.

a)



b)



c)

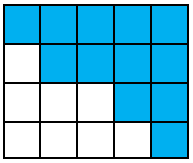


d)

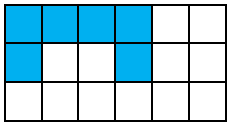


4. Merkitse väritetyn alueen määrä murtolukuna ja prosentteina (supistaminen voi auttaa).

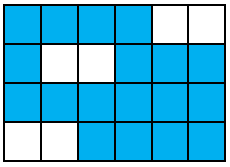
a)



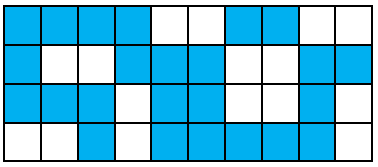
b)



c)

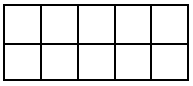


d)

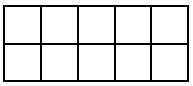


5. Väritä ruudukosta annettu määrä ruutuja.

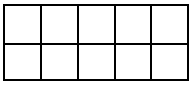
a) 10 %



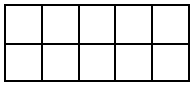
b) 40 %



c) 70 %

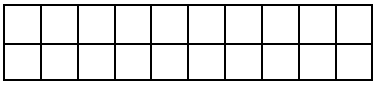


d) 20 %

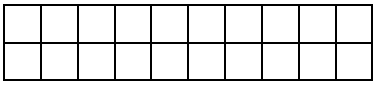


6. Väritä ruudukosta annettu määrä ruutuja.

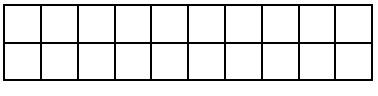
a) 25 %



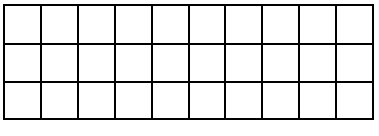
b) 40 %



c) 65 %



d) ≈ 66,7 %



7. Muunna prosenteiksi

a) $\frac{1}{2} =$ b) $\frac{1}{5} =$

c) $\frac{2}{5} =$ d) $\frac{1}{4} =$

8. Muunna prosenteiksi

a) $\frac{3}{4} =$ b) $\frac{1}{3} =$

c) $\frac{2}{10} =$ d) $\frac{7}{10} =$

9. Muunna prosenteiksi

a) 0,3 = b) 0,1 =

c) 0,25 = d) 0,04 =

10. Muunna prosenttiluku murtoluvuksi

a) 40 % =

b) 25 % =

c) 70 % =

d) 15 % =

11. Muunna prosenttiluku murtoluvuksi

a) 5 % =

b) 35 % =

c) 90 % =

d) 17 % =

12. Kaupassa on 100 € housut ja niistä saa 30 % alennusta.
a) Montako euroa alennus on?

b) Paljonko on alennettu hinta?

c) Montako prosenttia alennettu hinta on alkuperäisestä hinnasta?

13. Kaupassa on 300 € Virveli ja siitä saa 10 % alennusta.
a) Montako euroa alennus on?

b) Paljonko on alennettu hinta?

c) Montako prosenttia alennettu hinta on alkuperäisestä hinnasta?

14. Luokalla on 20 oppilasta. Heistä 7:llä on lemmikki. Kuinka monella prosentilla luokan oppilaista on lemmikki?

15. Millan kavereista joka kolmas osaa tehdä voltin.
a) Kuinka monta prosenttia Millan kavereista osaa tehdä voltin?

b) Milla kaikki 12 kaveria ovat Millalla kylässä. Kuinka moni paikalla olevista osaa tehdä voltin, kun Millakin osaa?

11. Kertaustehtäviä

1. Onko luku jaollinen luvulla 2?
   a) 15 b) 22
   c) 378 d) 12345

2. Onko luku jaollinen luvulla 3?
   a) 15 b) 22
   c) 378 d) 12345

3. Luettele kaikki tekijät luvulle
   a) 15 b) 36
   c) 49 d) 100

4. Mitkä seuraavista ovat alkulukuja
   a) 5 b) 15
   c) 17 d) 27

5. Tee alkutekijöihin jako (vihkoon)
   a) 12 b) 40
   c) 60 d) 100

6. Määritä
   a) syt(20, 25) b) syt(18, 42)
   c) pyj(12, 18) d) pyj(9, 16)

7. Muuta murtoluvuiksi
   a) $4\frac{2}{3} =$ b) $2\frac{5}{8} =$
   c) $1{,}4 =$ d) $0{,}6 =$

8. Muuta sekaluvuiksi
   a) $\frac{14}{3} =$ b) $\frac{23}{8} =$
   c) $1{,}4 =$ d) $4{,}6 =$

9. Muuta desimaaliluvuiksi (tarvittaessa laske jakokulmassa). Jos tulee päättymätön desimaaliluku, pyöristä neljään desimaaliin.
   a) $1\frac{4}{10} =$ b) $\frac{23}{5} =$
   c) $\frac{3}{4} =$ d) $\frac{4}{9} =$

10. Laske
    a) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} =$ b) $\frac{3}{5} + \frac{6}{5} =$
    c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} =$
    d) $\frac{4}{5} + \frac{5}{6} =$

11. Laske
    a) $3\frac{3}{4} + 2\frac{2}{4} =$
    b) $5\frac{1}{4} + 3\frac{3}{5} =$

12. Laske
    a) $\frac{4}{5} - \frac{2}{5} =$
    b) $\frac{3}{5} - \frac{6}{5} =$
    c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} =$

13. Laske (muuta tarvittaessa murtoluvuiksi)*
    a) $3\frac{3}{4} - 2\frac{2}{4} =$
    b) $5\frac{2}{4} - \frac{4}{5} =$
    c) $3\frac{2}{3} - 1\frac{5}{7} =$

14. Laske

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} =$

b) $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{10} =$

c) $\frac{80}{9} \cdot \frac{27}{20} =$

d) $1\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} =$

e) $\frac{25}{6} \cdot \frac{10}{4} \cdot \frac{4}{15} =$

f) $\frac{125}{64} \cdot \frac{32}{25} =$

15. Laske

a) $\frac{1}{4} : \frac{1}{2} =$

b) $\frac{3}{4} : \frac{9}{8} =$

c) $\frac{5}{6} : 2 =$

d) $\frac{3}{5} : 3 =$

e) $2 : \frac{3}{5} =$

f) $1\frac{3}{10} : \frac{13}{5} =$

16. Laske

a) $\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) =$

b) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} : 3 =$

c) $\frac{3}{4} - 1\frac{1}{4} : 3 =$

d) $\frac{5}{2} : \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right) =$

17. Muodosta tehtävästä <u>yksi lauseke</u> ja laske.

a) Ville jakaa karkkipäivän karkeistaan yhden kolmasosan kaverilleen. Kuinka suuri osa Villelle itselleen jää?

b) Juuso ostaa $1\frac{1}{2}$ litran limsapullon ja Osku $\frac{1}{3}$ litran pullon. Paljonko heillä on juomaa yhteensä?

c) Juuso ostaa kaksi $1\frac{1}{2}$ litran limsapulloa ja Osku neljä $\frac{1}{3}$ litran pulloa. Paljonko heillä on juomaa yhteensä?

d) Kalle täyttää $2\frac{1}{2}$ litran ämpäriä $\frac{1}{5}$ litran jogurttipurkilla. Kuinka monta purkillista tarvitaan, että ämpäri tulee täyteen?

18. Merkitse väritetyn alueen määrä murtolukuna ja prosentteina.

a)



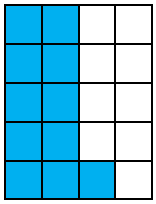
b)



c)

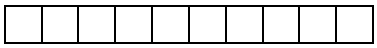


d)

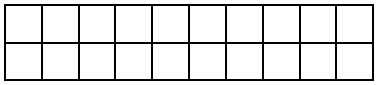


19. Väritä ruudukosta annettu määrä ruutuja.

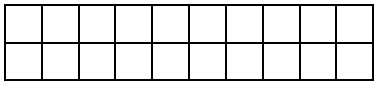
a) 40 %



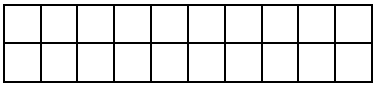
b) 30 %



c) 80 %



d) 100 %



20. Muunna prosenteiksi

a) $\frac{1}{5} =$

b) $\frac{2}{3} =$

c) $\frac{15}{20} =$

d) $\frac{7}{50} =$

21. Muunna prosenttiluku murtoluvuksi

a) 10 % =

b) 35 % =

c) 18 % =

d) 25 % =

22. Kalle ostaa mopon, jonka hinta on 2000 €. Hän tinkii 15 % alennusta.

a) Kuinka monta euroa Kalle saa moposta alennusta?

b) Kuinka monta euroa mopon alennettu hinta on?

23. Minttu ostaa 800 € tietokoneen. Minttu saa tietokoneesta 100 € alennuksen. Kuinka monta prosenttia alennus on?

12. Vastauksia:

Kappale 1.

1. a) kyllä b) ei c) kyllä d) ei
2. a) ei b) kyllä c) kyllä d) ei
3. a) kyllä b) kyllä c) kyllä d) ei
4. a) ei b) kyllä c) ei d) kyllä
5. a) ei b) kyllä c) ei d) kyllä
6. a) kyllä b) ei c) kyllä d) ei
7. a) kyllä b) ei c) kyllä d) ei
8. a) ei b) kyllä c) kyllä d) ei
9. a) kyllä b) ei c) ei d) kyllä
10. a) ei b) ei c) kyllä d) ei
11. 1, 2, 3, 4, 6 ja 12
12. 1 ja 13
13. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 ja 60
14. 1, 2, 4, 13, 26 ja 52
15. 105
16. 1, 5, 73 ja 365

Kappale 2.

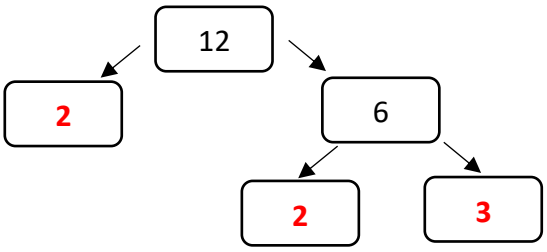
1. a) kyllä b) ei c) kyllä d) ei
   e) ei f) kyllä g) kyllä h) ei
2. a)

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

   b) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 ja 47.
3. a) 1, 2, 4, 5, 10 ja 20 b) 2 ja 5

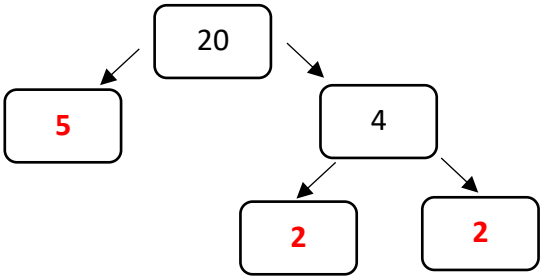
Seuraavissa vastauksissa on molemmat alkutekijöihin jakojen esitysmuodot, vastaukseen riittää joko kertolasku, missä voi olla sama alkuluku useammin tai potenssin avulla kerrottu muoto.

4. $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$



   Alimmat 2 ja 3 voivat olla myös toisin päin.

5. $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$



6. $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
7. $200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5^2$
8. $63 = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 3^2 \cdot 7$
9. $420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
10. $990 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$
11. a) 30 b) 126
12. Löytyy vain yksi
13. a) $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$ $70 = 3 \cdot 5 \cdot 5$
    b) 25
    c) Jakolaskun tulos on jäljelle jäänyt alkuluku
    d) $\frac{1}{50}$ kannattaa laventaa 3:lla ja $\frac{1}{75}$ kannattaa laventaa 2:lla eli ”ristiin” niillä luvuilla, jotka eivät olleet yhteisiä alkutekijöitä.

Kappale 3.

1. a) 1, 3 ja 9 b) 1, 3, 5 ja 15
   c) 3 d) $\frac{3}{5}$
2. a) 6 b) $\frac{2}{3}$
3. a) 3 b) $\frac{5}{9}$
4. a) 11 b) $\frac{3}{5}$

5. a) 8 b) $\frac{2}{7}$

6. a) 1 b) $\frac{31}{40}$ ei voi supistaa

7. a) 7 b) $\frac{3}{8}$

8. 39 pelaajaa

9. a) 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28
   b) 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42
   c) 12 d) $\frac{3}{12}$ *ja* $\frac{2}{12}$

10. a) 60 b) $\frac{5}{60}$ *ja* $\frac{4}{60}$

11. a) 15 b) $\frac{5}{15}$ *ja* $\frac{3}{15}$

12. a) 12 b) 24 c) 18 d) 36

13. a) 60 b) 60 c) 400 d) 36

14. a) 96 b) 130 c) 189 d) 504

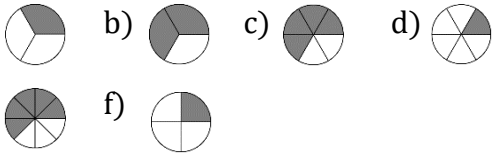
15. a) 60 b) 120 c) 210 d) 400

16. 60 muffinia

Kappale 4.

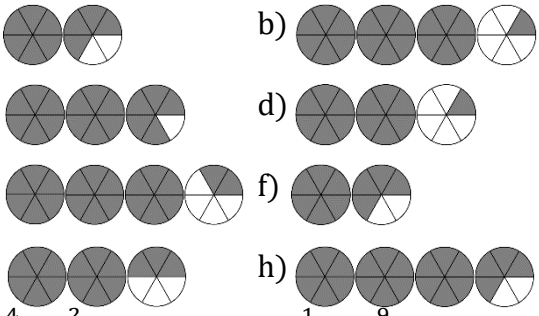
1. a) $\frac{2}{6}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{3}{9}$
   e) $\frac{3}{12}$ f) $\frac{3}{11}$

2. a) b) c) d)
   e) f)



3. a) $\frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$ b) $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$
   c) $\frac{27}{7} = 3\frac{6}{7}$

4. a) b)
   c) d)
   e) f)
   g) h)



5. a) $\frac{4}{6}$ ja $\frac{2}{6}$ b) $\frac{1}{12}$ ja $\frac{9}{12}$
   c) $\frac{6}{9}$ ja $\frac{2}{9}$ d) $\frac{7}{21}$ ja $\frac{3}{21}$
   e) $\frac{5}{18}$ ja $\frac{6}{18}$ f) $\frac{4}{15}$ ja $\frac{6}{15}$

6. a) $\frac{9}{12}$ ja $\frac{10}{12}$ b) $\frac{4}{36}$ ja $\frac{6}{36}$
   c) $\frac{8}{12}$ ja $\frac{6}{12}$ d) $\frac{5}{15}$ ja $\frac{6}{15}$
   e) $\frac{3}{12}$ ja $\frac{4}{12}$ f) $\frac{4}{60}$ ja $\frac{5}{60}$

7. a) $1\frac{4}{6}$ ja $\frac{2}{6}$ b) $1\frac{4}{12}$ ja $\frac{2}{12}$
   c) $\frac{10}{15}$ ja $4\frac{2}{15}$ d) $2\frac{14}{21}$ ja $1\frac{8}{21}$

8. a) $\frac{7}{300}$ ja $\frac{65}{300}$ b) $\frac{9}{486}$ ja $\frac{9}{486}$
   c) $\frac{6}{105}$ ja $\frac{7}{105}$ d) $\frac{7}{210}$ ja $\frac{5}{15}$

9. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{5}$
   e) $\frac{1}{6}$ f) $\frac{1}{3}$

10. a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{5}$
    e) $\frac{5}{6}$ f) $\frac{4}{3}$

11. a) $2\frac{1}{3}$ b) $8\frac{1}{4}$ c) $1\frac{3}{5}$ d) $3\frac{3}{5}$
    e) $\frac{25}{6}$ f) $6\frac{2}{15}$ eli ei supistu enempää

12. a) $\frac{4}{8}$ ja $\frac{3}{8}$ b) $\frac{9}{15}$ ja $\frac{10}{15}$
    c) $\frac{8}{16}$ ja $\frac{10}{16}$ d) $\frac{9}{12}$ ja $\frac{10}{12}$

13. a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{3}{15}$ c) $\frac{-2}{4}$ d) $\frac{2}{3}$
    e) $\frac{1}{6}$ f) $\frac{1}{12}$

14. $\frac{14}{12} > \frac{5}{6} > \frac{3}{4} > \frac{21}{30} > \frac{2}{3} > \frac{8}{20}$

15. $\frac{28}{15} > 1\frac{3}{4} > 1\frac{2}{3} > 1\frac{7}{12} > 1\frac{2}{5} > 1\frac{8}{30}$

16. Ville eniten, Maija vähiten.

17. Anu eniten, Liisa vähiten.

Kappale 5.

1. a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{11}{6}$ c) $-\frac{9}{7}$ d) $\frac{21}{15}$
   e) $\frac{12}{5}$ f) $-\frac{23}{10}$

2. a) $\frac{10}{8}$ b) $-\frac{12}{7}$ c) $\frac{16}{7}$ d) $-\frac{32}{15}$
   e) $\frac{47}{15}$ f) $\frac{213}{100}$

3. a) $-\frac{14}{3}$ b) $\frac{35}{6}$ c) $\frac{47}{9}$ d) $\frac{46}{20}$
   e) $-\frac{102}{25}$ f) $\frac{123}{60}$

4. a) $1\frac{2}{3}$ b) $1\frac{1}{3}$ c) $-2\frac{1}{4}$ d) $2\frac{2}{5}$
   e) $1\frac{7}{8}$ f) $-2\frac{1}{6}$

5. a) $-5\frac{1}{6}$ b) $2\frac{3}{6}$ c) 2 d) $-6\frac{10}{15}$
   e) $-2\frac{1}{12}$ f) $4\frac{1}{3}$

6. a) $5\frac{5}{6}$ b) $-7\frac{3}{6}$ c) $-7\frac{3}{12}$ d) 20
   e) $-23\frac{8}{12}$ f) $37\frac{2}{3}$

7. a) 0,2 b) –0,3 c) 0,82 d) 0,06
   e) –2,5 f) 0,013

8. a) 0,4 b) 0,6 c) 0,25 d) –0,2
   e) 1,5 f) 0,75

9. a) 0,05 b) –0,04 c) 1,4 d) 0,24
   e) 0,3 f) –0,06

10. a) 0,125 b) –0,5 c) 0,33333 d) 0,4
    e) –0,83333 f) 0,86667

11. a) –0,33333 b) 0,42857
    c) –0,66667 d) 0,66667

12. a) 2,2 b) 1,3 c) 3,32 d) –2,07
    e) –3,152 f) 2,013

13. a) 3,4 b) –6,2 c) 3,25 d) 5,2
    e) –2,5 f) 12,75

14. a) –5,35 b) 8,04 c) 3,4 d) 8,6
    e) –8,34 f) 9,64

15. a)–2,375 b) 4,33333
    c) 7,66667 d) –5,53333
    e) –9,83333 f) 4,86667

16. a)5,66667 b) –8,85714
    c) 15,66667 d) –8,55556
    e) 4,53333 f) 3,41667

17. a) $\frac{3}{10}$ b) $-\frac{47}{100}$ c) $\frac{7}{10}$ d) $-\frac{37}{100}$
    e) $1\frac{3}{10}$ f) $3\frac{7}{10}$

18. a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $1\frac{1}{5}$ d) $-\frac{7}{20}$
    e) $1\frac{1}{4}$ f) $3\frac{2}{5}$

19. a) $-25\frac{3}{4}$ b) $\frac{8}{25}$ c) $-1\frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{10}$
    e) $1\frac{53}{200}$ f) $-3\frac{59}{125}$

Seuraava lauseke on ekstratehtävien viimeiseen juttuun.

$$\frac{2}{10}+\frac{142857}{9999990}\overset{(27}{=}\overset{37037)}{\frac{2}{10}+\frac{5291}{370370}}$$

$$=\frac{74074+5291}{370370}=\frac{79365}{370370}\overset{(5}{=}\frac{15873}{74074}\overset{(11}{=}$$

$$=\frac{1443}{6734}\overset{(13}{=}\frac{111}{518}\overset{(37}{=}\frac{3}{14}$$

Eli ei todellakaan enää mikään helppo homma.

Kappale 6.

1. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{5}$ c) 1 d) 2
   e) $\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$ f) $\frac{5}{8}$

2. a) $\frac{1}{4}$ b) $-\frac{4}{5}$ c) 0 d) $-\frac{3}{5}$
   e) $\frac{1}{8}$ f) $-\frac{1}{4}$

3. a) $-\frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{5}$ c) -1 d) $-\frac{3}{5}$
   e) $\frac{5}{12}$ f) $\frac{1}{15}$

4. a) $\frac{7}{8}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{9}{8}=1\frac{1}{8}$ d) $\frac{5}{8}$

5. a) $\frac{7}{8}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{29}{15}=1\frac{14}{15}$

6. a) $-\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $-\frac{11}{15}$

7. a) $-\frac{1}{6}$ b) $\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$
   c) $\frac{11}{30}$ d) $-\frac{22}{21}=-1\frac{1}{21}$

8. a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{7}{15}$ c) $\frac{2}{15}$ d) $\frac{23}{42}$

9. a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{10}{7}=1\frac{3}{7}$
   e) $\frac{3}{5}$ f) $-\frac{3}{25}$

10. a) 1 b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $-\frac{6}{7}$
    e) $\frac{3}{4}$ f) $\frac{7}{12}$

11. a) $\frac{5}{18}$ b) $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$

12. a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{5}{12}$ c) $\frac{7}{12}$ d) $\frac{34}{21}=1\frac{13}{21}$
    e) $\frac{41}{60}$ f) $-\frac{12}{25}$

13. a) $-\frac{5}{4}=-1\frac{1}{4}$ b) $-\frac{2}{5}$ c) $-\frac{1}{2}$
    d) $\frac{5}{6}$ e) $-\frac{2}{3}$ f) -4

14. a) -1 b) 0 c) $-\frac{1}{8}$ d) $-\frac{1}{7}$
    e) $-\frac{22}{27}$ f) $-\frac{8}{15}$

15. a) $3\frac{3}{4}$ b) $4\frac{4}{5}$ c) $3\frac{2}{3}$ d) -4
    e) $8\frac{1}{3}$

16. a) $-1\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{5}$ c) 1 d) $1\frac{1}{5}$
e) 3

17. a) $1\frac{3}{8}$ b) $-1\frac{9}{10}$ c) $3\frac{1}{3}$ d) $-3\frac{7}{10}$

18. a) $1\frac{3}{10}$ b) $-4\frac{23}{30}$ c) $-\frac{7}{12}$ d) $4\frac{26}{35}$
e) $3\frac{1}{15}$

19. a) $-\frac{1}{4}$ b) $1\frac{4}{5}$ c) $3\frac{1}{3}$ d) $-2\frac{2}{5}$
e) $4\frac{3}{5}$

20. a) $3\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{7}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $2\frac{1}{5}$
e) $4\frac{6}{7}$

21. a) $3\frac{3}{4}$ b) $4\frac{4}{5}$ c) $3\frac{5}{6}$ d) $4\frac{1}{10}$
e) $8\frac{1}{3}$ f) $9\frac{1}{6}$

22. a) $5\frac{1}{4}$ b) $3\frac{2}{5}$ c) $5\frac{1}{6}$ d) $4\frac{9}{10}$
e) $2\frac{2}{3}$ f) $7\frac{7}{12}$

23. a) $-\frac{3}{4}$ b) $-\frac{1}{5}$ c) $-1\frac{1}{6}$ d) $-5\frac{1}{10}$
e) $1\frac{1}{3}$ f) $-4\frac{1}{6}$

24. a) $-\frac{11}{12}$ b) $-3\frac{1}{20}$ c) $13\frac{1}{4}$ d) $-12\frac{1}{10}$
e) $6\frac{2}{3}$ f) $-20\frac{19}{60}$

Kappale 7.

1. a) $\frac{8}{15}$ b) $1\frac{1}{20}$ c) $\frac{3}{14}$ d) $\frac{21}{25}$
e) $\frac{35}{36}$ f) $\frac{5}{6}$

2. a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{3}{10}$ c) $-1\frac{1}{2}$ d) $\frac{9}{25}$
e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{2}{3}$

3. a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{1}{15}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1
e) $1\frac{1}{9}$ f) $2\frac{1}{2}$

4. a) 10 b) 8 c) $7\frac{1}{2}$ d) $-1\frac{19}{30}$
e) $3\frac{1}{2}$ f) 6

5. a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{8}=\frac{9}{40}$

6. a) $3\frac{1}{3}$ b) $2\frac{4}{5}$ c) 3 d) 14
e) $5\frac{5}{6}$ f) $2\frac{2}{3}$

7. a) 6 b) $1\frac{3}{4}$ c) $1\frac{2}{3}$ d) 35
e) $\frac{5}{6}$ f) 1

8. a) $1\frac{1}{3}$ b) 1 c) 6 d) $1\frac{3}{4}$

9. a) $60l\cdot\frac{3}{4}=45l$ b) $45l\cdot\frac{4}{15}=12l$
c) $\frac{11}{15}\cdot 25km=18\frac{1}{3}km$

10. a) 3 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{5}$ d) 1

11. a) $2\frac{7}{9}$ b) $6\frac{1}{4}$ c) $23\frac{1}{3}$ d) 18

12. a) $1\frac{7}{39}$ b) 8 c) 10 d) 1

13. a) $\frac{5}{6}$ b) $6\frac{1}{2}$ c) $\frac{29}{55}$ d) $8\frac{1}{4}$

14. a) 8 b) 7 c) $9\frac{1}{11}$ d) 14

15. a) $-\frac{6}{35}$ b) $-1\frac{1}{20}$ c) $\frac{3}{14}$ d) -1
e) $\frac{2}{9}$ f) $-\frac{2}{3}$

16. a) $-\frac{2}{9}$ b) $-6\frac{1}{2}$ c) $1\frac{7}{22}$ d) $-8\frac{1}{4}$

17. a) $-1\frac{17}{18}$ b) $-3\frac{3}{4}$ c) -10 d) $14\frac{2}{5}$

Kappale 8.

1. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{4}{3}$ c) 7 d) $\frac{5}{3}$
e) $-\frac{6}{5}=-1\frac{1}{5}$ f) $\frac{5}{14}$

2. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{15}{28}$ c) 1 d) $\frac{3}{7}$
e) $1\frac{1}{4}$ f) $\frac{3}{5}$

3. a) $\frac{9}{7}=1\frac{2}{7}$ b) $\frac{5}{16}$ c) $\frac{5}{12}$ d) 1
e) 1 f) $\frac{3}{5}$

4. a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $2\frac{2}{7}$
e) $\frac{4}{15}$ f) $-1\frac{1}{35}$

5. a) $\frac{3}{2}:\frac{1}{3}=4\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}km:\frac{1}{8}km=6$

6. a) $\frac{3}{20}$ b) $\frac{5}{18}$ c) $\frac{3}{13}$ d) $-\frac{2}{7}$
e) $\frac{5}{32}$ f) $\frac{3}{4}$

7. a) 15 b) 8 c) $-4\frac{2}{7}$ d) –30
e) 16 f) –10

8. a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{1}{15}$ c) $1\frac{1}{2}$ d) 1
   e) $1\frac{1}{9}$ f) $2\frac{1}{2}$

9. a) 6 b) $\frac{8}{9}$ c) 2 d) $5\frac{5}{7}$
   e) 13 f) $\frac{1}{14}$

10. a) $\frac{2}{15}$ b) $-\frac{7}{10}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $2\frac{1}{2}$
    e) 6 f) 10

11. a) $2\frac{1}{2}$ b) $1\frac{4}{5}$ c) $\frac{3}{16}$ d) $1\frac{1}{5}$
    e) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{5}{63}$

12. a) $\frac{1}{2} : 3$ V: $\frac{1}{6}$ pitsaa
    b) $6\ km : \frac{3}{4}\ km$ V: 8 kertaa
    c) $4\ l : \frac{2}{5}\ l$ V: 10 kertaa

13. a) $1\frac{1}{3}$ b) $-1\frac{5}{9}$ c) $-\frac{4}{9}$ d) $-3\frac{3}{4}$
    e) 14 f) $-1\frac{1}{3}$

14. a) 15 pullollista b) 14 pulloa
    c) $\frac{1}{4}\ l$

15. a) 9 pulloa b) $\frac{1}{2}\ l$

Kappale 9.

1. a) $\frac{3}{4}$ b) $-\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{1}{2}$

2. a) $1\frac{3}{4}$ b) $2\frac{1}{4}$ c) 0 d) $\frac{1}{12}$

3. a) $\frac{3}{32}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{12}$ d) 2

4. a) $1\frac{3}{5}$ b) $\frac{7}{12}$ c) $-\frac{1}{3}$ d) 3

5. a) $\frac{11}{20}$ b) $-\frac{8}{15}$ c) $\frac{7}{12}$ d) $2\frac{11}{20}$

6. a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{6}{25}$

7. a) $\frac{3}{4}$ b) $3\frac{7}{12}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{11}{12}$

8. a) $\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(1-\frac{2}{5}\right)$ V: $1\frac{4}{15}$ pitsaa
   b) $\left(2-1\frac{2}{3}\right)+\left(2-\frac{4}{5}\right)$ V: $1\frac{8}{15}$ pitsaa

9. a) $3\cdot\left(\frac{1}{3}l+\frac{1}{2}l\right)$ V: $2\frac{1}{2}\ l$
   b) $3\cdot\left(1\frac{1}{3}l+2\frac{1}{3}l\right)$ V: 11 l
   Edellä lausekkeissakin on litrat, jos laskit ilman, ei se ole paha puute. Vastauksessa ne kuitenkin pitää olla mukana.

10. a) $7\cdot\left(\frac{1}{4}l+\frac{1}{2}l\right)$ V: $5\frac{1}{4}\ l$
    b) $\left(1\frac{1}{2}l+\frac{1}{3}l\right):10\frac{1}{2}l$ V: $5\frac{1}{4}$ mitallista
    Edellisissä lausekkeissa litrat supistuvat pois eikä vastauksessa enää ole litroja. Jos nämä laskut teki ilman litroja, ei se ole paha puute.

11. a) $3l:\frac{1}{2}l$ V: 6 mitallista
    b) $7l:1\frac{1}{3}l$ V: 6 kertaa

Kappale 10.

1. a) $\frac{4}{10}=40\%$ b) $\frac{6}{10}=60\%$
   c) $\frac{1}{10}=10\%$ d) $\frac{8}{10}=80\%$

2. a) $\frac{1}{5}=20\%$ b) $\frac{3}{5}=60\%$
   c) $\frac{1}{4}=25\%$ d) $\frac{3}{4}=75\%$

3. a) $\frac{1}{3}\approx 33{,}3\%$ b) $\frac{1}{2}=50\%$
   c) $\frac{2}{3}\approx 66{,}7\%$ d) $\frac{2}{2}=100\%$

4. a) $\frac{12}{20}=60\%$ b) $\frac{6}{18}\approx 33{,}3\%$
   c) $\frac{18}{24}=75\%$ d) $\frac{24}{40}=60\%$

5. a) 1 ruutu b) 4 ruutua
   c) 7 ruutua d) 2 ruutua

6. a) 5 ruutua b) 8 ruutua
   c) 13 ruutua d) 20 ruutua

7. a) 50 % b) 20 %
   c) 40 % d) 25 %

8. a) 75 % b) ≈ 33,3 %
   c) 20 % d) 70 %

9. a) 30 % b) 10 %
   c) 25 % d) 4 %

10. a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{7}{10}$ d) $\frac{3}{20}$

11. a) $\frac{1}{20}$ b) $\frac{7}{20}$ c) $\frac{9}{10}$ d) $\frac{17}{100}$

12. a) 30 € b) 70 € c) 70 %

13. a) 30 € b) 270 € c) 90 %

14. 35 %

15. a) ≈ 33,3 % b) 5

Kappale 11. (Kertaus)

1. a) ei b) kyllä c) kyllä d) ei

2. a) kyllä b) ei c) kyllä d) kyllä

3. a) 1, 3, 5 ja 15
   b) 1, 2, 3, 4, 6, 12, 18 ja 36
   c) 1, 7 ja 49
   d) 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 ja 100

4. a) kyllä b) ei c) kyllä d) ei

5. Tässä molemmat alkutekijöihin jakojen esitysmuodot, vastaukseen riittää joko kertolasku, missä voi olla sama alkuluku useammin tai potenssin avulla kerrottu muoto.
   a) $2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$ b) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5$
   c) $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
   d) $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2$

6. a) 5 b) 6 c) 36 d) 144

7. a) $\frac{14}{3}$ b) $\frac{21}{8}$ c) $\frac{7}{5}$ d) $\frac{3}{5}$

8. a) $4\frac{2}{3}$ b) $2\frac{7}{8}$ c) $1\frac{2}{5}$ d) $4\frac{3}{5}$

9. a) 1,4 b) 4,6 c) 0,75 d) 0,4444

10. a) $\frac{3}{5}$ b) $1\frac{4}{5}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $1\frac{19}{30}$

11. a) $6\frac{1}{4}$ b) $8\frac{17}{20}$

12. a) $\frac{2}{5}$ b) $-\frac{3}{5}$ c) $\frac{1}{3}$

13. a) $1\frac{1}{4}$ b) $4\frac{7}{10}$ c) $1\frac{20}{21}$

14. a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{1}{15}$ c) 12 d) $\frac{7}{9}$
    e) $2\frac{7}{9}$ f) $2\frac{1}{2}$

15. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{1}{5}$
    e) $3\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{2}$

16. a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $3\frac{1}{3}$

17. a) $1 - \frac{1}{3}$ V: $\frac{2}{3}$ b) $1\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ V: $1\frac{5}{6}$ litraa
    c) $2 \cdot 1\frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{3}$ V: $4\frac{1}{3}$ litraa
    d) $2\frac{1}{2} : \frac{1}{5}$ V: 13 purkillista
    (laskun tulos $12\frac{1}{2}$)

18. a) $\frac{4}{10} = 40\ \%$ b) $\frac{4}{5} = 80\ \%$
    c) $\frac{3}{4} = 75\ \%$ d) $\frac{11}{20} = 55\ \%$

19. a) 4 ruutu b) 6 ruutua
    c) 16 ruutua d) 20 ruutua

20. a) 20 % b) ≈ 66,7 %
    c) 75 % d) 14 %

21. a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{7}{20}$ c) $\frac{18}{100}$ d) $\frac{1}{4}$

22. a) 300 € b) 1700 €

23. 12,5%