

49 b)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3^2}{(x-3)(x-3)} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$$
$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(\cancel{x-3})}{(x-3)(\cancel{x-3})} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ E! RABA-ABUCA

57 b1

$$f(x) = \frac{12x}{3x^2 - 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x}{3x^2 - 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12\cancel{x}}{\cancel{x}(3x - 4)}$$

$$= \frac{12}{3 \cdot 0 - 4} = \frac{12}{-4} = -3$$

614)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{6x^2 + x - 1}{3x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{6 \cdot (x - (-\frac{1}{2})) \cdot (x - \frac{1}{3})}{3x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{2(x + \frac{1}{2}) \cdot \cancel{3 \cdot (x - \frac{1}{3})}}{\cancel{3x - 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} 2x + 1$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6x^2 + x - 1 = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

63)

$$f(x) = x^2 + 4 \quad f(1) = 1^2 + 4 = 5$$

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4 - 5}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(\cancel{x-1})}{\cancel{x-1}} \\ &= 1 + 1 = \underline{2} \end{aligned}$$

$$b) f(x)^2 = (x^2 + 4)^2 \quad f(1)^2 = 5^2 = 25$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)^2 - f(1)^2}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 4)^2 - 5^2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 4 + 5) \cdot (x^2 + 4 - 5)}{x - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 9)(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 9)(x+1)(\cancel{x-1})}{\cancel{x-1}} \\ &= (1^2 + 9) \cdot (1 + 1) = \underline{20} \end{aligned}$$

FUNKTION JÄTKUVUUS

4. PIIRRE FUNKTIO

a) $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$

NOUSEVA SUORA

EI MJ.

"ONNELLINEN" PARABEELI

b) $g(x) = \frac{1}{5}x^2 + 1$

EI MJ

c) $h(x) = \frac{5x-9}{3x}$

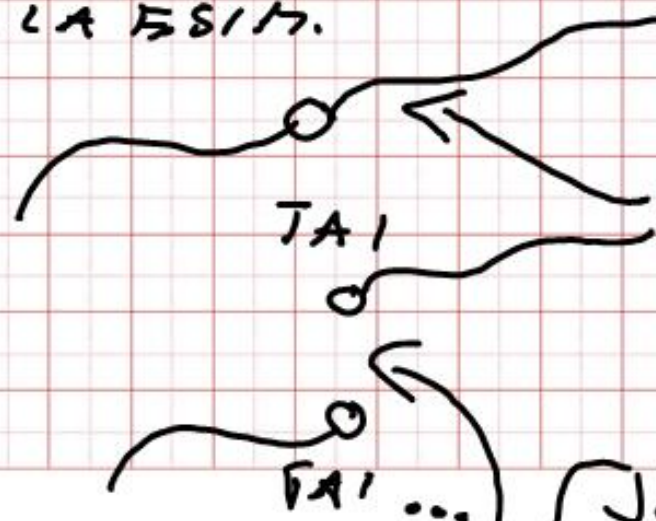
2-OSAINEN KUVAAJA,
JOLLA M. EÄJÄTKU-
VUUS KOHTA $x \neq 0$

d) $r(x) = \sqrt{5-4x}$

KUVAAJA VAIN,
KUN $x \leq \frac{5}{4}$

POLYNOMEILLA ($3x$, $5x^2-7$,
 $13x^{35}-72x^8+15$) EI OLE
MITÄÄN MÄÄRITTELYJOUKKOA
ELI NIITÄ KUTSUTAAN JATKUVIKSI.

NE FUNKTIOT, JOILLA ON
MÄÄRITTELYJOUKKO VOIVAT
OLLA ESIM.



JOS FUNKTIOILLA
ON MÄÄRITTELY-
JOUKKO JA SILLÄ
ON RAJA-ARVO
KYSYSESSÄ
PISTEESSÄ
 $\Rightarrow$ JATKUVUUS MÄÄR-
JOUKUSSAAN.

JOS TAAS SILLÄ EI
OLE RAJA-ARVOA (TYPPI)
NIIN FUNKTIO EI OLE
JATKULUA.

Lim. 0/0 $f(x) = \frac{4x^2 - 4}{x + 1}$

JAITHUVA?

$$f(x) = \frac{4x^2 - 4}{x + 1}$$

$$MJ \Rightarrow x + 1 \neq 0$$

$$x \neq -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4(x^2 - 1)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4 \cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}} = -8$$

$\Rightarrow$ ON JAITHUVA, MUTIA $x \neq -1$

En. Osoita, että funktio
 $f(x) = \frac{4x^2 - 4}{x + 1}$ on ainakin
nollakohta.

Täytyy osoittaa 2 asiaa.

1) Jatkuvuus
Edell. Esim. OK.

2) Jos funktio on positiivinen
neg. arvo on niiden
välillä oltava ainakin
nollakohta.

$$f(-2) = \frac{4 \cdot (-2)^2 - 4}{-2 + 1} = \frac{12}{-1} = -12$$

$$f(3) = \frac{4 \cdot 3^2 - 4}{3 + 1} = \frac{32}{4} = 8$$

Välissä
0.
□

ITSFISARVOFUNKTIO

ITSFISARVO ON LUVUN ETSÄISYYS
NOLLASTA.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{kun } a \geq 0 \\ -a, & \text{kun } a < 0 \end{cases}$$

SAMA PATEE FUNKTIOILLEKIN

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{kun } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{kun } f(x) < 0 \end{cases}$$

Ex. $P \mid R \mid \bar{A} \quad f(x) = |3x - 1|$

$$|3x - 1| = \begin{cases} 3x - 1, & \text{Kun } 3x - 1 \geq 0 \\ & x \geq \frac{1}{3} \\ -3x + 1, & \text{Kun } 3x - 1 < 0 \\ & x < \frac{1}{3} \end{cases}$$

Közzé

$\approx 38 - 39$

64

65

69