

Kertausta ja syventämistä

11 LUKUJONOT

Tuntitehtävien ratkaisut

279.

Järjestysluku	Jäsen
1	2
2	4
3	6
4	$2 \cdot 4 = 8$
5	$2 \cdot 5 = 10$

280.

a) Lukujonon seuraava jäsen saadaan, kun edelliseen lisätään kaksi.

$$a_4 = 11 + 2 = 13$$

$$a_5 = 13 + 2 = 15$$

$$a_6 = 15 + 2 = 17$$

b) Lukujonon seuraava jäsen saadaan, kun edellinen kerrotaan kymmenellä.

$$a_4 = 10 \cdot 3\,000 = 30\,000$$

$$a_5 = 10 \cdot 30\,000 = 300\,000$$

$$a_6 = 10 \cdot 300\,000 = 3\,000\,000$$

c) Lukujonon seuraava jäsen saadaan, kun edellisestä vähennetään neljä.

$$a_4 = 5 - 4 = 1$$

$$a_5 = 1 - 4 = -3$$

$$a_6 = -3 - 4 = -7$$

281.

a) Seuraava jäsen saadaan, kun edelliseen jäseneseen lisätään 3.

b) Seuraava jäsen saadaan, kun edellisestä jäsenestä vähennetään 6.

c) Seuraava jäsen saadaan, kun edellinen jäsen jaetaan kahdella.

282.

a) $a_6 = 6 + 4 = 10$

b) $a_6 = 3 \cdot 6 = 18$

c) $a_6 = 2 \cdot 6 - 1 = 12 - 1 = 11$

d) $a_6 = 6^2 = 36$

283.

a)

Järjestysluku	Jäsen
1	5
2	10
3	15
4	$4 \cdot 5 = 20$
10	$10 \cdot 5 = 50$
$100 : 5 = 20$	100

b)

Järjestysluku	Jäsen
1	8
2	9
3	10
4	11
5	12
9	16
20	27

284.

Pöytiä	Tuoleja
1	4
2	6
3	8
4	10
5	12
10	22
n	$2n + 2$

285.

a) $a_1 = 11 \cdot 1 - 6 = 11 - 6 = 5$

b) $a_2 = 11 \cdot 2 - 6 = 22 - 6 = 16$

c) $a_7 = 11 \cdot 7 - 6 = 77 - 6 = 71$

286.

a) Lasketaan kahden peräkkäisen jäsenen erotus.

$11 - 8 = 3$

Lukujonon seuraava jäsen saadaan, kun edelliseen lisätään kolme.

$a_5 = 17 + 3 = 20$

$a_6 = 20 + 3 = 23$

b) Lasketaan kahden peräkkäisen jäsenen erotus.

$95 - 100 = -5$

Lukujonon seuraava jäsen saadaan, kun edellisestä vähennetään 5.

$a_5 = 85 - 5 = 80$

$a_6 = 80 - 5 = 75$

287. a) Lasketaan kahden peräkkäisen jäsenen osamäärä.

$$\frac{4}{1} = 4$$

Lukujonon seuraava jäsen saadaan, kun edellinen kerrotaan neljällä.

$$a_5 = 4 \cdot 64 = 256$$

$$a_6 = 4 \cdot 256 = 1\,024$$

- b) Lasketaan kahden peräkkäisen jäsenen osamäärä.

$$\frac{6}{2} = 3$$

Lukujonon seuraava jäsen saadaan, kun edellinen kerrotaan kolmella.

$$a_5 = 3 \cdot 54 = 162$$

$$a_6 = 3 \cdot 162 = 486$$

288. a) Ensimmäisenä päivänä Tuomas tekee viisi toistoa.

Seuraavana päivänä hän tekee $5 + 3 = 8$ toistoa ja

kolmantena päivänä $8 + 3 = 11$ toistoa.

Seitsemäntenä päivänä Tuomas tekee siis alkuperäisen viiden toiston lisäksi $6 \cdot 3$ toistoa.

$$5 + 6 \cdot 3 =$$

$$5 + 18 =$$

$$23$$

Seitsemäntenä päivänä Tuomas tekee 23 toistoa.

b) $5 + 3(n - 1) =$

$$5 + 3n - 3 =$$

$$2 + 3n$$

289. a) On. Edelliseen lukujonon jäsenen lisätään luku 2.
b) On. Edelliseen lukujonon jäsenen lisätään luku 5.
c) Ei ole. Aluksi lukujonon jäsenen 2 lisätään luku 2. Seuraavaksi lukuun 4 lisätään luku 4.
d) On. Edelliseen lukujonon jäsenen lisätään luku 0.

290. Fibonaccin lukujonon jäsen saadaan laskemalla yhteen kahden edellisen lukujonon jäsenen summa. Niinpä lukujonon yleinen jäsen a_n saadaan seuraavalla tavalla:
 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, kun $n > 2$.

Lasketaan lukujonon jäseniä:

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 1$$

$$a_3 = 0 + 1 = 1$$

$$a_4 = 1 + 1 = 2$$

$$a_5 = 1 + 2 = 3$$

$$a_6 = 2 + 3 = 5$$

$$a_7 = 3 + 5 = 8$$

$$a_8 = 5 + 8 = 13$$

$$a_9 = 8 + 13 = 21$$

$$a_{10} = 13 + 21 = 34$$

$$a_{11} = 21 + 34 = 55$$

$$a_{12} = 34 + 55 = 89$$

$$a_{13} = 55 + 89 = 144$$

13. lukujonon jäsen ylittää sadan.

291. a) Lasketaan kahden peräkkäisen jäsenen erotus.

$$12 - 6 = 6$$

Lukujonon seuraava jäsen saadaan, kun edelliseen lisätään kuusi.

$$a_3 = 12 + 6 = 18$$

$$a_4 = 18 + 6 = 24$$

$$a_5 = 24 + 6 = 30$$

- b) Lasketaan kahden peräkkäisen jäsenen osamäärä.

$$\frac{12}{6} = 2$$

Lukujonon seuraava jäsen saadaan, kun edellinen kerrotaan kahdella.

$$a_3 = 2 \cdot 12 = 24$$

$$a_4 = 2 \cdot 24 = 48$$

$$a_5 = 2 \cdot 48 = 96$$

292. a)

Järjestysluku	Jäsen
1	7
2	14
3	21
4	$4 \cdot 7 = 28$
n	$7n$

b)

Järjestysluku	Jäsen
1	6
2	11
3	16
4	$16 + 5 = 21$
n	$5n + 1$

293. a) $a_1 = \frac{12}{1} + 5 = 12 + 5 = 17$

b) $a_9 = \frac{12^{(3)}}{9} + 5 = \frac{4}{3} + \frac{15}{3} = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}$

294. a) A, B ja D

b) A, E ja F

295. a) Lukujonon seuraava jäsen saadaan, kun edelliseen lisätään kolme.

Järjestysluku	Jäsen
1	$a_1 = 7$
2	$a_2 = 7 + 3 = 7 + (2 - 1) \cdot 3 = 10$
3	$a_3 = 7 + 3 + 3 = 7 + (3 - 1) \cdot 3 = 13$
4	$a_4 = 7 + 3 + 3 + 3 = 7 + (4 - 1) \cdot 3 = 16$
n	$a_n = 7 + (n - 1) \cdot 3 = 7 + 3n - 3 = 3n + 4$

b) $a_{20} = 7 + (20 - 1) \cdot 3 = 7 + 19 \cdot 3 = 64$

296. a) Lasketaan kahden peräkkäisen jäsenen erotus.

$$8 - 2 = 6$$

Lukonon seuraava jäsen saadaan, kun edelliseen lisätään kuusi.

$$a_3 = 8 + 6 = 14$$

$$a_4 = 14 + 6 = 20$$

$$a_5 = 20 + 6 = 26$$

Lukujonon viides jäsen on 26.

b) Lasketaan kahden peräkkäisen jäsenen osamäärä.

$$\frac{8}{2} = 4$$

Lukujonon seuraava jäsen saadaan, kun edellinen kerrotaan neljällä.

$$a_3 = 4 \cdot 8 = 32$$

$$a_4 = 4 \cdot 32 = 128$$

$$a_5 = 4 \cdot 128 = 512$$

Lukujonon viides jäsen on 512.

297. a) $2^{15} =$
 $3\,0517\,578\,125 \approx$
 $3 \cdot 10^{10}$

b) $3 \cdot 10^{10} \cdot 0,05\text{g} =$
 $1\,500\,000\,000\text{ g} =$
 $1\,500\text{ tonnia}$

c) $2^{64} = 1,8 \cdot 10^{19}$

d) $1,8 \cdot 10^{19} \cdot 0,05\text{ g} =$
 $9,2 \cdot 10^{11}\text{ tonnia}$

298. a) Lasketaan lukujonon kolme ensimmäistä jäsentä.

$$a_1 = \frac{3+1}{1} = 4$$

$$a_2 = \frac{3+2}{2} = 2,5$$

$$a_3 = \frac{3+3}{3} = 2$$

Tutkitaan, onko lukujono aritmeettinen.

$$a_2 - a_1 = 2,5 - 4 = -1,5$$

$$a_3 - a_2 = 2 - 2,5 = -0,5$$

Lukujono ei ole aritmeettinen, sillä lukujonon seuraavaa jäsentä ei saada lisäämällä edelliseen tiettyä samaa lukua.

Tutkitaan, onko lukujono geometrinen.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{2,5}{4} = 0,625$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{2,5} = 0,8$$

Lukujono ei ole myöskään geometrinen, sillä sen peräkkäisten jäsenten suhdeluku ei ole sama.

b) Lasketaan lukujonon kolme ensimmäistä jäsentä.

$$a_1 = \frac{2}{7}$$

$$a_2 = \frac{2^2}{7} = \frac{4}{7}$$

$$a_3 = \frac{2^3}{7} = \frac{8}{7}$$

Tutkitaan, onko lukujono aritmeettinen.

$$a_2 - a_1 = \frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$$

$$a_3 - a_2 = \frac{8}{7} - \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$$

Lukujono ei ole aritmeettinen, sillä lukujonon seuraavaa jäsentä ei saada lisäämällä edelliseen tiettyä samaa lukua.

Tutkitaan, onko lukujono geometrinen.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{2} = \frac{28}{14} = 2$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{8}{7}}{\frac{4}{7}} = \frac{8}{7} \cdot \frac{7}{4} = \frac{56}{28} = 2$$

Lukujono on geometrinen, sillä sen peräkkäisten jäsenten suhdeluku on sama.

c) Lasketaan lukujonon kolme ensimmäistä jäsentä.

$$a_1 = \frac{100-1}{5} = \frac{99}{5}$$

$$a_2 = \frac{100-2}{5} = \frac{98}{5}$$

$$a_3 = \frac{100-3}{5} = \frac{97}{5}$$

Tutkitaan, onko lukujono aritmeettinen.

$$a_2 - a_1 = \frac{98}{5} - \frac{99}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$a_3 - a_2 = \frac{97}{5} - \frac{98}{5} = -\frac{1}{5}$$

Lukujono on aritmeettinen, koska lukujonon seuraava jäsen saadaan lisäämällä siihen aina tietty luku.

Tutkitaan, onko lukujono geometrinen.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{98}{5}}{\frac{99}{5}} = \frac{98}{5} \cdot \frac{5}{99} = \frac{98}{99}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{97}{5}}{\frac{98}{5}} = \frac{97}{5} \cdot \frac{5}{98} = \frac{97}{98}$$

Lukujono ei ole geometrinen, sillä sen peräkkäisten jäsenten suhdeluku ei ole sama.

299. a) Kun lukujono on aritmeettinen, saadaan seuraava lukujonon jäsen lisäämällä edelliseen tietty luku. Merkitään tätä luku kirjaimella x . Määritetään lukujonon neljä ensimmäistä jäsentä.

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = 4 + x$$

$$a_3 = 4 + x + x = 4 + 2x = 144$$

$$a_4 = 144 + x$$

Ratkaistaan yhtälö.

$$4 + 2x = 144 \quad || - 4$$

$$2x = 140 \quad || : 2$$

$$x = 70$$

Ratkaistaan lukujonon jäsenet a_2 ja a_4 .

$$a_2 = 4 + x = 4 + 70 = 74$$

$$a_4 = 144 + x = 144 + 70 = 214$$

Lukujonon toinen jäsen on 74 ja neljäs jäsen 214.

- b) Kun lukujono on geometrinen, saadaan seuraava lukujonon jäsen kertomalla edellinen jäsen tietyllä luvulla. Merkitään tätä luku kirjaimella y . Määritetään lukujonon neljä ensimmäistä jäsentä.

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = 4y$$

$$a_3 = 4y \cdot y = 4y^2 = 144$$

$$a_4 = 144y$$

Ratkaistaan yhtälö.

$$4y^2 = 144 \quad || : 4$$

$$y^2 = 36$$

$$y = 6 \text{ tai } y = -6$$

Jos $y = 6$, lukujonon jäsenet a_2 ja a_4 ovat

$$a_2 = 4 \cdot 6 = 24$$

$$a_4 = 144 \cdot 6 = 864$$

Jos $y = -6$, lukujonon jäsenet a_2 ja a_4 ovat

$$a_2 = 4 \cdot (-6) = -24$$

$$a_4 = 144 \cdot (-6) = -864.$$