

24

Lasketaan jakolaskut jakokulmassa.

a)

$$\begin{array}{r} 027 \\ 23 \overline{) 621} \\ \underline{- 46} \\ 161 \\ \underline{- 161} \\ 0 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 027 \\ 23 \overline{) 629} \\ \underline{- 46} \\ 169 \\ \underline{- 161} \\ 8 \end{array}$$

Vastaus a) $\frac{621}{23} = 27$, jakojäännös 0

b) $\frac{629}{23} = 27 \frac{8}{23}$, jakojäännös 8

25

Lasketaan jakokulmassa.

$$\begin{array}{r}
 3x+2 \overline{) 6x^2-11x-10} \\
 \underline{6x^2+4x} \\
 -15x-10 \\
 \underline{-15x-10} \\
 0
 \end{array}$$

Vastaus $2x-5$

26

Lasketaan jakokulmassa.

$$\begin{array}{r}
 3x^2 + x - 1 \\
 x+2 \overline{) 3x^3 + 7x^2 + x - 2} \\
 \underline{- \quad 3x^3 + 6x^2} \\
 x^2 + x - 2 \\
 \underline{- \quad x^2 + 2x} \\
 -x - 2 \\
 \underline{- \quad -x - 2} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{3x^3}{x} &= 3x^2 \\
 \frac{x^2}{x} &= x \\
 \frac{-x}{x} &= -1
 \end{aligned}$$

Vastaus $3x^2 + x - 1$

27

Lasketaan polynomien jakolasku jakokulmassa.

$$\begin{array}{r}
 2x^3 \qquad \qquad \qquad - 6 \\
 \hline
 3x^2 - 5x + 7 \overline{) 6x^5 - 10x^4 + 14x^3 - 18x^2 + 30x - 42} \\
 \underline{6x^5 - 10x^4 + 14x^3} \\
 - 18x^2 + 30x - 42 \\
 \underline{- 18x^2 + 30x - 42} \\
 0
 \end{array}$$

$$\frac{6x^5}{3x^2} = 2x^3$$

$$\frac{-18x^2}{3x^2} = -6$$

Vastaus $2x^3 - 6$

28

Lasketaan polynomien jakolasku jakokulmassa.

a)

$x^2 + 5$	$ \begin{array}{r} x^2 \quad + \quad 9 \\ \hline x^4 \quad + 14x^2 \quad + 45 \\ - \quad x^4 \quad + 5x^2 \\ \hline 9x^2 \quad + 45 \\ - \quad 9x^2 \quad + 45 \\ \hline 0 \end{array} $	$ \begin{array}{l} \frac{x^4}{x^2} = x^2 \\ \frac{9x^2}{x^2} = 9 \end{array} $
-----------	--	---

On jaollinen, koska jakojäännös on 0.

b)

$$\begin{array}{r}
 x^2 \quad - 2x \quad + 23 \\
 x^2 + 2x - 5 \overline{) x^4 \quad + 14x^2 \quad + 45} \\
 - \quad x^4 + 2x^3 - 5x^2 \\
 \hline
 \phantom{x^2 + 2x - 5 \overline{)} } - 2x^3 + 19x^2 \\
 - \quad - 2x^3 - 4x^2 + 10x \\
 \hline
 \phantom{x^2 + 2x - 5 \overline{)} } 23x^2 - 10x + 45 \\
 - \quad 23x^2 + 46x - 115 \\
 \hline
 \phantom{x^2 + 2x - 5 \overline{)} } -56x + 160
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{x^4}{x^2} &= x^2 \\
 \frac{-2x^3}{x^2} &= -2x \\
 \frac{23x^2}{x^2} &= 23
 \end{aligned}$$

Ei ole jaollinen, koska jakojäännökseksi saatiin $-56x + 160$, joka ei aina ole nolla.

Vastaus a) On, koska jakojäännös on 0.

b) Ei ole, koska jakojäännös $-56x + 160$ ei ole aina nolla.

29

Lasketaan polynomien jakolasku jakokulmassa.

$t + 2$	$\begin{array}{r} 3t^3 - 6t^2 + 7t - 14 \\ 3t^4 - 5t^2 + 9 \\ - + 6t^3 \\ \hline - 6t^3 - 5t^2 + 9 \\ - - 12t^2 \\ \hline 7t^2 + 9 \\ - 7t^2 + 14t \\ \hline - 14t + 9 \\ - - 14t - 28 \\ \hline 37 \end{array}$	$\frac{3t^4}{t} = 3t^3$ $\frac{-6t^3}{t} = -6t^2$ $\frac{7t^2}{t} = 7t$ $\frac{-14t}{t} = -14$
---------	---	--

Vastaus Ei ole, koska jakojäännös $37 \neq 0$.

30

$$P(x) = 5x^3 - 2x^2 + 7, \quad Q(x) = x + 1 \text{ ja } T(x) = x - 1.$$

a) Jaetaan polynomi P polynomilla Q jakokulmassa.

$$\begin{array}{r}
 5x^2 - 7x + 7 \\
 x+1 \overline{) 5x^3 - 2x^2 + 7} \\
 \underline{+ 5x^3 + 5x^2} \\
 -7x^2 + 7 \\
 \underline{+ 7x^2 + 7x} \\
 7x + 7 \\
 \underline{+ 7x + 7} \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \frac{5x^3}{x} = 5x^2 \\
 \frac{-7x^2}{x} = -7x \\
 \frac{7x}{x} = 7
 \end{array}$$

Jakojäännökseksi saatiin 0, joten polynomi P on jaollinen polynomilla Q .

b) Jaetaan polynomi P polynomilla T jakokulmassa.

$$\begin{array}{r}
 5x^2 + 3x + 3 \\
 x-1 \overline{) 5x^3 - 2x^2 + 7} \\
 \underline{5x^3 - 5x^2} \\
 3x^2 + 7 \\
 \underline{3x^2 - 3x} \\
 3x + 7 \\
 \underline{3x - 3} \\
 10
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \frac{5x^3}{x} = 5x^2 \\
 \frac{3x^2}{x} = 3x \\
 \frac{3x}{x} = 3
 \end{array}$$

Jakojäännökseksi saatiin $10 \neq 0$, joten polynomi P ei ole jaollinen polynomilla T .

Vastaus a) On, koska jakojäännös on 0.

b) Ei ole, koska jakojäännös on $10 \neq 0$.

31

Järjestetään jaettavan ja jakajan termit laskevan eksponentin mukaiseen järjestykseen ja lasketaan jakolasku jakokulmassa.

$$\begin{array}{r}
 45x^2 - 15x - 64 \\
 3x^2 + x + 4 \overline{) 135x^4 - 27x^2 + 72x} \\
 \underline{- 135x^4 + 45x^3 + 180x^2} \\
 - 45x^3 - 207x^2 + 72x \\
 \underline{- -45x^3 - 15x^2 - 60x} \\
 - 192x^2 + 132x \\
 \underline{- -192x^2 - 64x - 256} \\
 196x + 256
 \end{array}$$

Vastaus $45x^2 - 15x - 64 + \frac{196x + 256}{3x^2 + x + 4}$

32

$$P(x) = 6x^3 - 12x^2 + a$$

- a) Polynomi P on jaollinen polynomilla $2x + 8$, jos jaettavalla ja jakajalla on sama nollakohta.

Määritetään jakajan nollakohta:

$$2x + 8 = 0$$

$$2x = -8$$

$$x = -4$$

Jakajan nollakohdan $x = -4$ tulee siis olla myös jaettavan polynomin P nollakohta.

$$P(-4) = 0$$

$$6 \cdot (-4)^3 - 12 \cdot (-4)^2 + a = 0$$

$$-384 - 192 + a = 0$$

$$a = 576$$

- b) Polynomi P on jaollinen polynomilla $3x - 6$, jos jaettavalla ja jakajalla on sama nollakohta.

Määritetään jakajan nollakohta:

$$3x - 6 = 0$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

Jakajan nollakohdan $x = 2$ tulee siis olla myös jaettavan polynomin P nollakohta.

$$P(2) = 0$$

$$6 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 + a = 0$$

$$48 - 48 + a = 0$$

$$a = 0$$

Vastaus a) $a = 576$

b) $a = 0$

33

a) Sievennetään lauseke jakokulman avulla.

[illegible]

Lasketaan raja-arvo.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} (-x^4 - x^2 - 1) = -1^4 - 1^2 - 1 = -3$$

b) Sievennetään lauseke jakokulman avulla.

$$\begin{array}{r} 3 \\ x^2 - 4 \overline{) 3x^2 + 6x - 24} \\ \underline{- 3x^2 - 12} \\ 6x - 12 \end{array}$$

Lasketaan raja-arvo.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 6x - 24}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(3 + \frac{6x - 12}{x^2 - 4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(3 + \frac{6(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(3 + \frac{6}{(x + 2)} \right) \\ &= 3 + \frac{6}{2 + 2} \\ &= 3 + \frac{6}{4} \\ &= 3 + 1\frac{1}{2} \\ &= 4\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vastaus a) -3 b) $4\frac{1}{2}$

34

Lasketaan jakolasku jakokulmassa.

$$\begin{array}{r}
 3x^2 + 2x - 4 \\
 2x - 3 \overline{) 6x^3 - 5x^2 - 14x + 12} \\
 \underline{6x^3 - 9x^2} \\
 4x^2 - 14x + 12 \\
 \underline{4x^2 - 6x} \\
 -8x + 12 \\
 \underline{-8x + 12} \\
 0
 \end{array}$$

Vastaus $3x^2 + 2x - 4$

35

a) Lasketaan jakolasku jakokulmassa.

$$\begin{array}{r}
 3x^2 \quad - \quad 1 \\
 2x^3 + 5 \overline{) 6x^5 \quad - 2x^3 + \quad x^2 \quad - 5} \\
 \underline{- \quad 6x^5 \quad \quad \quad + 15x^2} \\
 \quad \quad - 2x^3 - 14x^2 \quad - 5 \\
 \quad \quad \underline{- \quad - 2x^3 \quad \quad \quad - 5} \\
 \quad \quad \quad \quad - 14x^2
 \end{array}$$

Ei ole jaollinen, koska jakojäännös $-14x^2$ ei ole aina nolla.

b) Lasketaan jakolasku jakokulmassa.

$$\begin{array}{r}
 6x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 5x + 5 \\
 x-1 \overline{) 6x^5 - 2x^3 + x^2 - 5} \\
 \underline{6x^5 - 6x^4} \\
 6x^4 - 2x^3 + x^2 - 5 \\
 \underline{6x^4 - 6x^3} \\
 4x^3 + x^2 - 5 \\
 \underline{4x^3 - 4x^2} \\
 5x^2 - 5 \\
 \underline{5x^2 - 5x} \\
 5x - 5 \\
 \underline{5x - 5} \\
 0
 \end{array}$$

On jaollinen, koska jakojäännös on 0.

c) Lasketaan jakolasku jakokulmassa.

$$\begin{array}{r}
 x^5 \qquad -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^2 \qquad -\frac{5}{6} \\
 6 \overline{) 6x^5 \qquad -2x^3 + \qquad x^2 \qquad -5} \\
 - \underline{6x^5} \\
 -2x^3 + \qquad x^2 \qquad -5 \\
 - \underline{-2x^3} \\
 x^2 \qquad -5 \\
 - \underline{x^2} \\
 -5 \\
 - \underline{-5} \\
 0
 \end{array}$$

On jaollinen (jokainen polynomi on jaollinen millä tahansa nolasta eroavalla vakiolla).

Vastaus a) Ei ole, koska jakojäännös $-14x^2$ ei ole aina nolla.

b) On, koska jakojäännös on 0.

c) On, koska jakojäännös on 0.

36

a) Lasketaan polynomien jakolasku jakokulmassa.

$$\begin{array}{r}
 -x^2 - 2x + 1 \\
 -x + 2 \overline{) \begin{array}{l} x^3 - 5x + 4 \\ - (x^3 - 2x^2) \\ \hline 2x^2 - 5x + 4 \\ - (2x^2 - 4x) \\ \hline -x + 4 \\ - (-x + 2) \\ \hline 2 \end{array} }
 \end{array}$$

b) Lasketaan polynomien jakolasku jakokulmassa.

$$\begin{array}{r}
 4x^3 \\
 2x^2 - 5 \overline{) \begin{array}{l} 8x^5 \\ - (8x^5 - 20x^3) \\ \hline 14x^3 \\ - (14x^3 - 35x) \\ \hline 35x + 9 \end{array} }
 \end{array}$$

Vastaus a) $-x^2 - 2x + 1 + \frac{2}{2-x}$

b) $4x^3 + 7x + \frac{35x+9}{2x^2-5}$

37

Ratkaistaan polynomin P lauseke jakoyhtälön avulla.

jaettava = osamäärä · jakaja + jakojäännös

$$\begin{aligned} P(x) &= (7x^2 - 8) \cdot (x^2 + 2) + 19 \\ &= 7x^4 + 14x^2 - 8x^2 - 16 + 19 \\ &= 7x^4 + 6x^2 + 3 \end{aligned}$$

Vastaus $P(x) = 7x^4 + 6x^2 + 3$

38

$$P(x) = 42x^3 + ax^2 + 23x - 3$$

Polynomi P on jaollinen polynomilla $7x - 1$, jos jaettavalla ja jakajalla on sama nollakohta. Määritetään jakajan nollakohta:

$$7x - 1 = 0$$

$$7x = 1$$

$$x = \frac{1}{7}$$

Jakajan nollakohdan $x = \frac{1}{7}$ tulee siis olla myös jaettavan polynomin P nollakohta.

$$P\left(\frac{1}{7}\right) = 0$$

$$42 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3 + a \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 + 23 \cdot \left(\frac{1}{7}\right) - 3 = 0$$

$$\frac{42}{7^3} + \frac{a}{7^2} + \frac{23}{7} - 3 = 0$$

$$\frac{6}{7^2} + \frac{a}{7^2} + \frac{23}{7} - 3 = 0 \quad \left| \cdot 49 (= 7^2) \right.$$

$$6 + a + 7 \cdot 23 - 49 \cdot 3 = 0$$

$$a = 147 - 6 - 161$$

$$a = 147 - 167$$

$$a = -20$$

Vastaus $a = -20$

39

Tutkitaan polynomien jakolaskua jakokulmassa.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 t^{2015} \qquad + t^{2013} + t^{2011} + \dots + t \\
 t^2 - 1 \overline{) t^{2017} \qquad \qquad \qquad + t + 1} \\
 \underline{- \quad t^{2017} \qquad - t^{2015}} \qquad \qquad \qquad \\
 \qquad \qquad \qquad t^{2015} \qquad \qquad \qquad + t + 1 \\
 \qquad \qquad \underline{- \quad t^{2015} - t^{2013}} \qquad \qquad \qquad \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad t^{2013} \qquad \qquad \qquad + t + 1 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{- \quad t^{2013} + t^{2011}} \qquad \qquad \qquad \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad t^{2011} \qquad \qquad \qquad + t + 1 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad t^3 \qquad + t + 1 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{- \quad t^3 \qquad - t} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 2t + 1
 \end{array}
 \end{array}$$

Vastaus $2t + 1$

40

Lasketaan jakolasku jakokulmassa.

$$\begin{array}{r}
 2x^2 \quad +1 \\
 4x^2 - x + 2 \overline{) 8x^4 - 2x^3 + 8x^2 + ax + b} \\
 \underline{8x^4 - 2x^3 + 4x^2} \\
 4x^2 + ax + b \\
 \underline{4x^2 - x + 2} \\
 (a+1)x + b - 2
 \end{array}$$

Koska jako menee tasan, niin jakojäännöksen on oltava nolla kaikilla x .

Siis

$$(a+1)x + b - 2 \equiv 0$$

$$(a+1)x + b - 2 \equiv 0x + 0$$

$$a+1=0 \quad \text{ja} \quad b-2=0$$

$$a=-1 \quad \text{ja} \quad b=2$$

Vastaus $a=-1$ ja $b=2$

41

Lasketaan jakolasku jakokulmassa.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 5x + 2y \qquad +1 \\
 3x - 7y \overline{) 15x^2 - 14y^2 - 29xy + 3x - 7y} \\
 \underline{- 15x^2 \qquad - 35xy} \\
 -14y^2 + 6xy + 3x - 7y \\
 \underline{- -14y^2 + 6xy} \\
 3x - 7y \\
 \underline{- 3x - 7y} \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \frac{15x^2}{3x} = 5x \\
 \frac{-14y^2}{-7y} = 2y \\
 \frac{3x}{3x} = 1
 \end{array}
 \end{array}$$

Vastaus $5x + 2y + 1$

42

a) Sievennetään lauseke jakokulman avulla.

$$\begin{array}{r}
 3x^2 \qquad - 5 \\
 2x + 6 \overline{) 6x^3 + 18x^2 - 10x - 30} \\
 \underline{- 6x^3 + 18x^2} \\
 \phantom{2x + 6 \overline{) 6x^3 + 18x^2 - 10x - 30}} - 10x - 30 \\
 \phantom{2x + 6 \overline{) 6x^3 + 18x^2 - 10x - 30}} \underline{- -10x - 30} \\
 \phantom{2x + 6 \overline{) 6x^3 + 18x^2 - 10x - 30}} \phantom{2x + 6 \overline{) 6x^3 + 18x^2 - 10x - 30}} 0
 \end{array}$$

Lasketaan raja-arvo.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -3} \frac{6x^3 + 18x^2 - 10x - 30}{2x + 6} &= \lim_{x \rightarrow -3} (3x^2 - 5) \\
 &= 3 \cdot (-3)^2 - 5 \\
 &= 27 - 5 \\
 &= 22
 \end{aligned}$$

b) Sievennetään lauseke jakokulman avulla.

$$\begin{array}{r} 7x^2 + 3x \\ x^2 + x \overline{) 7x^4 + 10x^3 + 3x^2} \\ \underline{7x^4 + 7x^3} \\ 3x^3 + 3x^2 \\ \underline{3x^3 + 3x^2} \\ 0 \end{array}$$

Lasketaan raja-arvo.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^4 + 10x^3 + 3x^2}{x^2 + x} &= \lim_{x \rightarrow -1} (7x^2 + 3x) \\ &= 7 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) \\ &= 7 - 3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Vastaus a) 22 b) 4

43

- a) Koska raja-arvo määritetään jakajan nollakohdassa, on tuon nollakohdan $x = 2$ oltava myös jaettavan nollakohta, jotta raja-arvo olisi olemassa.

Jakajan nollakohdan $x = 2$ tulee siis olla myös jaettavan polynomin P nollakohta.

$$P(2) = 0$$

$$6 \cdot 2^4 - a = 0$$

$$a = 6 \cdot 16$$

$$a = 96$$

Sijoitetaan $a = 96$ ja lasketaan jakolasku $\frac{6x^4 - 96}{x^2 - 4}$ jakokulman avulla.

$$\begin{array}{r}
 6x^2 + 24 \\
 x^2 - 4 \overline{) 6x^4 - 96} \\
 \text{—} 6x^4 \\
 24x^2 \\
 \text{—} 24x^2 \\
 0
 \end{array}$$

Lasketaan raja-arvo.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x^4 - 96}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} (6x^2 + 24) = 6 \cdot 2^2 + 24 = 24 + 24 = 48$$

- b) Koska raja-arvo määritetään jakajan nollakohdassa, on tuon nollakohdan $x = 3$ oltava myös jaettavan nollakohta, jotta raja-arvo olisi olemassa.

Jakajan nollakohdan $x = 3$ tulee siis olla myös jaettavan polynomin P nollakohta.

$$P(3) = 0$$

$$12 \cdot 3^3 + 3a = 0$$

$$12 \cdot 27 + 3a = 0$$

$$4 \cdot 27 + a = 0$$

$$a = -108$$

Sijoitetaan $a = -108$ ja lasketaan jakolasku $\frac{12x^3 - 108}{x^2 - 9}$ jakokulman avulla.

$$\begin{array}{r} 12x \\ x^2 - 9 \overline{) 12x^3 - 108} \\ \underline{- 12x^3 - 108} \\ 0 \end{array}$$

Lasketaan raja-arvo.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{12x^3 - 108}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} 12x = 12 \cdot 3 = 36$$

Vastaus a) $a = 96$, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x^4 - 96}{x^2 - 4} = 48$

b) $a = -108$, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{12x^3 - 108}{x^2 - 9} = 36$

44

- a) Polynomilla $P(x) = 3x^3 - 6x^2 - 15x + 18$ on tekijänä $x + 1 = x - (-1)$ täsmälleen silloin, kun polynomin P nollakohta on -1 . Lasketaan $P(-1)$.

$$\begin{aligned} P(-1) &= 3 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 - 15 \cdot (-1) + 18 \\ &= -3 - 6 + 15 + 18 \\ &= 24 \neq 0 \end{aligned}$$

Koska $x = -1$ ei ole polynomin P nollakohta, niin $x + 1$ ei ole polynomin P tekijä.

- b) Polynomilla $P(x) = 3x^3 - 6x^2 - 15x + 18$ on tekijänä $4x - 12 = 4(x - 3)$ täsmälleen silloin, kun polynomin P nollakohta on 3 . Lasketaan $P(3)$.

$$\begin{aligned} P(3) &= 3 \cdot 3^3 - 6 \cdot 3^2 - 15 \cdot 3 + 18 \\ &= 81 - 54 - 45 + 18 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Koska $x = 3$ on polynomin P nollakohta, niin $4x - 12$ on polynomin P tekijä.

Vastaus a) ei ole

b) on

45

Jaetaan polynomi $A(x)$ jakokulmassa tekijällä $x^2 + 3$.

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - 32 \\
 x^2 + 3 \overline{) 2x^4 - 26x^2 - 96} \\
 \underline{- 2x^4 + 6x^2} \\
 -32x^2 - 96 \\
 \underline{- -32x^2 - 96} \\
 0
 \end{array}$$

Siis $A(x) = (x^2 + 3)(2x^2 - 32)$. Osamääräksi saatiin toisen asteen polynomi $2x^2 - 32$, joka on myös polynomin $A(x)$ tekijä. Jaetaan tekijä $2x^2 - 32$ tekijöihin nollakohtiensa avulla.

$$2x^2 - 32 = 0$$

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

Esitetään polynomi $A(x)$ tulomuodossa.

$$\begin{aligned}
 A(x) &= (x^2 + 3)(2x^2 - 32) \\
 &= (x^2 + 3) \cdot 2(x - 4)(x + 4)
 \end{aligned}$$

Vastaus $A(x) = 2(x + 4)(x - 4)(x^2 + 3)$

46

Polynomilla P on nollakohta $x = 4$, joten $x - 4$ on polynomin P tekijä.

Jaetaan polynomi P jakokulmassa tekijällä $x - 4$.

$$\begin{array}{r}
 3x^2 + 9x - 54 \\
 x - 4 \overline{) 3x^3 - 3x^2 - 90x + 216} \\
 \underline{3x^3 - 12x^2} \\
 9x^2 - 90x + 216 \\
 \underline{9x^2 - 36x} \\
 -54x + 216 \\
 \underline{-54x + 216} \\
 0
 \end{array}$$

Siis $P(x) = (x - 4)(3x^2 + 9x - 54)$.

Jaetaan tekijä $3x^2 + 9x - 54$ tekijöihin nollakohtiensa avulla.

$$3x^2 + 9x - 54 = 0$$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-54)}}{2 \cdot 1} \\
 &= \frac{-9 \pm \sqrt{729}}{2} \\
 &= \frac{-9 \pm 27}{2} \\
 x &= -6 \quad \text{tai} \quad x = 3
 \end{aligned}$$

Esitetään polynomi $P(x)$ tulomuodossa.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-4)(3x^2+9x-54) \\ &= (x-4) \cdot 3 \cdot (x-3)(x+6) \\ &= 3(x-3)(x-4)(x+6) \end{aligned}$$

Vastaus $P(x) = 3(x-3)(x-4)(x+6)$

47

a) $A(x) = 9x^3 - 48x^2 + 99x - 84$ ja $B(x) = 3x - 7$.

Jaetaan polynomi A jakokulmassa polynomilla B .

$$\begin{array}{r}
 3x^2 - 9x + 12 \\
 3x - 7 \overline{) 9x^3 - 48x^2 + 99x - 84} \\
 \underline{9x^3 - 21x^2} \\
 -27x^2 + 99x - 84 \\
 \underline{-27x^2 + 63x} \\
 36x - 84 \\
 \underline{-36x + 84} \\
 0
 \end{array}$$

Siis $A(x) = (3x^2 - 9x + 12)(3x - 7) + 0 = (3x^2 - 9x + 12)(3x - 7)$.

b) $A(x) = 9x^3 - 48x^2 + 99x - 84$ ja $B(x) = 3x - 4$.

Jaetaan polynomi A jakokulmassa polynomilla B .

$$\begin{array}{r}
 3x^2 - 12x + 17 \\
 3x - 4 \overline{) 9x^3 - 48x^2 + 99x - 84} \\
 \underline{- 9x^3 + 12x^2} \\
 -36x^2 + 99x - 84 \\
 \underline{- -36x^2 + 48x} \\
 51x - 84 \\
 \underline{- 51x + 68} \\
 -16
 \end{array}$$

Siis $A(x) = (3x^2 - 12x + 17)(3x - 4) - 16$.

Vastaus a) $A(x) = (3x^2 - 9x + 12)(3x - 7)$

b) $A(x) = (3x^2 - 12x + 17)(3x - 4) - 16$

48

Koska polynomilla P on nollakohta -7 , niin sillä on tekijä $x - (-7) = x + 7$.

Koska polynomilla P on kaksinkertainen nollakohta 2 , niin sillä on tekijä $(x - 2)(x - 2) = (x - 2)^2$.

Kolmannen asteen polynomilla on korkeintaan kolme ensimmäisen asteen tekijää, joten polynomilla P ei ole edellä olevien lisäksi muita tekijöitä.

$$P(x) = a(x + 7)(x - 2)^2$$

Kerroin a saadaan määritettyä tiedon $P(1) = -16$ avulla.

$$P(1) = -16$$

$$a(1 + 7)(1 - 2)^2 = -16$$

$$a \cdot 8 \cdot (-1)^2 = -16$$

$$8a = -16$$

$$a = -2$$

Siis $P(x) = -2(x + 7)(x - 2)^2 = -2x^3 - 6x^2 + 48x - 56$.

Vastaus $P(x) = -2x^3 - 6x^2 + 48x - 56$ ($= -2(x - 2)^2(x + 7)$)

49

Koska polynomilla A on viisinkertainen nollakohta -2 , niin sillä on tekijä $(x - (-2))^5 = (x + 2)^5$.

Viidennen asteen polynomilla on korkeintaan viisi ensimmäisen asteen tekijää, joten polynomilla A ei ole edellä olevien lisäksi muita tekijöitä.

$$A(x) = a(x + 2)^5$$

Kerroin a saadaan määritettyä tiedon $A(-4) = 32$ avulla.

$$A(-4) = 32$$

$$a(-4 + 2)^5 = 32$$

$$a \cdot (-2)^5 = 32$$

$$-32a = 32$$

$$a = -1$$

Siis $A(x) = -(x + 2)^5 = -x^5 - 10x^4 - 40x^3 - 80x^2 - 80x - 32$.

Vastaus $A(x) = -x^5 - 10x^4 - 40x^3 - 80x^2 - 80x - 32$ ($= -(x + 2)^5$)

50

Osoitetaan, että polynomilla $Q(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 4x + 4$ on täsmälleen yksi ensimmäisen asteen tekijä.

Jaetaan polynomi tekijöihin ryhmittelemällä.

$$\begin{aligned}
 Q(x) &= x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 4x + 4 \\
 &= x^4(x+1) + x^2(x+1) + 4(x+1) \\
 &= (x+1)(x^4 + x^2 + 4)
 \end{aligned}$$

$\underbrace{x^4}_{\geq 0} + \underbrace{x^2}_{\geq 0} + 4 > 0$

Polynomia $x^4 + x^2 + 4$ ei voi jakaa tekijöihin, koska sillä ei ole nollakohtia.

Siis polynomilla Q on täsmälleen yksi ensimmäisen asteen tekijä. $\square$

Vastaus On osoitettu, että polynomilla Q on täsmälleen yksi ensimmäisen asteen tekijä.

51

- a) Kun polynomi $P(x) = 4x^3 - 7x^2 + 9$ jaetaan binomilla $x - 3$, on jakojäännös $P(3)$.

$$P(3) = 4 \cdot 3^3 - 7 \cdot 3^2 + 9 = 54$$

- b) Kun polynomi $P(x) = 4x^3 - 7x^2 + 9$ jaetaan binomilla $x + 2$, on jakojäännös $P(-2)$.

$$P(-2) = 4 \cdot (-2)^3 - 7 \cdot (-2)^2 + 9 = -51$$

Vastaus a) 54

b) -51

52

Jos polynomilla ei ole ensimmäisen asteen tekijää, sillä ei voi olla myöskään nollakohtia.

Keksitään siis esimerkkejä sellaisista neljännen asteen polynomeista, joilla ei ole nollakohtia.

Esimerkiksi: $(x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$ tai

$$(x^2 + 2)(2x^2 + 1) = 2x^4 + 5x^2 + 2 \quad \text{tai}$$

$$x^4 + 1 \quad \text{jne.}$$

Vastaus Esimerkiksi $(x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$.

53

- a) Jos $x = 1$ on polynomin $P(x) = ax^3 + x^2 + 26x - 15$ nollakohta, niin

$$P(1) = 0$$

$$a \cdot 1^3 + 1^2 + 26 \cdot 1 - 15 = 0$$

$$a + 1 + 26 - 15 = 0$$

$$a + 12 = 0$$

$$a = -12$$

- b) Koska polynomin $P(x) = -12x^3 + x^2 + 26x - 15$ eräs nollakohta on $x = 1$, on sillä tekijä $x - 1$.

Jaetaan polynomi P polynomilla $x - 1$ jakokulmassa.

$$\begin{array}{r}
 -12x^2 - 11x + 15 \\
 x-1 \overline{) -12x^3 + x^2 + 26x - 15} \\
 \underline{- -12x^3 + 12x^2} \\
 -11x^2 + 26x - 15 \\
 \underline{- -11x^2 + 11x} \\
 15x - 15 \\
 \underline{- 15x - 15} \\
 0
 \end{array}$$

Jaetaan vielä osamääräksi saatu toisen asteen polynomi tekijöihin nollakohtien avulla.

$$-12x^2 - 11x + 15 = 0$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot (-12) \cdot 15}}{2 \cdot (-12)}$$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{841}}{-24} = \frac{11 \pm 29}{-24}$$

$$x = \frac{-18}{-24} = \frac{3}{4} \quad \text{tai} \quad x = \frac{40}{-24} = -\frac{5}{3}$$

Siis

$$\begin{aligned} -12x^2 - 11x + 15 &= -12\left(x - \left(-\frac{5}{3}\right)\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) \\ &= -3 \cdot 4 \cdot \left(x + \frac{5}{3}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) \\ &= -(3x + 5)(4x - 3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= -12x^3 + x^2 + 26x - 15 \\ &= (-12x^2 - 11x + 15)(x - 1) \\ &= -(3x + 5)(4x - 3)(x - 1) \end{aligned}$$

Vastaus a) $a = -12$ b) $P(x) = -(3x + 5)(4x - 3)(x - 1)$

54

- a) Polynomilla $P(x) = 5x^4 - 17x^3 + 39x^2 - 85x + 70$ on tekijänä $x - 3$ täsmälleen silloin, kun polynomin P nollakohta on 3. Lasketaan $P(3)$.

$$\begin{aligned}
 P(3) &= 5 \cdot 3^4 - 17 \cdot 3^3 + 39 \cdot 3^2 - 85 \cdot 3 + 70 \\
 &= 405 - 17 \cdot 3^3 + 13 \cdot 3^3 - 255 + 70 \\
 &= 150 - 4 \cdot 3^3 + 70 \\
 &= 220 - 108 \\
 &= 112 \neq 0
 \end{aligned}$$

Koska $x = 3$ ei ole polynomin P nollakohta, niin $x - 3$ ei ole polynomin tekijä.

- b) Polynomilla $P(x) = 5x^4 - 17x^3 + 39x^2 - 85x + 70$ on tekijänä $2x - 4 = 2(x - 2)$ täsmälleen silloin, kun polynomin P nollakohta on 2. Lasketaan $P(2)$.

$$\begin{aligned}
 P(2) &= 5 \cdot 2^4 - 17 \cdot 2^3 + 39 \cdot 2^2 - 85 \cdot 2 + 70 \\
 &= 5 \cdot 16 - 17 \cdot 8 + 39 \cdot 4 - 170 + 70 \\
 &= 80 - 136 + 156 - 170 + 70 \\
 &= 80 + 20 - 100 \\
 &= 100 - 100 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Koska $x = 2$ on polynomin P nollakohta, niin $2(x - 2) = 2x - 4$ on polynomin tekijä.

- c) Koska jakajalla ei ole nollakohtaa, tutkitaan jaollisuutta jakamalla polynomi P jakokulmassa polynomilla $x^2 + 5$

$$\begin{array}{r}
 5x^2 - 17x + 14 \\
 x^2 + 5 \overline{) 5x^4 - 17x^3 + 39x^2 - 85x + 70} \\
 \underline{- 5x^4 \qquad + 25x^2} \\
 -17x^3 + 14x^2 - 85x + 70 \\
 \underline{- -17x^3 \qquad - 85x} \\
 14x^2 \qquad + 70 \\
 \underline{- 14x^2 \qquad + 70} \\
 0
 \end{array}$$

Koska jakolasku meni tasan, on polynomi P jaollinen polynomilla $x^2 + 5$.

Vastaus a) ei ole

b) on

c) on

55

Polynomilla P on nollakohta $x = -3$, joten $x - (-3) = x + 3$ on polynomin P tekijä.

Jaetaan polynomi P jakokulmassa tekijällä $x + 3$.

$$\begin{array}{r}
 6x^2 - 37x + 45 \\
 x + 3 \overline{) 6x^3 - 19x^2 - 66x + 135} \\
 \underline{6x^3 + 18x^2} \\
 -37x^2 - 66x + 135 \\
 \underline{-37x^2 - 111x} \\
 45x + 135 \\
 \underline{45x + 135} \\
 0
 \end{array}$$

Jaetaan vielä osamääräksi saatu toisen asteen polynomi tekijöihin nollakohtien avulla.

$$\begin{aligned}
 6x^2 - 37x + 45 &= 0 \\
 x &= \frac{37 \pm \sqrt{(-37)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 45}}{2 \cdot 6} \\
 &= \frac{37 \pm \sqrt{289}}{12} \\
 &= \frac{37 \pm 17}{12} \\
 x &= \frac{54}{12} = \frac{9}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}
 \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned}6x^2 - 37x + 45 &= 6 \cdot \left(x - \frac{5}{3}\right) \left(x - \frac{9}{2}\right) \\&= 2 \cdot 3 \cdot \left(x - \frac{5}{3}\right) \left(x - \frac{9}{2}\right) \\&= (3x - 5)(2x - 9).\end{aligned}$$

Kirjoitetaan polynomi P tulomuodossa.

$$\begin{aligned}P(x) &= (6x^2 - 37x + 45)(x + 3) \\&= (3x - 5)(2x - 9)(x + 3)\end{aligned}$$

Vastaus $P(x) = (3x - 5)(2x - 9)(x + 3)$

56

Koska polynomilla P on nollakohta -1 , niin sillä on tekijä $x - (-1) = x + 1$.

Koska polynomilla P on nollakohta $-\frac{1}{2}$, niin sillä on tekijä

$$x - \left(-\frac{1}{2}\right) = x + \frac{1}{2}.$$

Koska polynomilla P on kolminkertainen nollakohta 2 , niin sillä on tekijä $(x - 2)^3$.

Viidennen asteen polynomilla on korkeintaan viisi ensimmäisen asteen tekijää, joten polynomilla P ei ole edellä olevien lisäksi muita tekijöitä.

$$P(x) = a(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)^3$$

Kerroin a saadaan määritettyä tiedon $P(1) = -18$ avulla.

$$P(1) = -18$$

$$a(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)(1-2)^3 = -18$$

$$a \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot (-1) = -18$$

$$-3a = -18$$

$$a = 6$$

Tällöin polynomin P lauseke on

$$\begin{aligned} P(x) &= 6(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)^3 \\ &= 3(x+1) \cdot 2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)^3 \\ &= 3(x+1)(2x+1)(x-2)^3 \\ &= 6x^5 - 27x^4 + 21x^3 + 42x^2 - 36x - 24 \end{aligned}$$

Vastaus
$$P(x) = 6x^5 - 27x^4 + 21x^3 + 42x^2 - 36x - 24$$
$$(\quad = 3(x+1)(2x+1)(x-2)^3)$$

57

Jos $x + 2 = x - (-2)$ on polynomin $P(x) = 3x^3 + ax - 18$ tekijä,
niin
 $x = -2$ on polynomin nollakohta.

$$P(-2) = 0$$

$$3 \cdot (-2)^3 + a \cdot (-2) - 18 = 0$$

$$-24 - 2a - 18 = 0$$

$$-2a = 42$$

$$a = -21$$

Siis $P(x) = 3x^3 - 21x - 18$.

Jaetaan polynomi P polynomilla $x + 2$ jakokulmassa.

$$\begin{array}{r}
 3x^2 - 6x - 9 \\
 x + 2 \overline{) 3x^3 - 21x - 18} \\
 \underline{3x^3 + 6x^2} \\
 -6x^2 - 21x - 18 \\
 \underline{-6x^2 - 12x} \\
 -9x - 18 \\
 \underline{-9x - 18} \\
 0
 \end{array}$$

Jaetaan vielä osamääräksi saatu toisen asteen polynomi $3x^2 - 6x - 9$ tekijöihin nollakohtien avulla.

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x = -1 \text{ tai } x = 3$$

Kirjoitetaan polynomi P tulomuodossa.

$$P(x) = 3x^3 - 21x - 18$$

$$= (x + 2)(3x^2 - 6x - 9)$$

$$= 3(x + 2)(x^2 - 2x - 3)$$

$$= 3(x + 2)(x - 3)(x + 1)$$

Vastaus $a = -21$, $P(x) = 3(x + 2)(x - 3)(x + 1)$

58

- a) Jotta polynomi $A(x)$ voidaan esittää jakoyhtälönä $A(x) = Q(x)B(x) + R(x)$, on polynomi $A(x)$ jaettava polynomilla $B(x) = 2x + 9$ jakokulmassa.

$$\begin{array}{r}
 2x^3 \qquad -4x + 6 \\
 2x + 9 \overline{) 4x^4 + 18x^3 - 8x^2 - 24x + 54} \\
 \underline{- \quad 4x^4 + 18x^3} \\
 \phantom{2x + 9 \overline{) 4x^4 + 18x^3}} -8x^2 - 24x + 54 \\
 \phantom{2x + 9 \overline{) 4x^4 + 18x^3}} \underline{- \quad -8x^2 - 36x} \\
 \phantom{2x + 9 \overline{) 4x^4 + 18x^3}} 12x + 54 \\
 \phantom{2x + 9 \overline{) 4x^4 + 18x^3}} \underline{- \quad 12x + 54} \\
 \phantom{2x + 9 \overline{) 4x^4 + 18x^3}} 0
 \end{array}$$

Tällöin $A(x) = (2x^3 - 4x + 6)(2x + 9)$.

- b) Jaetaan polynomi $A(x)$ polynomilla $B(x) = 2x^2 + 5$ jakokulmassa.

$$\begin{array}{r}
 2x^2 + 9x - 9 \\
 2x^2 + 5 \overline{) 4x^4 + 18x^3 - 8x^2 - 24x + 54} \\
 \underline{4x^4 + 10x^2} \\
 18x^3 - 18x^2 - 24x + 54 \\
 \underline{18x^3 + 45x} \\
 -18x^2 - 69x + 54 \\
 \underline{-18x^2 - 45} \\
 -69x + 99
 \end{array}$$

Tällöin $A(x) = (2x^2 + 9x - 9)(2x^2 + 5) + (-69x + 99)$.

c) Jos jakojäännös $R(x) = 54x + 74$, niin

$$A(x) = Q(x)B(x) + R(x)$$

$$Q(x)B(x) = A(x) - R(x)$$

$$= 4x^4 + 18x^3 - 8x^2 - 24x + 54 - (54x + 74)$$

$$= 4x^4 + 18x^3 - 8x^2 - 78x - 20$$

Jos $B(x)$ on mikä tahansa toisen asteen polynomi, niin myös $Q(x)$ on toisen asteen polynomi.

Jaetaan polynomi $B(x)Q(x)$ tekijöihin laskimen tekijöihinjakotoiminnolla (factor()).

$$Q(x)B(x) = 4x^4 + 18x^3 - 8x^2 - 78x - 20$$

$$= (4x^2 + 2x - 20)(x^2 + 4x + 1)$$

Siis esimerkiksi

$$A(x) = (4x^2 + 2x - 20)(x^2 + 4x + 1) + (54x + 74).$$

Vastaus a) $A(x) = (2x^3 - 4x + 6)(2x + 9)$

b) $A(x) = (2x^2 + 9x - 9)(2x^2 + 5) + (-69x + 99)$

c) Esimerkiksi

$$A(x) = (4x^2 + 2x - 20)(x^2 + 4x + 1) + (54x + 74)$$

59

Jaetaan polynomi $A(x)$ jakokulmassa polynomilla $B(x)$.

$$\begin{array}{r}
 x + 4 \\
 2x^2 - 7x + 3 \overline{) 2x^3 + x^2 + ax + b} \\
 \underline{- 2x^3 - 7x^2 + 3x} \\
 8x^2 + (a-3)x + b \\
 \underline{- 8x^2 - 28x + 12} \\
 (a+25)x + b - 12
 \end{array}$$

Jotta jakolasku menisi tasan, jakojäännöksen $(a+25)x + b - 12$ on oltava nolla kaikilla x , eli jakojäännöspolynomien $(a+25)x + b - 12$ on oltava nollapolynomi $0x + 0$. Kertoimien $a+25$ ja $b-12$ tulee siis olla nollija eli $a = -25$ ja $b = 12$.

Vastaus $a = -25$ ja $b = 12$

60

Erotetaan ensin x yhteiseksi tekijäksi.

$$P(x) = x^5 - 15x^3 + 10x^2 + 24x = x(x^4 - 15x^2 + 10x + 24)$$

Kokeilemalla huomataan, että $x = -1$ on polynomin $x^4 - 15x^2 + 10x + 24$ eräs nollakohta. Tällöin polynomin tekijänä on $x - (-1) = x + 1$.

Jaetaan polynomi $x^4 - 15x^2 + 10x + 24$ polynomilla $x + 1$ jakokulmassa.

$$\begin{array}{r}
 x^3 - x^2 - 14x + 24 \\
 x + 1 \overline{) x^4 + 10x + 24} \\
 - x^4 + x^3 \\
 \hline
 - x^3 - 15x^2 + 10x + 24 \\
 - - x^3 - x^2 \\
 \hline
 - 14x^2 + 10x + 24 \\
 - - 14x^2 - 14x \\
 \hline
 24x + 24 \\
 - 24x + 24 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Siis $P(x) = x(x + 1)(x^3 - x^2 - 14x + 24)$.

Kokeilemalla huomataan, että $x = 2$ on polynomin $x^3 - x^2 - 14x + 24$ eräs nollakohta. Tällöin polynomin tekijänä on $x - 2$.

Jaetaan polynomi $x^3 - x^2 - 14x + 24$ polynomilla $x - 2$ jakokulmassa.

$$\begin{array}{r}
 x^2 + x - 12 \\
 x - 2 \overline{) x^3 - x^2 - 14x + 24} \\
 \underline{- \quad x^3 - 2x^2} \\
 \phantom{x - 2 \overline{) }} x^2 - 14x + 24 \\
 \underline{- \quad x^2 - 2x} \\
 \phantom{x - 2 \overline{) }} - 12x + 24 \\
 \underline{- \quad -12x + 24} \\
 \phantom{x - 2 \overline{) }} 0
 \end{array}$$

Siis $P(x) = x(x+1)(x-2)(x^2+x-12)$.

Jaetaan toisen asteen polynomi tekijöihin nollakohtien avulla.

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} \\
 &= \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \\
 x &= -4 \quad \text{tai} \quad x = 3
 \end{aligned}$$

Siis $x^2 + x - 12 = 1 \cdot (x - 3)(x - (-4)) = (x - 3)(x + 4)$.

Kirjoitetaan polynomi P tulomuodossa.

$$P(x) = x(x+1)(x-2)(x-3)(x+4)$$

Vastaus $P(x) = x(x+1)(x-2)(x-3)(x+4)$

61

- a) Kun polynomi $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 6$ jaetaan binomilla $x - 1$, on jakojäännös $P(1)$.

$$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 6 = 7$$

- b) Kun polynomi $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 6$ jaetaan binomilla $x + 3$, on jakojäännös $P(-3)$.

$$P(-3) = 2 \cdot (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 4 \cdot (-3) + 6 = -9$$

- c) Kun polynomi $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 6$ jaetaan binomilla $2x - 8 = 2(x - 4)$, on jakojäännös $P(4)$.

$$P(4) = 2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + 6 = 166$$

Vastaus a) 7 b) -9 c) 166

62

Määritetään polynomin $P(x)$ nollakohdat.

$$P(x) = 0$$

$$-4x^6 - 20x^4 + 16x^2 + 80 = 0 \quad \left| \text{Sijoitetaan } x^2 = t. \right.$$

$$-4t^3 - 20t^2 + 16t + 80 = 0$$

Kokeilemalla havaitaan, että saatu yhtälö toteutuu, kun $t = 2$, joten $t - 2$ on polynomin $Q(t) = -4t^3 - 20t^2 + 16t + 80$ tekijä. Jaetaan polynomi $Q(t)$ jakokulmassa tekijällä $t - 2$.

$$\begin{array}{r}
 -4t^2 - 28t - 40 \\
 t - 2 \overline{) -4t^3 - 20t^2 + 16t + 80} \\
 \underline{- \quad -4t^3 + 8t^2} \\
 \phantom{t - 2 \overline{) }} -28t^2 + 16t + 80 \\
 \underline{- \quad -28t^2 + 56t} \\
 \phantom{t - 2 \overline{) }} -40t + 80 \\
 \underline{- \quad -40t + 80} \\
 \phantom{t - 2 \overline{) }} 0
 \end{array}$$

Ratkaistaan yhtälö $-4t^3 - 20t^2 + 16t + 80 = 0$ tulon nollasäännön avulla.

$$-4t^3 - 20t^2 + 16t + 80 = 0$$

$$(t-2)(-4t^2 - 28t - 40) = 0$$

$$t-2=0 \quad \text{tai} \quad -4t^2 - 28t - 40 = 0$$

$$t=2 \quad \left| \begin{array}{l} t=x^2 \\ t^2+7t+10=0 \end{array} \right.$$

$$x^2=2$$

$$x=\pm\sqrt{2}$$

$$t = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm 3}{2}$$

$$t=-5 \quad \text{tai} \quad t=-2 \quad \left| \begin{array}{l} t=x^2 \\ x^2=-5 \end{array} \right.$$

$$x^2=-5 \quad x^2=-2$$

ei ratkaisua ei ratkaisua

Kirjoitetaan polynomi $P(x)$ tulomuodossa polynomin $Q(t)$ avulla.

$$Q(t) = -4t^3 - 20t^2 + 16t + 80$$

$$= -4(t-2)(t-(-5))(t-(-2))$$

$$= -4(t-2)(t+5)(t+2)$$

Sijoitetaan $t=x^2$, jolloin saadaan

$$P(x) = -4(x^2-2)(x^2+5)(x^2+2)$$

$$= -4(x-2)(x+2)(x^2+5)(x^2+2).$$

Polynomin P tekijät x^2+5 ja x^2+2 ovat jaottomia, koska niillä ei ole nollakohtia. Siis polynomilla P on täsmälleen kaksi ensimmäisen asteen tekijää.

Vastaus 2

63

- 1) **Väite:** Jokaisella n :n asteen polynomilla on korkeintaan n nollakohtaa reaalilukujen joukossa ja korkeintaan n ensimmäisen asteen tekijää.

Todistus: Jos a on polynomin P nollakohta, niin $x - a$ on polynomin P tekijä.

Oletetaan vastoin väitettä, että polynomilla P on nollakohtia enemmän kuin n kappaletta. Tällöin polynomilla P on muotoa $x - a$ olevia 1. asteen tekijöitä enemmän kuin n kappaletta. Mutta tällöin polynomin P asteluku on suurempi kuin n , mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa ja väitteen on oltava tosi. $\square$

- 2) **Väite:** Kun polynomi P jaetaan polynomilla $x - a$, niin jakojäännös on $P(a)$.

Todistus: Jakoyhtälön perusteella

$$P(x) = (x - a)Q(x) + r, \text{ missä } r \text{ on jakojäännös.}$$

Sijoitetaan $x = a$.

$$P(a) = (a - a)Q(a) + r$$

$$P(a) = r$$

Siis väite on tosi. $\square$

- 3) **Väite:** Jos n . asteen polynomilla P on nollakohdat $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, niin polynomi P on muotoa

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot \dots \cdot (x - x_n),$$

missä kerroin a on polynomin P korkeimman asteen termin kerroin.

Todistus: Jos x_i on polynomin P nollakohta, niin $x - x_i$ on polynomin P tekijä.

Oletuksen mukaan polynomin P nollakohdat ovat $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, joten polynomilla P on vähintään n ensimmäisen asteen tekijää $x - x_i$.

Toisaalta kohdan 1 mukaan n . asteen polynomilla P on korkeintaan n nollakohtaa ja $n - 1$. asteen tekijää.

Siis polynomilla P on oltava täsmälleen n muotoa $x - x_i$ olevaa 1. asteen tekijää.

Koska polynomin P asteluku on n , sillä ei voi olla muita tekijöitä, ja polynomi P voidaan kirjoittaa muodossa

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot \dots \cdot (x - x_n).$$

Toisaalta n :n asteen polynomi on aina muotoa

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0,$$

joten vakio a on korkeimman asteen termin kerroin.

64

Ratkaistaan yhtälö tulon nollasäännön avulla.

$$(3x - 6)(1 - x^2)(x + 7) = 0$$

$$\begin{array}{lll} 3x - 6 = 0 & \text{tai} & 1 - x^2 = 0 \quad \text{tai} \quad x + 7 = 0 \\ 3x = 6 & & x^2 = 1 \\ x = 2 & & x = \pm 1 \quad \quad \quad x = -7 \end{array}$$

Vastaus $x = -7$, $x = -1$, $x = 1$ tai $x = 2$

65

Polynomin $2x^3 + 10x^2 - 26x + 14$ eräs nollakohta on $x = 1$, joten tekijänä on $x - 1$. Jaetaan polynomi jakokulmassa tekijällä $x - 1$.

$$\begin{array}{r}
 2x^2 + 12x - 14 \\
 x - 1 \overline{) 2x^3 + 10x^2 - 26x + 14} \\
 \underline{- 2x^3 - 2x^2} \\
 12x^2 - 26x + 14 \\
 \underline{- 12x^2 - 12x} \\
 -14x + 14 \\
 \underline{- -14x + 14} \\
 0
 \end{array}$$

Kirjoitetaan yhtälö tulomuodossa ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$2x^3 + 10x^2 - 26x + 14 = 0$$

$$(x - 1)(2x^2 + 12x - 14) = 0$$

$$\begin{array}{ll}
 x - 1 = 0 & \text{tai} \quad 2x^2 + 12x - 14 = 0 \\
 x = 1 & x^2 + 6x - 7 = 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} \\
 &= \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2} \\
 &= \frac{-6 \pm 8}{2}
 \end{aligned}$$

$$x = -7 \text{ tai } x = 1$$

$$\text{Vastaus} \quad x = -7 \text{ tai } x = 1$$

66

Polynomin $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ eräs nollakohta on $x = 4$, joten tekijänä on $x - 4$.

Jaetaan polynomi jakokulmassa tekijällä $x - 4$.

$$\begin{array}{r}
 x^2 - x - 6 \\
 x - 4 \overline{) x^3 - 5x^2 - 2x + 24} \\
 \underline{-(x^3 - 4x^2)} \\
 -x^2 - 2x + 24 \\
 \underline{-(x^2 + 4x)} \\
 -6x + 24 \\
 \underline{-(-6x + 24)} \\
 0
 \end{array}$$

Kirjoitetaan yhtälö tulomuodossa ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$$

$$(x - 4)(x^2 - x - 6) = 0$$

$$x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

tai

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x = -2 \text{ tai } x = 3$$

Vastaus $x = -2$, $x = 3$ tai $x = 4$

67

Kokeilemalla havaitaan, että polynomin $P(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$ eräs nollakohta on $x = -1$, joten tekijänä on $x - (-1) = x + 1$.

$$P(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - 13 \cdot (-1) - 10 = -1 - 2 + 13 - 10 = 0$$

Jaetaan polynomi jakokulmassa tekijällä $x + 1$.

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 3x - 10 \\
 x + 1 \overline{) x^3 - 2x^2 - 13x - 10} \\
 \underline{-(x^3 + x^2)} \\
 -3x^2 - 13x - 10 \\
 \underline{-(3x^2 + 3x)} \\
 -10x - 10 \\
 \underline{-(-10x - 10)} \\
 0
 \end{array}$$

Kirjoitetaan yhtälö tulomuodossa ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 0$$

$$(x + 1)(x^2 - 3x - 10) = 0$$

$$\begin{aligned} x + 1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

tai

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} \\ &= \frac{3 \pm 7}{2} \end{aligned}$$

$$x = -2 \text{ tai } x = 5$$

Vastaus $x = -2$, $x = -1$ tai $x = 5$

68

Erotetaan ensin yhteinen tekijä x .

$$P(x) = x^4 - 19x^3 + 99x^2 - 81x = x(x^3 - 19x^2 + 99x - 81)$$

Kokeilemalla havaitaan, että polynomin $x^3 - 19x^2 + 99x - 81$ eräs nollakohta on $x = 1$, joten tekijänä on $x - 1$.

$$1^3 - 19 \cdot 1^2 + 99 \cdot 1 - 81 = 1 - 19 + 99 - 81 = 0$$

Jaetaan polynomi jakokulmassa tekijällä $x - 1$.

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 18x + 81 \\
 x - 1 \overline{) x^3 - 19x^2 + 99x - 81} \\
 \underline{-(x^3 - x^2)} \\
 -18x^2 + 99x - 81 \\
 \underline{-(18x^2 - 18x)} \\
 81x - 81 \\
 \underline{-(81x - 81)} \\
 0
 \end{array}$$

Kirjoitetaan yhtälö tulomuodossa ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$x^4 - 19x^3 + 99x^2 - 81x = 0$$

$$x(x-1)(x^2 - 18x + 81) = 0$$

$$x(x-1)(x-9)^2 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x - 1 = 0 \quad \text{tai} \quad (x - 9)^2 = 0$$
$$x = 1 \quad \quad \quad x = 9$$

Vastaus $x = 0$, $x = 1$ tai $x = 9$

69

Koska $x = -3$ on polynomin $P(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 12x - 18$ kaksinkertainen nollakohta, niin P on jaollinen polynomilla $(x - (-3))^2 = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

Jaetaan polynomi jakokulmassa tekijällä $x^2 + 6x + 9$.

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 2 \\
 x^2 + 6x + 9 \overline{) x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 12x - 18} \\
 \underline{-(x^4 + 6x^3 + 9x^2)} \\
 - 2x^2 - 12x - 18 \\
 \underline{-(- 2x^2 - 12x - 18)} \\
 0
 \end{array}$$

Kirjoitetaan yhtälö tulomuodossa ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 12x - 18 = 0$$

$$(x + 3)^2(x^2 - 2) = 0$$

$$(x + 3)^2 = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 2 = 0$$

$$x = -3$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Vastaus $x = -3$, $x = -\sqrt{2}$ tai $x = \sqrt{2}$

70

Koska $x = 1$ on polynomin $Q(x) = 2x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 22x - 8$ kolminkertainen nollakohta, niin Q on jaollinen polynomilla $(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

Jaetaan polynomi Q jakokulmassa tekijällä $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

$$\begin{array}{r}
 2x + 8 \\
 x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \overline{) 2x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 22x - 8} \\
 \underline{2x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 2x} \\
 8x^3 - 24x^2 + 24x - 8 \\
 \underline{8x^3 - 24x^2 + 24x - 8} \\
 0
 \end{array}$$

Kirjoitetaan yhtälö tulomuodossa ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$2x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 22x - 8 = 0$$

$$(x - 1)^3(2x + 8) = 0$$

$$\begin{array}{ll}
 (x - 1)^3 = 0 & \text{tai} \quad 2x + 8 = 0 \\
 x = 1 & 2x = -8 \\
 & x = -4
 \end{array}$$

Vastaus $x = -4$ tai $x = 1$

71

Ratkaistaan bikvadraattinen yhtälö tekemällä sijoitus $x^2 = t$

$$4x^4 - 24x^2 + 36 = 0 \quad \left| \text{Sijoitetaan } x^2 = t. \right.$$

$$4t^2 - 24t + 36 = 0$$

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$(t - 3)^2 = 0$$

$$t - 3 = 0$$

$$t = 3$$

Sijoitetaan saatuun ratkaisuun $t = x^2$.

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

Vastaus $x = -\sqrt{3}$ tai $x = \sqrt{3}$

72

Tapa 1

Kirjoitetaan yhtälö tulomuodossa hyödyntämällä ryhmittelyä ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$x^5 - x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 16x - 16 = 0$$

$$x^4(x-1) - 8x^2(x-1) + 16(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x^4 - 8x^2 + 16) = 0$$

$$x-1=0 \quad \text{tai} \quad x^4 - 8x^2 + 16 = 0$$

$$x=1 \quad (x^2 - 4)^2 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Vastaus $x = -2, x = 1 \text{ tai } x = 2$

Tapa 2

Kokeilemalla havaitaan, että $x = 1$ toteuttaa yhtälön:

$$1^5 - 1^4 - 8 \cdot 1^3 + 8 \cdot 1^2 + 16 \cdot 1 - 16 = 1 - 1 - 8 + 8 + 16 - 16 = 0$$

Jakamalla polynomi $x^5 - x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 16x - 16$ jakokulmassa tekijällä $x - 1$ saadaan yhtälö tulomuotoon

$$x^5 - x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 16x - 16 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Jaetaan jakokulman} \\ \text{avulla tekijöihin.} \end{array} \right.$$

$$(x - 1)(x^4 - 8x^2 + 16) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{tai} \quad x^4 - 8x^2 + 16 = 0$$

$$(x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot (-4) + (-4)^2 = 0$$

$$x = 1 \quad (x^2 - 4)^2 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Vastaus $x = -2$, $x = 1$ tai $x = 2$

Huomaa, että yhtälön $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ voi ratkaista myös bikvadraattisena yhtälönä.

73

Jos $x = 7$ on polynomin $P(x) = 3x^3 - 14x^2 + ax - 14$ nollakohta, niin

$$P(7) = 0$$

$$3 \cdot 7^3 - 14 \cdot 7^2 + a \cdot 7 - 14 = 0$$

$$a = -47$$

Siis $P(x) = 3x^3 - 14x^2 - 47x - 14$.

Jos $x = 7$ on polynomin P nollakohta, on polynomilla tekijä $x - 7$. Jaetaan polynomi tekijällä $x - 7$ jakokulmassa.

$$\begin{array}{r}
 3x^2 - 7x + 2 \\
 x - 7 \overline{) 3x^3 - 14x^2 - 47x - 14} \\
 \underline{3x^3 - 21x^2} \\
 7x^2 - 47x - 14 \\
 \underline{7x^2 - 49x} \\
 2x - 14 \\
 \underline{2x - 14} \\
 0
 \end{array}$$

Tällöin yhtälö voidaan kirjoittaa tulomuodossa ja ratkaista tulon nollasäännön avulla.

$$3x^3 - 14x^2 - 47x - 14 = 0$$

$$(x - 7)(3x^2 + 7x + 2) = 0$$

$$x - 7 = 0 \quad \text{tai} \quad 3x^2 + 7x + 2 = 0$$

$$x = 7 \quad x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 \pm 5}{6}$$

$$x = -2 \quad \text{tai} \quad x = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Vastaus} \quad a = -47, \text{ muut ratkaisut } x = -2, \quad x = -\frac{1}{3}$$

74

Polynomin $2x^3 + 6x^2 - 8x - 24$ eräs nollakohta on $x = -3$, joten tekijänä on $x - (-3) = x + 3$.

Jaetaan polynomi jakokulmassa tekijällä $x + 3$.

$$\begin{array}{r}
 2x^2 \qquad -8 \\
 x+3 \overline{) 2x^3 + 6x^2 - 8x - 24} \\
 \underline{-(2x^3 + 6x^2)} \\
 \phantom{x+3 \overline{) 2x^3 + 6x^2 - 8x - 24}} -8x - 24 \\
 \underline{-(-8x - 24)} \\
 \phantom{x+3 \overline{) 2x^3 + 6x^2 - 8x - 24}} 0
 \end{array}$$

Kirjoitetaan yhtälö tulomuodossa ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$\begin{aligned}
 2x^3 + 6x^2 - 8x - 24 &= 0 \\
 (x+3)(2x^2 - 8) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
 x+3=0 & \text{tai} \quad 2x^2-8=0 \\
 x=-3 & 2x^2=8 \\
 & x^2=4 \\
 & x=\pm 2
 \end{array}$$

Vastaus $x = -3$, $x = -2$ tai $x = 2$

75

Kokeilemalla havaitaan, että polynomin $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 6$ eräs nollakohta on $x = 1$, joten tekijänä on $x - 1$.

$$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 1 - 6 = 2 + 5 - 1 - 6 = 0$$

Jaetaan polynomi jakokulmassa tekijällä $x - 1$.

$$\begin{array}{r}
 2x^2 + 7x + 6 \\
 x - 1 \overline{) 2x^3 + 5x^2 - x - 6} \\
 \underline{2x^3 - 2x^2} \\
 7x^2 - x - 6 \\
 \underline{7x^2 - 7x} \\
 6x - 6 \\
 \underline{6x - 6} \\
 0
 \end{array}$$

Kirjoitetaan yhtälö tulomuodossa ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$2x^3 + 5x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-1)(2x^2 + 7x + 6) = 0$$

$$x-1=0$$

$$x=1$$

tai

$$2x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4}$$

$$= \frac{-7 \pm 1}{4}$$

$$x = -2 \quad \text{tai} \quad x = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Vastaus $x = -2$, $x = -\frac{3}{2}$ tai $x = 1$

76

Koska $x = 2$ on polynomin

$P(x) = x^5 - 6x^4 + 9x^3 + 10x^2 - 36x + 24$ kolminkertainen nollakohta, niin P on jaollinen polynomilla $(x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

Jaetaan polynomi jakokulmassa tekijällä $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

$$\begin{array}{r}
 x^2 \qquad - 3 \\
 x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \overline{) x^5 - 6x^4 + 9x^3 + 10x^2 - 36x + 24} \\
 \underline{-(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)} \\
 3x^3 + 18x^2 - 36x + 24 \\
 \underline{-(3x^3 + 18x^2 - 36x + 24)} \\
 0
 \end{array}$$

Kirjoitetaan yhtälö tulomuodossa ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$x^5 - 6x^4 + 9x^3 + 10x^2 - 36x + 24 = 0$$

$$(x - 2)^3(x^2 - 3) = 0$$

$$(x - 2)^3 = 0 \qquad \text{tai} \qquad x^2 - 3 = 0$$

$$x = 2$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

Vastaus $x = -\sqrt{3}$, $x = 2$ tai $x = \sqrt{3}$

77

Ratkaistaan yhtälö tekemällä sijoitus $x^3 = t$.

$$3x^6 - 48x^3 + 192 = 0 \quad \left| \text{Sijoitetaan } x^3 = t. \right.$$

$$3t^2 - 48t + 192 = 0$$

$$t^2 - 16t + 64 = 0$$

$$(t - 8)^2 = 0$$

$$t - 8 = 0$$

$$t = 8$$

Sijoitetaan saatuun ratkaisuun $t = x^3$.

$$x^3 = 8$$

$$x = \sqrt[3]{8}$$

$$x = 2$$

Vastaus $x = 2$

78

Tapa 1

Kirjoitetaan yhtälö tulomuodossa hyödyntämällä ryhmittelyä ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$x^6 + x^5 - 10x^4 - 10x^3 + 25x^2 + 25x = 0$$

$$x(x^5 + x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 25x + 25) = 0$$

$$x(x^4(x+1) - 10x^2(x+1) + 25(x+1)) = 0$$

$$x(x+1)(x^4 - 10x^2 + 25) = 0$$

$$x(x+1)(x^2 - 5)^2 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x + 1 = 0 \quad \text{tai} \quad (x^2 - 5)^2 = 0$$

$$x = -1 \quad \quad \quad x^2 - 5 = 0$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \pm\sqrt{5}$$

$$\text{Vastaus} \quad x = -\sqrt{5}, \quad x = -1, \quad x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \sqrt{5}$$

Tapa 2

Erotetaan yhteinen tekijä. Etsitään yksi nollakohta kokeilemalla. Jaetaan tekijöihin jakokulman avulla.

$$x^6 + x^5 - 10x^4 - 10x^3 + 25x^2 + 25x = 0$$

$$x(x^5 + x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 25x + 25) = 0$$

Kokeilemalla havaitaan, että $x = -1$ on polynomin $x^5 + x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 25x + 25$ nollakohta:

$$\begin{aligned} (-1)^5 + (-1)^4 - 10 \cdot (-1)^3 - 10 \cdot (-1)^2 + 25 \cdot (-1) + 25 \\ = -1 + 1 + 10 - 10 - 25 + 25 = 0 \end{aligned}$$

Jakamalla $x^5 + x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 25x + 25$ jakokulmassa tekijällä $x - (-1) = x + 1$ saadaan tulomuoto

$$x^5 + x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 25x + 25 = (x + 1)(x^4 - 10x^2 + 25).$$

Ratkaistaan yhtälö $x^4 - 10x^2 + 25 = 0$.

$$x^4 - 10x^2 + 25 = 0 \quad \left| \text{Sijoitetaan } x^2 = t. \right.$$

$$t^2 - 10t + 25 = 0$$

$$t^2 + 2 \cdot t \cdot (-5) + (-5)^2 = 0$$

$$(t - 5)^2 = 0$$

$$t = 5 \quad \left| \text{Sijoitetaan } t = x^2. \right.$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \pm\sqrt{5}$$

Kirjoitetaan alkuperäinen yhtälö tulomuodossa ja ratkaistaan yhtälö tulon nollasäännön avulla.

$$x^6 + x^5 - 10x^4 - 10x^3 + 25x^2 + 25x = 0$$

$$x(x^5 + x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 25x + 25) = 0$$

$$x(x+1)(x^4 - 10x^2 + 25) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x + 1 = 0 \quad \text{tai} \quad x^4 - 10x^2 + 25 = 0$$
$$x = -1 \quad \quad \quad x = \pm\sqrt{5}$$

Vastaus $x = -\sqrt{5}, \quad x = -1, \quad x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \sqrt{5}$

79

Erotetaan yhteinen tekijä x .

$$\begin{aligned} P(x) &= 6x^5 + 25x^4 + 38x^3 + 25x^2 + 6x \\ &= x(6x^4 + 25x^3 + 38x^2 + 25x + 6) \end{aligned}$$

Kokeilemalla huomataan, että $x = -1$ on polynomin $6x^4 + 25x^3 + 38x^2 + 25x + 6$ eräs nollakohta. Tällöin polynomin tekijänä on $x - (-1) = x + 1$.

Jaetaan polynomi $6x^4 + 25x^3 + 38x^2 + 25x + 6$ polynomilla $x + 1$ jakokulmassa.

$$\begin{array}{r} 6x^3 + 19x^2 + 19x + 6 \\ x+1 \overline{) 6x^4 + 25x^3 + 38x^2 + 25x + 6} \\ - 6x^4 + 6x^3 \\ \hline 19x^3 + 38x^2 + 25x + 6 \\ - 19x^3 + 19x^2 \\ \hline 19x^2 + 25x + 6 \\ - 19x^2 + 19x \\ \hline 6x + 6 \\ - 6x + 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

Siis $P(x) = x(x+1)(6x^3 + 19x^2 + 19x + 6)$.

Kokeilemalla huomataan, että $x = -1$ on polynomin $6x^3 + 19x^2 + 19x + 6$ eräs nollakohta. Tällöin polynomin tekijänä on $x - (-1) = x + 1$.

Jaetaan polynomi $6x^3 + 19x^2 + 19x + 6$ polynomilla $x + 1$ jakokulmassa.

$$\begin{array}{r}
 6x^2 + 13x + 6 \\
 x + 1 \overline{) 6x^3 + 19x^2 + 19x + 6} \\
 \underline{- 6x^3 + 6x^2} \\
 13x^2 + 19x + 6 \\
 \underline{- 13x^2 + 13x} \\
 6x + 6 \\
 \underline{- 6x + 6} \\
 0
 \end{array}$$

Siis $P(x) = x(x + 1)^2(6x^2 + 13x + 6)$.

Ratkaistaan yhtälö tulon nollasäännön avulla.

$$x(x + 1)^2(6x^2 + 13x + 6) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad (x + 1)^2 = 0 \quad \text{tai} \quad 6x^2 + 13x + 6 = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6}}{2 \cdot 6}$$

$$= \frac{-13 \pm \sqrt{25}}{12}$$

$$= \frac{-13 \pm 5}{12}$$

$$x = -\frac{18}{12} = -\frac{3}{2} \quad \text{tai} \quad x = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}$$

Vastaus $x = -\frac{3}{2}, x = -1, x = -\frac{2}{3}$ tai $x = 0$

80

Yhtälön ratkaisuiksi kelpaavat kaikki muut reaalityluvut, paitsi jakajan nollakohta $x = 4$.

Lasketaan jakolasku jakokulmassa.

$$\begin{array}{r}
 3x^3 \qquad - 48x \\
 x - 4 \overline{) 3x^4 - 12x^3 - 48x^2 + 192x} \\
 \underline{- \quad 3x^4 - 12x^3} \\
 - 48x^2 + 192x \\
 \underline{ - 48x^2 + 192x} \\
 0
 \end{array}$$

Siis $\frac{3x^4 - 12x^3 - 48x^2 + 192x}{x - 4} = 3x^3 - 48x \quad (x \neq 4).$

Ratkaistaan yhtälö tulon nollasäännön avulla.

$$\begin{aligned}
 3x^3 - 48x &= 0 \\
 3x(x^2 - 16) &= 0 \\
 3x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 16 &= 0 \\
 x = 0 \quad \quad \quad x^2 &= 16 \\
 \quad \quad \quad x &= \pm 4
 \end{aligned}$$

Ratkaisuista $x = 4$ ei toteuta määrittelyehtoa, joten se ei kelpaa ratkaisuksi.

Vastaus $x = -4$ tai $x = 0$

81

Polynomin $P(x) = 6x^4 + 17x^3 - 3x^2 - 38x - 24$ nollakohtina ovat $x = -1$ ja $x = -2$, joten sillä on tekijöinä $x - (-1) = x + 1$ ja $x - (-2) = x + 2$.

Jaetaan polynomi jakokulmassa tekijällä $x + 1$.

$$\begin{array}{r}
 6x^3 + 11x^2 - 14x - 24 \\
 x + 1 \overline{) 6x^4 + 17x^3 - 3x^2 - 38x - 24} \\
 \underline{6x^4 + 6x^3} \\
 11x^3 - 3x^2 - 38x - 24 \\
 \underline{11x^3 + 11x^2} \\
 -14x^2 - 38x - 24 \\
 \underline{-14x^2 - 14x} \\
 -24x - 24 \\
 \underline{-24x - 24} \\
 0
 \end{array}$$

Jaetaan polynomi $6x^3 + 11x^2 - 14x - 24$ jakokulmassa tekijällä $x + 2$.

$$\begin{array}{r}
 6x^2 - x - 12 \\
 x + 2 \overline{) 6x^3 + 11x^2 - 14x - 24} \\
 \underline{6x^3 + 12x^2} \\
 -x^2 - 14x - 24 \\
 \underline{-x^2 - 2x} \\
 -12x - 24 \\
 \underline{-12x - 24} \\
 0
 \end{array}$$

Jaetaan polynomi $6x^2 - x - 12$ tekijöihin nollakohtien avulla.

$$6x^2 - x - 12 = 0$$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-12)}}{2 \cdot 6} \\
 &= \frac{1 \pm 17}{12}
 \end{aligned}$$

$$x = -\frac{16}{12} = -\frac{4}{3} \quad \text{tai} \quad x = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Siis } 6x^2 - x - 12 = 6\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right).$$

Kirjoitetaan polynomi P tulomuodossa.

$$\begin{aligned} P(x) &= 6\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right)(x+2)(x+1) \\ &= 2\left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot 3\left(x + \frac{4}{3}\right)(x+2)(x+1) \\ &= (2x-3)(3x+4)(x+2)(x+1) \end{aligned}$$

Vastaus $P(x) = (2x-3)(3x+4)(x+2)(x+1)$

82

Lasketaan aluksi yhtälön vasemman puolen määrätty integraali ja tämän jälkeen ratkaistaan yhtälö tulon nollasäännöllä.

$$\int_0^x (3t^2 - 2t) dt = x$$

$$\int_0^x (t^3 - t^2) = x$$

$$x^3 - x^2 = x$$

$$x^3 - x^2 - x = 0$$

$$x(x^2 - x - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - x - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Vastaus} \quad x = 0, \quad x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

83

Aritmeettisessa jonossa peräkkäisten jäsenten erotus on vakio.

$$a_n = 3x^3 - x^4 \qquad a_{n+1} = 6x - 4 \qquad a_{n+2} = 2x^2$$

$$a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$$

$$6x - 4 - (3x^3 - x^4) = 2x^2 - (6x - 4)$$

$$6x - 4 - 3x^3 + x^4 = 2x^2 - 6x + 4$$

$$x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8 = 0$$

Ratkaistaan yhtälö laskimella.

Ratkaisuna on $x = 1$ tai $x = -2$ tai $x = 2$.

Vastaus $x = -2$, $x = 1$ tai $x = 2$

84

Geometrisen jonon ensimmäinen jäsen $a > 2$ ja jonon suhdeluku on q .

- 1) Mikäli $q = 1$, jonon kaikki termit ovat yhtä suuria kuin jonon 1. termi a_1 ja $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4a_1 = 1 - q^2$. Koska $q = 1$, saadaan yhtälö

$$4a_1 = 1 - 1^2$$

$$4a_1 = 0$$

$$a_1 = 0$$

Koska $a_1 > 2$, ei tapaus $q = 1$ ole mahdollinen.

- 2) Olkoon $q \neq 1$. Muodostetaan neljän ensimmäisen termin summa.

$$S_4 = \frac{a(1 - q^4)}{1 - q}$$

$$1 - q^2 = \frac{a(1 - q^4)}{1 - q} \quad | \cdot (1 - q) \quad (\neq 0)$$

$$(1 - q)(1 - q^2) = a(1 - q^4) \quad | a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(1 - q)(1 - q^2) = a(1 - q^2)(1 + q^2)$$

$$a(1 - q^2)(1 + q^2) - (1 - q)(1 - q^2) = 0$$

$$(1 - q^2)(aq^2 + q + a - 1) = 0$$

$$1 - q^2 = 0 \quad \text{tai} \quad aq^2 + q + a - 1 = 0$$

$$q^2 = 1$$

$$q = \pm 1$$

Määrittelyehdon $q \neq 1$ mukaan ratkaisuksi kelpaa $q = -1$.

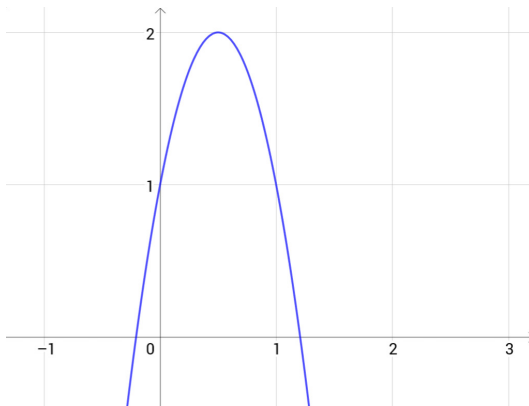
Tarkastellaan yhtälön $aq^2 + q + a - 1 = 0$ ratkaisuiden lukumäärää diskriminantin avulla.

$$D = 1^2 - 4 \cdot a \cdot (a - 1)$$

$$= 1 - 4a^2 + 4a$$

$$= -4a^2 + 4a + 1 < 0, \text{ kun } a > 2$$

Tämä voidaan vielä havaita diskriminantin kuvaajasta.



Siis yhtälöllä $aq^2 + q + a - 1 = 0$ ei ole ratkaisua, kun $a > 2$.

Vastaus $q = -1$

85

Jos polynomiyhtälön $P(x) = 0$ kertoimet ovat kokonaislukuja, niin sen kaikki rationaalijuuret ovat muotoa $\frac{p}{q}$, missä p on vakiotermin tekijä ja q korkeimman asteen termin kertoimen tekijä.

- a) Luetteloidaan yhtälön $2x^5 + x^4 - 2x - 1 = 0$ vakiotermin ja korkeimman asteen termin kertoimen tekijät.

Vakiotermin -1 tekijät: ± 1

Korkeimman asteen termin kertoimen 2 tekijät: $\pm 1, \pm 2$

- b) Tällöin mahdolliset rationaalilukujuurat ovat $\pm \frac{1}{2}$ ja ± 1 .

- c) Etsitään testaamalla, mitkä kolme vaihtoehtoista ovat yhtälön ratkaisut.

$$P(x) = 2x^5 + x^4 - 2x - 1$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^5 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = -\frac{15}{8}$$

$$P(-1) = 2 \cdot (-1)^5 + (-1)^4 - 2 \cdot (-1) - 1 = 0$$

$$P(1) = 2 \cdot 1^5 + 1^4 - 2 \cdot 1 - 1 = 0$$

Vastaus $x = -1$, $x = -\frac{1}{2}$ tai $x = 1$

86

Jos polynomiyhtälön $P(x) = 0$ kertoimet ovat kokonaislukuja, niin sen kaikki rationaalijuuret ovat muotoa $\frac{p}{q}$, missä p on vakiotermin tekijä ja q korkeimman asteen termin kertoimen tekijä.

- a) Luetteloidaan yhtälön $2x^4 + x^3 - 13x^2 - 5x + 15 = 0$ vakiotermin ja korkeimman asteen termin kertoimen tekijät.

Vakiotermin 15 tekijät: $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$

Korkeimman asteen termin kertoimen 2 tekijät: $\pm 1, \pm 2$

Tällöin mahdolliset rationaalilukujuurivaihtoehdot ovat

$$\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{15}{2}, \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15.$$

- b) Ratkaistaan yhtälö laskimella, jolloin ratkaisuna on

$$x = -\sqrt{5}, x = -\frac{3}{2}, x = 1 \text{ tai } x = \sqrt{5}$$

Huomataan, että tällä menetelmällä saadaan selville kokonaislukukertoimisen polynomiyhtälön rationaalijuuret, mutta ei irrationaalijuuria.

Vastaus $x = -\sqrt{5}, x = -\frac{3}{2}, x = 1 \text{ tai } x = \sqrt{5}$

87

Sijoitetaan kompleksiluku $z = 2 + i$ yhtälöön.

$$\begin{aligned} z^2 - 4z + 5 &= (2 + i)^2 - 4(2 + i) + 5 \\ &= 4 + 4i + i^2 - 8 - 4i + 5 \\ &= 4 - 8 + 5 + i^2 \\ &= 1 + i^2 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vastaus On osoitettu, että kompleksiluku $2 + i$ toteuttaa yhtälön.

88

a) Ratkaistaan yhtälö kompleksilukujen joukossa.

$$z^2 + 16 = 0$$

$$z^2 = -16$$

$$z = \pm\sqrt{-16}$$

$$z = \pm\sqrt{16}i$$

$$z = \pm 4i$$

b) Ratkaistaan yhtälö kompleksilukujen joukossa.

$$3z^2 + 27 = 0$$

$$z^2 + 9 = 0$$

$$z^2 = -9$$

$$z = \pm\sqrt{-9}$$

$$z = \pm\sqrt{9}i$$

$$z = \pm 3i$$

Vastaus a) $z = 4i$ tai $z = -4i$

b) $z = 3i$ tai $z = -3i$

89

Ratkaistaan yhtälö kompleksilukujen joukossa.

$$(z-4)^2 + 16 = 0$$

$$(z-4)^2 = -16$$

$$z-4 = \pm\sqrt{-16}$$

$$z-4 = \pm\sqrt{16}i$$

$$z-4 = \pm 4i$$

$$\begin{array}{ll} z-4 = -4i & \text{tai} \\ z = 4-4i & \end{array} \quad \begin{array}{l} z-4 = 4i \\ z = 4+4i \end{array}$$

Vastaus $z = 4 + 4i$ tai $z = 4 - 4i$

90

a) Ratkaistaan yhtälö kompleksilukujen joukossa.

$$z^2 + 2z + 6 = 0$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-20}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{20}i}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 5}i}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}i}{2} \\ &= \frac{2(-1 \pm \sqrt{5}i)}{2} \\ &= -1 \pm \sqrt{5}i \end{aligned}$$

b) Ratkaistaan yhtälö kompleksilukujen joukossa.

$$z^2 - 5z + 8 = 0$$

$$z = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

$$= \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

Vastaus a) $z = -1 + \sqrt{5}i$ tai $z = -1 - \sqrt{5}i$

b) $z = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$ tai $z = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$

91

a) Sievennetään.

$$\begin{aligned}(3+5i)(2-3i) \\&= 6-9i+10i-15i^2 \\&= 6+i-15 \cdot (-1) \\&= 21+i\end{aligned}$$

b) Sievennetään laventamalla imaginääriyksiköllä i .

$$\frac{3}{i} = \frac{3i}{i^2} = \frac{3i}{-1} = -3i$$

c) Sievennetään laventamalla liittoluvulla $1+i$.

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{1+2i-1}{1-(-1)} = \frac{2i}{2} = i$$

Vastaus a) $21+i$ b) $-3i$ c) i

92

- a) Lasketaan $z \cdot \bar{z}$, kun $z = 3 - 4i$ ja $\bar{z} = 3 + 4i$.

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (3 - 4i)(3 + 4i) \\ &= 3^2 - (4i)^2 \\ &= 9 - 16i^2 \\ &= 9 - 16 \cdot (-1) \\ &= 9 + 16 \\ &= 25 \end{aligned}$$

- b) Lasketaan $z \cdot \bar{z}$, kun $z = 7 + 2i$ ja $\bar{z} = 7 - 2i$.

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (7 + 2i)(7 - 2i) \\ &= 7^2 - (2i)^2 \\ &= 49 - 4i^2 \\ &= 49 - 4 \cdot (-1) \\ &= 49 + 5 \\ &= 53 \end{aligned}$$

Vastaus a) 25 b) 53

93

Koska $z_0 = 3 - 4i$ on polynomin P nollakohta, myös liittoluku $\bar{z}_0 = 3 + 4i$ on polynomin P nollakohta. Polynomilla P on ensimmäisen asteen tekijät

$$z - z_0 = z - (3 - 4i) = z - 3 + 4i$$

ja

$$z - z_0 = z - (3 + 4i) = z - 3 - 4i$$

Myös näiden tekijöiden tulo on polynomin P tekijä.

$$\begin{aligned} & (z - z_0)(z - \bar{z}_0) \\ &= (z - 3 + 4i)(z - 3 - 4i) \\ &= ((z - 3) + 4i)((z - 3) - 4i) \\ &= (z - 3)^2 - (4i)^2 \\ &= z^2 - 6z + 9 - 16i^2 \\ &= z^2 - 6z + 9 - 16 \cdot (-1) \\ &= z^2 - 6z + 25 \end{aligned}$$

Jaetaan polynomi P jakokulmassa tekijällä $z^2 - 6z + 25$.

$$\begin{array}{r}
 z^2 - 10z + 29 \\
 z^2 - 6z + 25 \overline{) z^4 - 16z^3 + 114z^2 - 424z + 725} \\
 \underline{- \quad z^4 - 6z^3 + 25z^2} \\
 -10z^3 + 89z^2 - 424z + 725 \\
 \underline{- \quad -10z^3 + 60z^2 - 250z} \\
 29z^2 - 174z + 725 \\
 \underline{- \quad 29z^2 - 174z + 725} \\
 0
 \end{array}$$

Kirjoitetaan alkuperäinen yhtälö tulomuodossa ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$z^4 - 16z^3 + 114z^2 - 424z + 725 = 0$$

$$(z^2 - 6z + 25)(z^2 - 10z + 29) = 0$$

$$z^2 - 6z + 25 = 0 \quad \text{tai} \quad z^2 - 10z + 29 = 0$$

$$z = 3 - 4i \quad \text{tai} \quad z = 3 + 4i$$

$$z = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 29}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{16}i}{2}$$

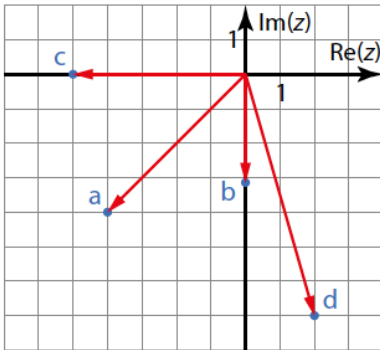
$$= \frac{10 \pm 4i}{2} = 5 \pm 2i$$

$$z = 5 - 2i \quad \text{tai} \quad z = 5 + 2i$$

Vastaus $z = 3 - 4i$, $z = 3 + 4i$, $z = 5 - 2i$ tai $z = 5 + 2i$

94

Esitetään kompleksiluvut kompleksitasossa ja määritetään moduli ja vaihekulma.



a) $z = -4 - 4i$

$$|z| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$$

Ratkaistaan vaihekulma.

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{-4}{-4}\right) \\ &= -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(1) \\ &= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

b) $z = -3i$

$$|z| = \sqrt{(-3)^2} = 3$$

Vaihekulma on $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

c) $z = -5$

$$|z| = \sqrt{(-5)^2} = 5$$

Vaihekulma on $\varphi = \pi$.

d) $z = 2 - 7i$

$$|z| = \sqrt{2^2 + (-7)^2} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$$

Vaihekulma on $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-7}{2}\right) \approx -1,29$.

Vastaus a) $|z| = 5$, $\varphi = \pi$

b) $|z| = 3$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

c) $|z| = 4\sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$

d) $|z| = \sqrt{53}$, $\varphi \approx -1,29$ ($\tan \varphi = \frac{-7}{2}$)

95

Määritetään kuvan avulla kompleksiluvut z_1 , z_2 , z_3 ja z_4 .

$$z_1 = 2 + 3i \qquad z_2 = 3 + 3i$$

$$z_3 = 4 + 3i \qquad z_4 = 3 + i$$

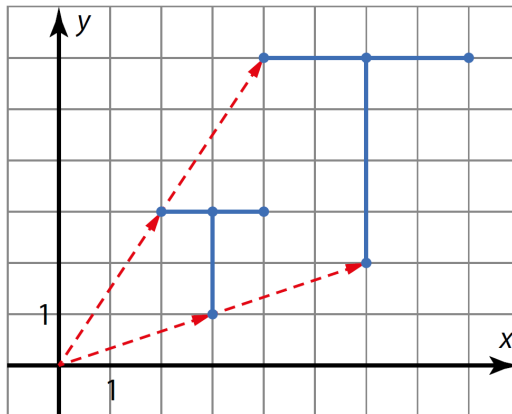
a) Kerrotaan kompleksiluvut luvulla 2.

$$z_1 = 2(2 + 3i) = 4 + 6i$$

$$z_2 = 2(3 + 3i) = 6 + 6i$$

$$z_3 = 2(4 + 3i) = 8 + 6i$$

$$z_4 = 2(3 + i) = 6 + 2i$$



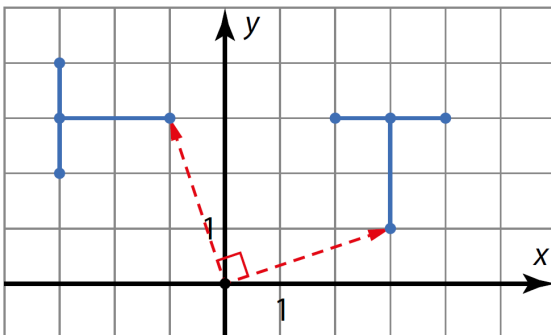
b) Kerrotaan kompleksiluvut luvulla i .

$$z_1 = i(2 + 3i) = 2i + 3i^2 = -3 + 2i$$

$$z_2 = i(3 + 3i) = 3i + 3i^2 = -3 + 3i$$

$$z_3 = i(4 + 3i) = 4i + 3i^2 = -3 + 4i$$

$$z_4 = i(3 + i) = 3i + i^2 = -1 + 3i$$



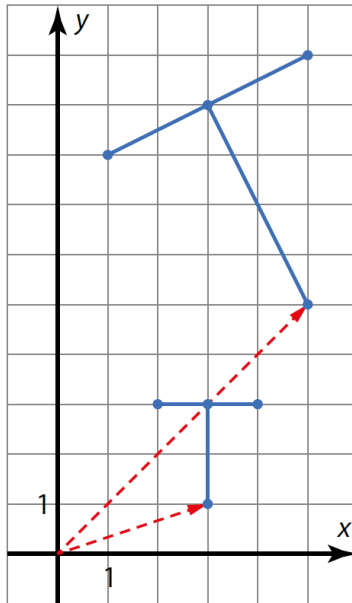
c) Kerrotaan kompleksiluvut luvulla $2 + i$.

$$z_1 = (2 + i)(2 + 3i) = 4 + 6i + 2i + 3i^2 = 1 + 8i$$

$$z_2 = (2 + i)(3 + 3i) = 6 + 6i + 3i + 3i^2 = 3 + 9i$$

$$z_3 = (2 + i)(4 + 3i) = 8 + 6i + 4i + 3i^2 = 5 + 10i$$

$$z_4 = (2 + i)(3 + i) = 6 + 2i + 3i + i^2 = 5 + 5i$$



Vastaus a) Kuvion janat ja paikkavektorit pitenevät kaksinkertaisiksi.

b) Kuvio kiertyy origon ympäri 90° vastapäivään.

c) Kuvio kiertyy ja suurenee.

96

Määritetään kompleksiluvun $z = (-2 + 2i)(4 + 4i)(1 - \sqrt{3}i)$ moduli.

$$\begin{aligned}
 |z| &= |z_1 \cdot z_2 \cdot z_3| \\
 &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3| \\
 &= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{4^2 + 4^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} \\
 &= \sqrt{8} \cdot \sqrt{32} \cdot \sqrt{4} \\
 &= \sqrt{32} \cdot \sqrt{32} \\
 &= (\sqrt{32})^2 \\
 &= 32
 \end{aligned}$$

Määritetään aluksi kompleksiluvun tekijöiden vaihekulmat ja lasketaan niiden avulla luvun z vaihekulma.

$$\begin{aligned}
 \tan^{-1} \frac{2}{2} &= \frac{\pi}{4}, \text{ joten} & \varphi_2 &= \tan^{-1} \left(\frac{4}{4} \right) & \varphi_3 &= \tan^{-1} \left(\frac{-\sqrt{3}}{1} \right) \\
 \varphi_1 &= \pi - \frac{\pi}{4} & &= \tan^{-1}(1) & &= \tan^{-1}(-\sqrt{3}) \\
 &= \frac{3\pi}{4} & &= \frac{\pi}{4} & &= -\frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \arg(z_1 \cdot z_2 \cdot z_3) \\
 &= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \\
 &= \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{3} \right) \\
 &= \frac{2\pi}{3}
 \end{aligned}$$

Vastaus $|z| = 32$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$

97

Esitetään luku napakoordinaattimuodossa $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

a) $z = 3i$

$$|z| = \sqrt{3^2} = 3$$

Vaihekulma on $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Siis luku napakoordinaattimuodossa on $z = 3(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$.

b) $z = 3 + 3i$

$$|z| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{3}{3}\right)$$

$$= \tan^{-1}(1)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

Siis luku napakoordinaattimuodossa on $z = 3\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$.

c) $z = -2$

$$|z| = \sqrt{(-2)^2} = 2$$

Vaihekulma on $\varphi = \pi$.

Siis luku napakoordinaattimuodossa on $z = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$.

d) $z = \sqrt{3} - 3i$

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}\varphi &= \tan^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{3}}\right) \\ &= -\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

Siis luku napakoordinaattimuodossa on

$$z = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Vastaus a) $z = 3(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$

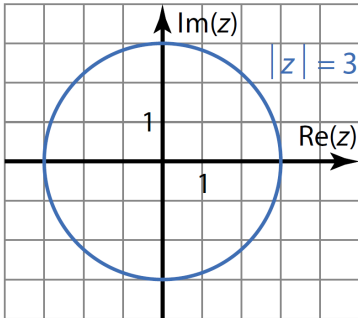
b) $z = 3\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

c) $z = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$

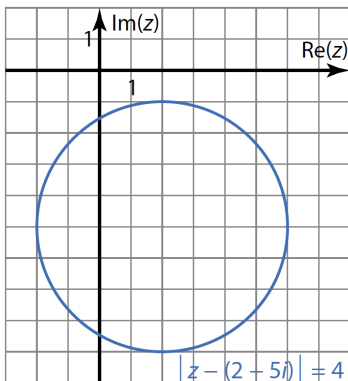
d) $z = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

98

- a) Ehdon $|z| = 3$ toteuttavat ne kompleksiluvut, jotka muodostavat origokeskisen ympyrän, jonka säde on 3.



- b) Ehdon $|z - 2 + 5i| = 4$ toteuttavat ne kompleksiluvut, jotka muodostavat ympyrän, jonka keskipiste on $(2, -5)$ ja säde 4.



- Vastaus a) Ympyrä, jonka keskipiste on origo ja säde 3.
 b) Ympyrä, jonka keskipiste on $(2, -5)$ ja säde 4.

99

- a) Lasketaan lukujonon $a_n = i^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, viisi ensimmäistä jäsentä.

$$a_1 = i^1 = i$$

$$a_2 = i^2 = -1$$

$$a_3 = i^3 = i \cdot i^2 = -i$$

$$a_4 = i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$a_5 = i^5 = i \cdot i^4 = i \cdot 1 = i$$

- b) $a_{1100} = i^{1100} = (i^2)^{550} = (-1)^{550} = 1$

$$a_{1103} = i^{1103} = i^{1100+3} = i^{1100} \cdot i^3 = 1 \cdot i^2 \cdot i = 1 \cdot (-1) \cdot i = -i$$

Vastaus a) $i, -1, -i, 1, i$

b) $a_{1100} = 1$ ja $a_{1103} = -i$

100

Kokeilemalla havaitaan, että polynomin $P(z) = z^3 - z^2 + 3z + 5$ eräs nollakohta on $z = -1$, joten tekijänä on $z - (-1) = z + 1$.

$$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 5 = -1 - 1 - 3 + 5 = 0$$

Jaetaan polynomi jakokulmassa tekijällä $z + 1$.

$$\begin{array}{r}
 z^2 - 2z + 5 \\
 z + 1 \overline{) z^3 - z^2 + 3z + 5} \\
 \underline{-(z^3 + z^2)} \\
 -2z^2 + 3z + 5 \\
 \underline{-(2z^2 + 2z)} \\
 5z + 5 \\
 \underline{-(5z + 5)} \\
 0
 \end{array}$$

Kirjoitetaan yhtälö tulomuodossa ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$z^3 - z^2 + 3z + 5 = 0$$

$$(z + 1)(z^2 - 2z + 5) = 0$$

$$z + 1 = 0 \quad \text{tai} \quad z^2 - 2z + 5 = 0$$
$$z = -1$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{16}i}{2} \\ &= \frac{2 \pm 4i}{2} \\ &= 1 \pm 2i \end{aligned}$$

$$z = 1 - 2i \quad \text{tai} \quad z = 1 + 2i$$

$$\text{Vastaus} \quad z = -1, \quad z = 1 - 2i \quad \text{tai} \quad z = 1 + 2i$$

101

Jaetaan polynomi $18z^3 - 9z^2 + 2z - 1$ jakokulmassa binomilla $3z + i$.

$$\begin{array}{r}
 6z^2 + (-3 - 2i)z \qquad + i \\
 3z + i \overline{) 18z^3 - 9z^2 \qquad \qquad + 2z - 1} \\
 \underline{- 18z^3 + 6iz^2} \qquad \qquad \qquad \\
 \qquad (-9 - 6i)z^2 \qquad \qquad + 2z - 1 \\
 \underline{- (-9 - 6i)z^2 + (-3i + 2)z} \qquad \qquad \\
 \qquad \qquad \qquad 3iz - 1 \\
 \qquad \qquad \qquad \underline{- 3iz - 1} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \frac{18z^3}{3z} = 6z^2 \\
 \frac{(-9 - 6i)z^2}{3z} = (-3 - 2i)z \\
 \frac{3iz}{3z} = i
 \end{array}$$

Polynomi $18z^3 - 9z^2 + 2z - 1$ on jaollinen binomilla $3z + i$, koska jakojäännös on 0.

Vastaus On

102

Olkoon $z = a + bi$, missä a ja b ovat nollasta eroavia reaalilukuja. Tällöin

$$\begin{aligned}
 z^2 &= (a + bi)^2 \\
 &= a^2 + 2abi + (bi)^2 \\
 &= a^2 + 2abi + b^2i^2 \\
 &= a^2 + 2abi - b^2 \\
 &= a^2 - b^2 + 2abi \\
 &= (a^2 - b^2) + (2ab)i
 \end{aligned}$$

Jotta $z^2 = 3 - 4i$, on oltava $a^2 - b^2 = 3$ ja $2ab = -4$.

Jälkimmäisestä yhtälöstä saadaan, että $b = -\frac{2}{a}$, mikä voidaan sijoittaa ensimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{aligned}
 a^2 - b^2 &= 3 \\
 a^2 - \left(-\frac{2}{a}\right)^2 &= 3 \\
 a^2 - \frac{4}{a^2} - 3 &= 0 \\
 a^4 - 4 - 3a^2 &= 0 \\
 a^4 - 3a^2 - 4 &= 0
 \end{aligned}$$

Merkitään $a^2 = t$.

$$a^4 - 3a^2 - 4 = 0$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$t = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$t = -1 \quad \text{tai} \quad t = 4$$

$$a^2 = -1 \quad a^2 = 4$$

$$\text{ei ratkaisua} \quad a^2 = 4$$

$$a = \pm 2$$

$$\text{Jos } a = -2, \text{ niin } b = -\frac{2}{a} = -\frac{2}{-2} = 1.$$

$$\text{Jos } a = 2, \text{ niin } b = -\frac{2}{a} = -\frac{2}{2} = -1.$$

Yhtälö $z^2 = 3 - 4i$ toteutuu, kun $z = -2 + i$ tai $z = 2 - i$.

Vastaus $z = -2 + i$ tai $z = 2 - i$

103

Tulkitaan vektori $\bar{v} = \bar{i} + 2\bar{j}$ kompleksiluvuksi $v = 1 + 2i$.

Kerrotaan luku v kompleksiluvulla z , jonka vaihekulma on $+45^\circ (= +\frac{\pi}{4} \text{ rad})$ sekä moduli on 1.

Tällöin tulon moduli $|v \cdot z| = |v| \cdot |z| = |v| \cdot 1 = |v|$ ja tulon vaihekulma $\arg(v \cdot z) = \arg v + \arg z = \arg v + 45^\circ$. Siis tulon moduli (eli vektorin pituus) säilyy samana, mutta vaihekulma kasvaa vaaditut 45° .

$$\text{Kompleksiluku } z = 1 \cdot (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

Tuloksi saadaan

$$\begin{aligned} z \cdot v &= (1 + 2i) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{2}{\sqrt{2}}i + \frac{2}{\sqrt{2}}i^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i - \frac{2}{\sqrt{2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i. \end{aligned}$$

$$\text{Kysytty vektori on siis } -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{3}{\sqrt{2}}\bar{j}.$$

$$\text{Vastaus } -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{3}{\sqrt{2}}\bar{j}$$

104

Osoitetaan, että $|z|^2 = z\bar{z}$.

Merkitään $z = a + bi$ ja $\bar{z} = a - bi$.

$$|z|^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = a^2 + b^2$$

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi)$$

$$= a^2 - (bi)^2$$

$$= a^2 - b^2 i^2$$

$$= a^2 - b^2 \cdot (-1)$$

$$= a^2 + b^2$$

Täten siis $|z|^2 = z\bar{z}$.

Vastaus On osoitettu, että $|z|^2 = z\bar{z}$.

105

Olkoon $z_1 = a + bi$ ja $z_2 = c + di$.

Tällöin $\bar{z}_1 = a - bi$ ja $\bar{z}_2 = c - di$.

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = a - bi + c - di = a + c - (b + d)i$$

$$z_1 + z_2 = a + bi + c + di = a + c + (b + d)i$$

$$\overline{z_1 + z_2} = a + c - (b + d)i$$

Täten siis $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}$.

Vastaus On osoitettu, että liittolukujen summa on lukujen summan liittoluku.

106

Olkoon $z_1 = a + bi$ ja $z_2 = c + di$.

Tällöin $\bar{z}_1 = a - bi$ ja $\bar{z}_2 = c - di$.

$$\begin{aligned}\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 &= (a - bi)(c - di) \\ &= ac - adi - bci + bdi^2 \\ &= ac - bd - (ad + bc)i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac - bd + (ad + bc)i\end{aligned}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = ac - bd - (ad + bc)i$$

Täten siis $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

Vastaus On osoitettu, että tulon liittoluku on liittolukujen tulo.

107

Olkoon reaalityökökertoimen polynomi P muotoa

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n.$$

Väite:

Jos kompleksiluku $z = a + bi$ on polynomin P nollakohtana, niin myös liittoluku $\bar{z} = a - bi$ on polynomin P nollakohta.

Todistus:

Tehtävien 105 ja 106 perusteella tiedetään, että

summan liittoluku on liittolukujen summa $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ ja

tulon liittoluku on liittolukujen tulo $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Oletetaan, että luku z on polynomin P nollakohta eli $P(z) = 0$.

Koska 0 on reaalityökö, tällöin on myös $\overline{P(z)} = \overline{0} = 0$, joten

$$\overline{P(z)} = 0$$

$$\overline{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n} = 0 \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{a_0} + \overline{a_1z} + \overline{a_2z^2} + \dots + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \overline{a_nz^n} = 0$$

$$\overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \overline{z} + \overline{a_2} \cdot \overline{z^2} + \dots + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{z^{n-1}} + \overline{a_n} \cdot \overline{z^n} = 0 \quad \text{reaalityökökertoimet!}$$

$$a_0 + a_1 \cdot \overline{z} + a_2 \cdot \overline{z^2} + \dots + a_{n-1} \cdot \overline{z^{n-1}} + a_n \cdot \overline{z^n} = 0 \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$a_0 + a_1 \cdot \overline{z} + a_2 \cdot \overline{z^2} + \dots + a_{n-1} \cdot \overline{z^{n-1}} + a_n \cdot \overline{z^n} = 0$$

$$P(\bar{z}) = 0$$

Siis mikäli $P(z) = 0$ niin myös $P(\bar{z}) = 0$, eli jos z on polynomin P nollakohta, niin myös $\bar{z}$ on polynomin P nollakohta. $\square$